中学教学
辅导资料

集合与邏輯代数

——电子计算机基础

湖南省中小学教学辅导部
常德师范专科学校
合编

湖南省邵阳地区教学辅导站印

目　　录

第一讲 集合代数

1.1 集合概念

1·1·0 集 合

集合是近代数学的一个基本概念。为了描述它，先看一些具体例子。

1.拖拉机、插秧机、抽水机、收割机等等构成一个集合，即农机。

2.车床、刨床、钻床、铣床、镗床等等构成一个集合叫机床。

3.常德县蔡家岗公社社员的集合。

4.某党委会某季度所开党委委员会的集合。

5.某剧团某晚演出节目的集合。

6.线段AB上的所有点的集合。

7.一切有理数的集合R——以整数为分子，自然数为分母所成的分数之全体。

8.与某定点有定距离的点的集合——以定点有元心定距离为半径的元。

9.字母a、b、c的集合。

10.自然数1、2、3、……的集合。

所谓集合（简称集），就是作为整体来考察的一组事物，即某些事物的全体叫做由这些事物构成的一个集合。这些事物的每一个叫做这个集合的元素（简称元）。

1·1·1 从属关系

我们将用大写字母作为集合的记号。若某事物a是集合A的一个成员，即a是A的元，则我们记作

$$a \in A,$$

并说“a属于A”，或说“a在A中”。这样，“地球∈行星”就表示我们的地球与行星集合的关系。

若a不是集合A的成员，则记作

$$a \notin A。$$

所谓给了一个集合，就是规定了这个集合是由哪些元素组成的。通常有两种办法给出一个集合，一种是列举出它的全部元素来，一种是给出这个集合的元素所具有的特征性质。集合的元素各有其记号，我们用一个花括号把这些记号括起来以表示这个集合。例如$\{1、2、3\}$表示这是数1、2和3（此外不再包含其他东西）的集合。用自然数P作除数的所有余数的集合J_P是由0、1、2，…… P—1这P个元素组成的集合，记作

$$J_P = \{0，1，2……，P-1\},$$

这都是列举集合的全部元素，又如R〔$\sqrt{2}$〕是由一切形状是

$$a+b\sqrt{2}$$

其中a和b是有理数的实数所组成的集合，记作

$$R〔\sqrt{2}〕=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in R\},$$

这就是给出R〔$\sqrt{2}$〕中元素的特征性质。括号$\{\cdots\cdots\}$中的符号$\mid$之前的$a+b\sqrt{2}$表明R〔$\sqrt{2}$〕中元素的形状，但a、b究竟是什么则由符号$\mid$之后的性质$a, b \in R$所说明。

必须将以某个对象A为其仅有的一个成员（一个元素）的集合，即集合$\{A\}$，与A本身区别开来。举例来说，若A$\{1，2\}$，则$\{A\}$是一个仅有一个成员的集合，但A却是一个具有两个成员的集合。仅有一个成员的集合称为单位集合。例如$\{1\}$是单位集合，但非单位数1。

给出一个集合，上述从属关系必须十分明确，倘说平面上与某定点0接近的点的‘集合’，其‘接近’的说法就很模糊，在这平面上任取一个点×，算不算接近0的呢？没有判定标准，无从断定×是否属于所说的‘集合’，即所谓的‘集合’不成其为集合。

