组合数学讲义

李果正 编

福州大学数学系

组合数学讲义

李果正编

福州大学数学系印

第一章 绪 论

组合与排列的问题是古老的问题。它起源于猜测谜语，博奕以及古典概率的求法，在我国，据传早在《河图》、《洛书》中已对一些有趣的组合问题给出了正确的解答。但是，这门数学只近几十年特别是自计算机出现以后，近廿年中发展得很快。随着计算机的应用进展，使它庞大的数字计算有了现实的应用，例如在物理、化工、电子技术、统计学、社会科学、运筹学和系统工程等各个领域中都有着广泛的应用。这样就促使它在理论上和方法上都得有迅速的发展和提高。我校编写这门数学作为课程，目的在于介绍一些有关的基本理论和运用技巧，使计算机软件的创制能获得更好的手段。

在本绪论中拟解决如下两个根本问题：1．组合数学是什么样的一门数学。2．组合数学的基本问题是什么？现在分述于下：

1．什么样的数学叫做组合数学。

数学是以量为研究对象，量是事物和人类思维等给人有比较测量的反映的一种属性。例如人体感到痛、痒、冷热、重轻等使人想去测量它的反映感觉，事物中如开会，值勤、光、电、振动等也都具有量，依据不同的量就得用不同的方法去研究量的界限或度，研究它们之间或与性质之间的关系，内在的性质和运动的变化。这在数学发展中业已证实了的问题，例如人类在古代时对于测量田地，计数人口牲口以及随后对时间的认识，在二百多年前就有混合几何和代数的方法即解析法来研究几何量的，以后又拉进时间来探讨物理运动的规律，这此用的就是所谓分析法，计数、几何、代数、微积分是分析法的发展过程，其所研究的量是个数，几何量和时间及其关系，再后就是随机量即可能性的大小的量、用的是统计方法，

它也是以计数开始的，这就是说通过分析方法把代数几何发展成微积分数学分析、函数分析、拓扑学，另一方面通过统计方法，开始时是求组合数的比的方法，来研究古典概率，而至于数理统计和过程论，那么组合数学是怎样形成的呢？它到底是什么样的一门数学分支呢？

我们先来看一些具体的数学问题：

（1）五个人分十七元钱，问多少种分法？

（2）平面上有10条直线．可以把平分划成了多少区域？

（3）如果有三种颜色可资选用，则对于立方体的面进行着色，该有多少种方法？

（4）四个人就坐一张园桌或排成一列，各有多少种方法？

（5）碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的不同异构体可能有多少种？

（6）全国第五届运动会1983年9月7日在上海开幕了，各项比赛的分组和比赛日程，场地分配应该如何根据实际情况，进行安排呢？

（7）每户人家都得生煤炉，有一家备了两盒火柴，当要用火柴生煤炉时，随意从其中一盒里取出一根火柴。当然两盒火柴的根数是一样的设为105根、想在发现其中一盒用完时，要求另一盒中还有10根的火柴，那么这样机会有多大的概率？

（8）假定福州市内有若干个工厂分布在不同的若干条街上，每天按时都要煤碳支援生产，因此由煤站运煤按时到工厂的最省路径的选择，该怎样进行选取呢？

这些问题都是组合数学要研讨的部分问题。从这些问题中，我们可以总结一下：

可以这样简单地说：对一个有限的或离散的集合中的成元，要按一定的要求，来进行排列、组合、选择和配置，研究其相应的个数或结构的方法和理论，这就形成一种特有的数学的研究对象，我们就称之为组合数学。它是现代发展起来的有限数学中的主导内容。近十多年来，由于计算机运用发展，及其组合数学本身方法理论的要求进步，使得这个古老的数学的内容，获得广泛的应用和发展形成了独具一格的数学分支——组合数学。

组合数学是计算机专业的一门重要基础课。它的思想和方法，已广泛地运用于物理、化学、电子工程、统计学、社会科学、运筹学和系统工程等。它的方法和理论，以及应用范围和内容都正在日新月异地发展着。

2．组合数学的基本问题

组合数学的特点，在于它研究的对象是有限的。因此，首先要对有限这一概念加以说明。这样说明的目的，无非是理解了有限这一概念的特点，就有着对此的所用的方法技巧，会起着指导的作用。

（1）有限的对立面是无限，因此把有限含义搞清楚了，我们就可以说不是有限的就是无限的，别的情况也就不存在的。我们不想从哲学上来说明有限与无限的对立关系，但是我们似乎有必要指出，无限概念的产生，是由于对有限过程的运动或变化而形成的。例如人类一开始就感到接代传宗是人类赖以生息生存的，一代传一代，如此继续地传下去，以至于“无穷”了。在数学的发展中，计算物件的个数是最原始的需要，“个数”是最简单最基本的量，人类创造出自然来表示“个数”这个量，如果人们数一群什么东西，它总是数到某个数为止，若不再运动变化，就无需往后再数了。那就是

M

说：无限是从有限运动变化中而获得的概念。

（2）那么有限的本质又怎么样呢？从数学观点来看：不管以任何对象为元素的集合，如果它中间的元素的个数可用一个特定的自然数n来表示的话，那么就说这个集合是有限的集合。为什么可以这样说呢？因为我们如果选取连接的若干自然数，从1、2、…，n、使与元素a_1，a_2，…a_n之间一对一地编上号，一个既不多却也一个不会少的，一个对着一个的。这种情况我们称元素a与自然数n间存在着一一对应，所以我们又可以说：如果一个集合A的元素可与自然数集会〔1，n〕发生一一对应，那么A就称为有限集合。

（注：〔1，n〕表示自然数1，2，3，…n所成的集合）

若集合A与自然数集合〔1，n〕存在着一一对应，我们用符号：A⟷〔1，n〕表之。读为A与〔1，n〕一一对应，它意味着：$a_i \in A_1$，则$i \in [1, n]$，反之$i \in [1, n]$，则有$a_i \in A$，i与a_i都是唯一确定的。

这样一来称n为A的个数，用$|A| = n$表之。而称〔1，n〕为自然数的原集，简称〔1，n〕为原集。

A若与原集〔1，n〕一一对应，则A为一有限集，而〔1，n〕从一可数到n，由是称原集（1，n）是可计数的，因而我说：

一个有限集合是可以计数的。

同时，〔1，n〕是可依大小次序排列的，这个性质称为有序性，因此，

有限集合是有序可计数的。

有限集合可以集合运算，如并、交、差、补的运算，这是集合

论中所已知的，在此不谈了。

（3）Descasces积：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$从其中各取一元素$a_i$，$b_j$，构成一有序对$(a_i, b_j)$，于是由元素$(a_i, b_j)$ $i=1, \cdots, n$，$j=1, \cdots, m$构成一个有限集合$\{(a_i, b_j)\}$称为A与B的Deocertes直积集：$A\times B$。

显然　　$A\times B\neq B\times A$

因为在(a_i, b_j)中，(b_j, a_i)是不一样的。

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}$$

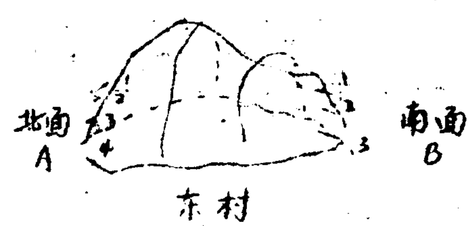
（4）组合论中的和，积原理。

我们先看一个具体的例题：

设有一个小山丘，丘之东面有村庄，南、北各有上山的路：南面上山的路有3条，北面上山的路有4条，东村有一个人欲上山，问

i．这个人可供上山的路有几条？

ii．如果他从南面上山，而后在北面下山；或反之北上南下，各有几种走法？



分析：i设A表示北面上山路径的集合，它有四条为a_1，a_2，

a_3, a_4 即 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，同样的，B表示南面上山路径，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，很显然，东村有人想上山不是走北面 A，就是走南面 B，用数学的语言来说，人要走的路是 A 或 B，即 $A\cup B$，而 $A\cap B=\phi$ 即 A 与 B 的路径没有公用的。那么这个人上山一共有多少路径可走呢？当然是 $4+3=7$ 条路径可资选走的。这用数学式表之是