1·1·2　包含关系

设A、B为两集，则产生这样的问题，其中一集的元是否也属于另一集？若a、b分别表示A、B的元，有也只有下列四种可能情形：

（1）每个$a \in B$，每个$b \in A$；

（2）每个$a \in B$，并非每个$b \in A$；

（3）并非每个$a \in B$，每个$b \in A$；

（4）并非每个$a \in B$，并非每个$b \in A$。

于情形（1），即两集有相同的元时，称两集相等，记作A＝B，例如$\{1、2、3\}$＝

$\{2、1、3\}=\{3、1、2\}=\{1、1、2、3\}$；于情形（2），即A只有B的元但未尽有B的元，称集a被集B包含、集B包含集A、A是B的真子集（或真部分集合）、B是a的真扩集或真母集，记作$A\subset B$或$B\supset A$；因此，于情形（3），有$B\subset A$，$A\supset B$；情形（4）最常见，不需特别记号。若每个$a\in B$，则情形（1）、（2）之一出现，合并记之为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$，称A是B的子集（或部分集合），B是a的扩集或母集。显然，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则$A=B$。多数人定义$A\subset B$表示‘若$a\in A$则$a\in B$，即$A\subset B$包括了$A=B$的可能性，为了省事，本讲义此后采取这种表示法，亦即以后见到$A\subset B$就是指的$A\subseteq B$，表示A是B的子集，B是a的母集。

包含关系，类似于数的大小比较关系。区别从属关系“$\in$”与“$\subset$”是重要的。从属关系是集的元与集本身的关系，在从属关系的一边（左边）写着集的一个元，而在另一边（右边）则写着一个集。但包含关系都是集与集之间的关系，它的每一边都是集。

1·1·3 空集与全集

为了方便，我们约定：

空集或零集表示任何元素都没有的集合，记作0。

全集具有一切事物，记作|。

$x\in 0$，对于世界上任何事物x来说都假，

$x\in |$，对于世界上任何事物来说都真。

空集合与全集合都是唯一的，空集合常被看成每个集合的子集（因为世界上没有一个事物是0的元素而又不是任意集A的元素的）。又任何一个集合当然是全集合的子集合。特别地

$$0\subset |.$$

零集之为集就象数零之为数，不要批评空集，全集是虚构，须知单凭一集的元的定义有时不知这样的元到底是否存在。例如，仅管人类很早就知道$3^2+4^2=5^2$却至今还不知道能使方程$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$对自然数x、y、z可解的自然数n的集是否空集（即著名的Fermat命题是否真确）。于此可见，空集概念是必要的，因为宣称A是个空集表达一项实在的认识。

1·2 集合的运算

1·2·0 集合的补

如果我们从全集合|中取出某集合A的所有成员，则剩余的事物构成A的补集合，用A'表示。集合A与A'没有公共的成员，但全集合的每个元素不是A的一个元素就是A'的

一个元素，空集合的补集合是全集合，反之，全集合的补集合是空集合。即

$$0' = 1, \qquad 1' = 0.$$

相补关系是对合（*involutory*）的，就是说，补集合的补集合是原集合：$(A')' = A'' = A$。

1·2·1 集合的并、交、差

给定两个集合A、B后，我们可以构成被称为A与B的并（或称连）的集合C，使它的成员是A的成员或是B的成员；若A与B有公共元，则这些公共元只在它们的并集 C 中 出现一次。例如，A和B是两袋马铃薯，那么它们的并就是把这两袋倒进第三袋所构 成的。两个集合A与B的并可表成。

$$A \cup B,$$

读做A连B。

例

1.若 $A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{c, d, e, f\}$

则 $$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

2. $$\{2, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

3.若A是偶数集合，而B是奇数集合，则$A \cup B$是所有整数的集合。

4.若A是马的集合，B是蒙古马的集合，则$A \cup B = A$，因为每条蒙古马都是马。

5.若A是马的集合，B是有角马的集合，则$A \cup B = A$，这是因为B是空集合，它 对于并不能提供任何东西（元）。

对于任何集合A，

$A \cup 0 = A$，$A \cup 1 = 1$，$A \cup A = A$.

因为$A \cup 0$，不是A的元，就是0的元，而0没有任何元。又$A \cup 1$仅有1的元，因而它具有所有的事物。最后，$A \cup A$

具有也只具有A的元。

关系$A \cup A = A$称为并的等幂律。

因为每个事物或属于A或属于A'，所以有

$$A \cup A' = 1.$$

由即属于集A又属于集B的所有元素组成的集合称为它们的交，A、B的交表为

$$A \cap B,$$

读做A交B。即$A\cap B=\{a \mid a\in A且a\in B\}$

例

1.若$A=\{a, b, c, d, \}$，$B=\{c, d, e\}$，

则 $A\cap B=\{c, d\}$。

2.若A是绿眼猫的集合，B是长毛猫的集合，则$A\cap B$是长毛绿眼猫的集合。

3.若A是猫的集合，B是狗的集合，则$A\cap B=0$，因为没有任何一种动物既是猫又是狗。

4.设A是所有被k除得尽的整数的集合，B是所有被l整除的整数的集合，则$A\cap B$是被l与R的最小公倍数除得尽的整数的集。

5.M是全体偶数组成的集合，而N是全体小于7的正整数所组成的集合时，

$M\cap N=\{2, 4, 6\}$。

对于任何集合A，

$A\cap I=A$，$A\cap 0=0$，$A\cap A=A$。

因为A的每个元都是A与全集所公有的，而空集同A无公元（即使A本身是空集时也如此）。第三个关系（交的等幂律）只是说，A的每个元是A和它本身的公元。

因为A与其补A'，无公元，我们还有

$$A\cap A'=0。$$

集合的并和交这两个概念可以推广到任意多个集合的情形去。设I是一个足码集合，对于每个$\alpha\in I$，都有一个集合M_α，那么属于每一个M_α（$\alpha\in I$）的元素的全体组成的集合就叫做这些M_α的交，记作

$$\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha$$

同样，属于任何一个M_α（$\alpha\in I$）的元素的全体组成的集合就叫做这些M_α的并，记作

$$\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha$$

由属于A而不属于B的所有元素组成的集合叫做自集A减去集B的差，以记号$A\setminus B$表示，读做A减B。

即 $A\setminus B=A\cap B'$

例

1.设A为闭区间$[1, 3]$，B为闭区间$[2, 4]$。这时$A\cup B$为闭区间$[1, 4]$，$A\cap B$为闭区间$[2, 3]$，$A\setminus B$为半开区间$[1, 2)$，$B\setminus A$为半闭区间$(3, 4]$。

2. 设A是所有矩形的集合，B是所有菱形的集合。这时，$A\cap B$是所有正方形的集合，$A\setminus B$是不等边矩形的集合，$B\setminus A$是不等角菱形的集合。

1·2·2 相补、包含、并及交的关系

我们在相补、包含、并及交之间着手建立一些重要的关系。

1、2、2、1 我们首先证明，对于任何集A，B，

$$A\cap B\subset A,\qquad A\cap B\subset B,$$

$$A\subset A\cup B,\qquad B\subset A\cup B。$$

这是因为A和B的公元（如果存在的话）都是A的元，也都是B的元；并$A\cup B$既具有A的元也具有B的元。

1、2、2、2 下面三个关系

$$(\mathrm{i})\ A\subset B,\qquad (\mathrm{ii})\ A\cup B=B,$$

$$(\mathrm{iii})\ A\cap B=A$$

是等效的，这就是说，如果它们中间的任何一个成立，则它们三个都成立。

设（i）成立，则$A\cup B$的元或是B的一个元，或是A的一个元，在后一情形由（i）它还是B的元，这就是说$A\cup B\subset B$；但因$B\subset A\cup B$，故$A\cup B=B$，即（ii）成立；此外，A的每个元也是A，B之公元，因此，$A\subset A\cap B$，又因$A\cap B\subset A$，故$A\cap B=A$，即(iii）成立。请注意我们证明一个等式时所使用的方法：为了证明，比如说$x=y$，我们就同时证明$x\subset y$及$y\subset x$，换句话说，左边集合的每个元都是右边集合的一个元，而右边集合的每个元也都是左边集合的一个元。

其次，假设（ii）成立，因为$A\subset A\cup B$及$A\cup B=B$，所以$A\subset B$即（i）成立，从而$A\cap B=A$即（iii）成立。

最后，我们假设（iii）成立，则由$A\cap B\subset B$有$A\subset B$即有（i），因而有$A\cup B=B$即有（ii）。证毕。

1、2、2、3 德，摩根（DeMorgan）定律

并与交取补后互换。精确地说是：

$$(A\cup B)'=A'\cap B',$$

$$(A\cap B)'=A'\cup B'。$$

这些关系称为德，摩根定律

我们先证明：若第一个关系成立，则第二个关系成立。

事实上，我们记得补集合的补集合是原集合这一事实，那么若第一个关系成立，则把A、B换成A′，B′，它也应成立。故若第一个关系成立，则我们有

$$[A'\cup B']'=A''\cap B'',$$

即　　$[A'\bigcup B']'=A\bigcap B$。

再在两边取补（因为若两个集合相等，那末它们的补集合也相等）

得　　$(A'\bigcup B')''=(A\bigcap B)'$，

即　　$A'\bigcup B'=(A\bigcap B)'$

或　　$(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

这恰是我们所需要的。

回头证明第一个关系确实成立。

若$C\in(A\bigcup B)'$，则$C\notin A\bigcup B$，因此$C\notin A$且$C\notin B$，换句话说，$C\in A'$且$C\in B'$，因此$C\in A'\bigcap B'$，这就证明了

$$(A\bigcup B)'\sqsubset(A'\bigcap B')。\qquad(1)$$

反之，如果$C\in A'\bigcap B'$，则$C\in A'$且$C\in B'$，这就是说$C\notin A$且$C\notin B$，因此$C\notin A\bigcup B$，这是因为并的所有元或是A的元或是B的元。但是若$C\notin A\bigcup B$，则$C\in(A\bigcup B)'$，这就证明了

$$A'\bigcap B'\sqsubset(A\bigcup B)'\qquad(2)$$

由包含关系（1），（2），我们得到所要证明的等式

$$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'。$$

1·2·3　运算定律

集合的连与交这两种运算具有数的加法和乘法的许多性质，特别是通常所说的基本算律。

1·2·3·0 交换律

根据定义，显然　$A\bigcup B=B\bigcup A$，

$A\bigcap B=B\bigcap A$，

即集合的连和交都是可交换的。

1·2·3·1 结合律

连和交都是可结合的，即

$$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$$

$$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C。$$

为了证明连的结合性，只须注意$A\bigcup(B\bigcup C)$是由属于A或属于B或属于C的元所构成的集合，而$(A\bigcup B)\bigcup C$也是这同一集合。交的结合律可由连的结合律并利用德·摩根定律而得到，但是比较简单的还是直接观察$A\bigcap(B\bigcap C)$，它是由A，B及C的公共元素

所构成的集合，因此它和$(A\cap B)\cap C$是同一集合。

根据结合律，我们可将$(A\cup B)\cup C$及$A\cup(B\cup C)$中的任一个写为$A\cup B\cup C$，并将$(A\cap B)\cap C$及$A\cap(B\cap C)$中的任一个写为$A\cap B\cap C$。这种任意省略括号的做法还可推广到任何多个集合的情形上去，例如$(A\cup B\cup C)\cup D=(A\cup B)\cup(C\cup D)=A\cup(B\cup C\cup D)$，这是因为这些集合中每一个的元都是或A、或B、或C、或D的元，A、B、C、D之一的元也都是这些集的元，除此以外无其它元，因此我们可将这些集合中的任何一个写为$A\cup B\cup C\cup D$。

由于连（以及交）又是可以交换的，因此可以任意调换

$$A\cup B\cup C$$

中集合的次序，例如

$$\begin{aligned}C\cup B\cup A&=(C\cup B)\cup A=A\cup(C\cup B)\text{（由交换律）}\\&=A\cup(B\cup C)\text{（理由同上）}\\&=A\cup B\cup C。\end{aligned}$$

这个结果显然可以推广到任意多个集合的情形上去，举例来说，

$$\begin{aligned}B\cup D\cup A\cup C&=(B\cup D\cup A)\cup C\\&=(A\cup B\cup D)\cup C\\&=(A\cup B)\cup(C\cup D)\\&=A\cup B\cup C\cup D。\end{aligned}$$

这是很明显的，因为无论$B\cup D\cup A\cup C$或$A\cup B\cup C\cup D$都是由而且仅仅由A，B，C，D的元所构成的集合。

1·2·3·2 分配律

连与交中的每一个对于另一个都是可分配的，即

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

及

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

这些关系式使我们联想到普通算术中的分配律。

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

但是普通算术中仅有一个分配律〔$(a\cdot b)+C$ 一般不等于$(a+c)\cdot(b+c)$〕。为了证明连对于交是可分配的，我们注意，若$x\in A\cup(B\cap C)$，则x或属于A，或属于$B\cap C$；若是前一情形，则$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，因而$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$；若是后一情形，则$x\in B$且$x\in C$，因此$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，因此仍有$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，这就证明了

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)\qquad(1)$$

反之，若$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$；若$x\notin A$，则必须$x\in B$且$x\in C$，因此$x\in B\cap C$，而最后就有$x\in A\cup(B\cap C)$；若$x\in A$，则$x\in A\cup(B\cap C)$仍为真确，这就证明了

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C) \qquad (2)$$

由（1），（2），即得第一个分配律。

第二个分配律可用同样的方法证明，也可以用在第一个分配律上取补的方法导出。

1）下列一对关系

$$A\cup B=I, \qquad A\cap B=0$$

成立的充要条件是$B=A'$。我们已经指出过$A\cup A'=I$，$A\cap A'=0$，因此只须证明仅有A'具有这个性质就行了。

由$A\cup B=I$有

$$A'\cap(A\cup B)=A'\cap I=A',$$

但由分配律

$$\begin{aligned}A'&=(A'\cap A)\cup(A'\cap B)\\&=0\cup(A'\cap B)\\&=A'\cap B,\end{aligned}$$

而由1、2、2、2有$A'\subseteq B$。

由$A\cap B=0$，我们有

$$A'\cup(A\cap B)=A'\cup 0=A'$$

因此应用连对于交的分配律有

$$(A'\cup A)\cap(A'\cup B)=A',$$

这就是说

$$I\cap(A'\cup B)=A'$$

因此

$$A'\cup B=A' \text{或} B\cup A'=A',$$

同样由1、2、2、2有

$$B\subseteq A'。$$

这样从两个关系式

$$A\cup B=I, \qquad A\cap B=0,$$

我们就可得到

$$B\subseteq A', \qquad A'\subseteq B,$$

即　　$B=A'$。证毕。

2）对于任意的集合A，B，C，（i）若$A\subseteq B$且$A\subseteq C$，则$A\subseteq B\cap C$；

（ii）若$A \subset C$，$B \subset C$，则$A \cup B \subset C$。

因为如果（i）若$A \subset B$且$A \subset C$，则$A \cap B = A$，$A \cap C = A$，因而有

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C = A$，因此$A \subset B \cap C$。又若（ii）$A \subset C$且$B \subset C$，则$A \cup C = C$，$B \cup C = C$，因此

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C,$$

这就证明了$A \cup B \subset C$。

3）若$A \subset B$，则

$$A \cap C \subset B \cap C,$$

且 $$A \cup C \subset B \cup C。$$

这是因为由$A \subset B$有$A = A \cap B$（据1、2、2、2），从而有$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$，因而

$$\begin{aligned}(A \cap C) \cap (B \cap C) &= A \cap (B \cap C) \cap (B \cap C) \text{（结合律）}\\ &= A \cap (B \cap C) \text{（交的等幂律）}\\ &= A \cap C。\end{aligned}$$

这就证明了$A \cap C \subset B \cap C$；

又因为由$A \subset B$有$A \cup B = B$，从而有

$$\begin{aligned}(A \cup C) \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup (C \cup C)\\ &= (A \cup B) \cup C\\ &= B \cup C,\end{aligned}$$

这就证明了$A \cup C \subset B \cup C$。

这些结果的一个特点是：如果$A = B$则$A \cap C = B \cap C$及$A \cup C = B \cup C$。这是因为：如果$A = B$则$A \subset B$，这个特点是很显然的。

4）从1、2、2、1及1、2、2、2之3，有吸收律

$A \cap (A \cup B) = A$，和$A \cup (A \cap B) = A$。

这是因为由1、2、2、1，有$A \cap (A \cup B) \subset A$和$A \subset A \cup B$应用（1、2、3、2之3）于$A \subset A \cup B$，有$A \cap A \subset (A \cup B) \cap A$，引用交的等幂律和交换律，有$A \subset A \cap (A \cup B)$。由$A \cap (A \cup B) \subset A$及$A \subset A \cap (A \cup B)$，得到

$$A \cap (A \cup B) = A,$$

不难仿此证明 $A \cup (A \cap B) = A$。

5）$A \subset B$的充要条件是$A \cap B' = 0$。

因为若是$A \subset B$，则$A = A \cap B$，从而有

$$\begin{aligned}A \cap B' &= (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B')\\ &= A \cap 0 = 0;\end{aligned}$$

反之若$A\cap B'=0$，则

$$A=A\cap I=A\cap(B\cup B')$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap B')$$
$$=(A\cap B)\cup 0=A\cap B。$$

从而$A\subset B$。

6）若是对于所有的集合A都有$B\subset A$，则$B=0$。因为特别有$B\subset 0$，但是$0\subset B$，所以$B=0$。

若是对于所有的集合A都有$A\subset B$，则$B=I$。

因为特别有$I\subset B$，同时还有$B\subset I$，所以$B=I$。

7）若$A\cap B=0$，则$A=0$且$B=0$。

因为$I=A\cap B\subset A$，因此$A=I$；类似地有$B=I$。

1、2、4 集合的差与对称差

在1、2、2定义3自集A减去集B的差为一切属于A但不属于B的元素所组成的集合，我们现在迳用$A-B$表示这个差，据此定义，我们有：

$$A-B=A\cap B'$$

我们来研究集合差的一些性质。首先注意

$$I-A=A'$$

这是因为$I-A=I\cap A'=A'$。特别地$I-0=0'=I$。

1）下列两个关系

$$A-B=0,\quad A\subset B$$

是等效的，这是因为如果$A\subset B$，则由1、2、3、2之5）有$A\cap B'=0$，因而$A-B=0$，反之亦成立。

2）在并与差之间的一个重要关系是

$$(A-B)\cup B=A\cup B。$$

这是因为

$$(A-B)\cup B=(A\cap B')\cup B$$
$$=(A\cup B)\cap(B'\cup B)$$
$$=(A\cup B)\cap I=A\cup B$$

特别地，若$B\subset A$，则

$$(A-B)\cup B=A$$

这是因为如果$B\subset A$，则$A\cup B=A$的缘故。

此外，当且仅当$A\cap B=0$时，$A-B=A$。这是因为如果$A-B=A$，则$A=A\cap B'$，因此

$$A\cap B=(A\cap B')\cap B=A\cap(B'\cap B)$$
$$=A\cap 0=0;$$

反之，如果$A\cap B=0$，则

$$A=A\cap I=A\cap(B\cup B')$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap B')$$
$$=0\cup(A\cap B')$$
$$=A\cap B'$$
$$=A-B。$$

3）交对于差是可分配的，即

$$C\cap(A-B)=(C\cap A)-(C\cap B)。$$

这是因为

$$(C\cap A)-(C\cap B)=(C\cap A)\cap(C\cap B)'$$
$$=(C\cap A)\cap(C'\cup B')\text{（德·摩根定律）}$$
$$=(C\cap A\cap C')\cup(C\cap A\cap B')$$
$$=C\cap A\cap B'\text{（因为}C\cap C'=0\text{）}$$
$$=C\cap(A-B)。$$

但是，并对于差却并不是可分配的，这从1、2、4之2）中所考虑的并来看是很清楚的。因为集合$(A-B)\cup B$具有B的所有元素，但集合$(A\cup B)-(B\cup B)=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup(B\cap B')=(A\cap B')\cup 0=A\cap B'$却并不具有B的元素。

4）由两个集合间的差$A-B$，我们构造对称差

$$A+B$$

它被定义为集A减集B之差及B减A之差的并，即

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$=(A\cap B')\cup(B\cap A')。$$

对称差可用不同的方法表示，例如

$$A+B=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$

这是因为

$$(A\cup B)\cap(A'\cup B')$$
$$=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$$
$$=(A\cap A')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(B\cap B')$$
$$=B\cap A'\cup(A\cap B')$$
$$=(B-A)\cup(A-B)$$

$$= A + B。$$

另一表示法是

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

这种表示法清楚地表明了对称差的性质：它是由属于A或B，但不同时属于二者的元素所构成的集合，这一事实启发我们选用加号来表示对称差。

为了证明这个关系，我们注意

$$\begin{aligned}(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \\ &= (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\ &= A + B。\end{aligned}$$

由定义可以直接得到的另一重要关系是

$$A' + B' = A + B$$

5）正如它的名称的含意一样，对称差当然是可交换的。因为

$$\begin{aligned}B + A &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \text{（连的可交换性）} \\ &= A + B。\end{aligned}$$

它也是可结合的，即

$$(A + B) + C = A + (B + C)。$$

这是因为

$$A + B = (A \cup B) \cap (A' \cup B'),$$

因而

$$\begin{aligned}(A + B)' &= [(A \cup B) \cap (A' \cup B')]' \\ &= (A \cup B)' \cup (A' \cup B')' \\ &= (A' \cap B') \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap B) \cup (A' \cap B'),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= [(A + B) \cup C] \cap [(A + B)' \cup C'] \\ &= \left\{[(A \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup C\right\} \cap [C' \cup (A + B)'] \\ &= \left\{[(A \cup B) \cup C] \cap [(A' \cup B') \cup C]\right\} \\ &\quad \cap \left\{C' \cup [(A \cap B) \cup (A' \cap B')]\right\} \\ &= (A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C) \\ &\quad \cap [C' \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B')]\end{aligned}$$

$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)$$
$$\cap[C'\cup A\cup(A'\cap B')]$$
$$\cap[C'\cup B\cup(A'\cap B')]$$
$$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C)\cap(A\cup B'\cup C')\cap(A'\cup B\cup C')。$$

这个表示式不因A，C的互换而改变（这时第一个括号变成$C\cup B\cup A$，这是与$A\cup B\cup C$相等的，第二、三两括号刚好互换位置；第四个括号变成$C'\cup B\cup A'$，但它仍与$A'\cup B\cup C'$相等），因此有

$$(A+B)+C=(C+B)+A;$$

但是$C+B=B+C$，而$(B+C)+A=A+(B+C)$，从而有

$$(A+B)+C=A+(B+C)。$$

6）交对于对称差是可分配的，即

$$C\cap(A+B)=(C\cap A)+(C\cap B)。$$

因为

$$C\cap(A+B)=C\cap[(A-B)\cup(B-A)]$$
$$=[C\cap(A-B)]\cup[C\cap(B-A)]$$
$$=[(C\cap A)-(C\cap B)]$$
$$\cup[(C\cap B)-(C\cap A)]$$
$$=(C\cap A)+(C\cap B)。$$

然而，并对于对称差却不是可分配的，例如

$$A\cup(A+B)=A\cup B$$

但是

$$(A\cup A)+(A\cup B)=A+(A\cup B)=B\cap A'。$$

$7)_0$　　$A+A=0$。

这是因为

$$A+A=(A\cap A')\cup(A\cap A')=0\cup 0=0。$$

$7)_1$　　若$A+B=0$，则$B=A$。

这是因为

$$A+B=(A\cap B')\cup(A'\cap B),$$

因而由$A+B=0$，我们引1、2、3、2之7推得$A\cap B'=0$且$A'\cap B=0$，因此$A\subset B$且$B\subset A$，从而$A=B$

$7)_2$　　$A_i=B_i\ (i=1,2,\cdots,n)$的充要条件是

$$(A_1+B_1)\cup(A_2+B_2)\cup\cdots\cup(A_n+B_n)=0$$

因为每个方程$A_i=B_i$等效于$A_i+B_i=0$。