若 $A\cap B=\phi$，则 $|A\cup B|=|A|+|B|$。

这个公式就是所谓和的原理，实际上可以定理形式来描述的，即经过数学结果，是可以证明的。

$|A|=4$，$|B|=3$ $\therefore |A\cup B|=4+3=7$

定理1（和的法则或原理）：若 A、B 为两个不相容的有限集，即若 $A\cap B=\phi$，则有 $|A\cup B|=|A|+|B|$

证明：当 A、B 中有一个是空集时，则有 $|A\cup\phi|=|A|+|\phi|=|A|$ 是显然成立的。

现设 $A\neq\phi$，$B\neq\phi$，记 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ $n\geqq 1$，$m\geqq 1$，又因为 $a_i\neq b_j$（$1\leqq i\leqq n$；$1\leqq j\leqq m$）由于有限集故

$$a_i \longleftrightarrow i \quad (1\leqq i\leqq n)$$

$$b_j \longleftrightarrow n+j \quad (1\leqq j\leqq m)$$

于是 $A\cup B$ 是一一对应于 $[1, m+n]$ 的，故 $|A\cup B|=m+n=|B|+|A|$。

这一定理用组合语言，可写成

如果对于某物 A 有 n 种方法选出，又对另一种物 B 有 m 种方法选选出，那么，选出 A 或 B 时就一共有 $n+m$ 种方法选之。

现在再来分析ii的问题：

假定是由北面A上山，而由南面B下山，很清楚上山一共有四条路径可选，而每一条路径上山后，又有三条路径下山可选。所以一共有 $4\times3=12$ 路径可选，也就是 $|A\times B|=|A|\cdot|B|$。

现在再用数学方法来描述：设 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，则上山时选 a_1 路径，于是有三条路径表为 (a_1, b_1)，(a_1, b_2)，(a_1, b_3) 同理有 (a_2, b_1)，(a_2, b_2)，(a_2, b_3) 及 (a_3, b_1)，(a_3, b_2)，(a_3, b_3)；(a_4, b_1)，(a_4, b_2)，(a_4, b_3) 一共有 $4\times3=12$ 条路径。

数学方法有个特点，就是用符号描述问题时，总想把符号弄得既简单明确而又便于推论的。我们上面用 $A\times B$ 表示A与B的descertes直乘积的，其间的元素 (a_i, b_j) $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m)$ 可以用一元素 C_{ij} 表之：$(a_i, b_j)\longleftrightarrow C_{ij}$ $1\leq i\leq n$，$1\leq j\leq m$。

C_{ij} 可看成 $\{C_a\}_{a\in A}$ 的元素，它仔细地写出来，就是 $\{C_a\}_{a\in A}=\{C_{a_1}, C_{a_2}, C_{a_3}, C_{a_4}\}$，而 $C_{a_1}=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3)\}=\{C_{11}, C_{12}, C_{13}\}$ $C_{a_2}=\{C_{21}, C_{22}, C_{23}\}$，$C_{a_3}=\{C_{31}, C_{32}, C_{33}\}$，$C_{a_4}=\{C_{41}, C_{42}, C_{43}\}$ 因此，$A\times B\longrightarrow\{C_a\}_{a\in A}\longleftrightarrow[1, mn]$ 即 $[1, 4\times3]$

这样一来可得

定理2（积的法则）：如果有限集A，B，具有 $|A|=n$ $|B|=m$，则有 $|A\times B|=m\cdot n=n\cdot m$，〔由学生自己证明〕

〔注意：$A\times B\neq B\times A$，但 $|A\times B|=|B\times A|$〕

积法则的组合意义是：如果对某物A有m种方法选出，而其中

每一种都有 n 种方法选出 B，那末选出 A 和 B 的方法就有 m n 种方法。

上述二法则均可推广到一般的情况：

(i) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$

(ii) $|A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdots |A_n|$

怎样在组合数学中进行运算时，区分或运用这两个法则，是最基本要求，不能把求和及求积搞错了。下面再谈一下两个基本概念。

（5）排列概念与组合概念

这两个概念是组合数学研究内容的基本概念，区别这两个概念的不同性质，并搞清楚它们之间的关系，是运用组合数学解决应用问题和理论问题的关键所在。下面我们就来解决这些问题。

问题 1．设有五个人同住在一个房间，现在要叫出三个人，来照相，问一共有多少种照法？

问题 2．如问题 1，只是抽出三个人，来组成调查队，一共有多少种组成法？

分析：在这两问题中，情况有何不同呢？三个人来照相与三个人成一调查队，不同何在？那么要解决这个问题，首先五个人怎样处理呢？用他们的姓名，或者用别符号如 a，b，c 等或用甲、乙、丙等，当然比用姓名要好些，可是在数学方法上，我们知道五个人是一个有限集，用甲、乙；a，b 等固然都行，可是人数一多，就不那么容易找到那么多符号，即使找到了，用起来既不好记又不方便，因此，依有限集与原集〔1，n〕一一对应的法则，我们当然可用 1，2，3，4，5 五个数码把五个人给编号，而且最大数码的数目就是该有限集的个数，如 5 是。于是五个人的集合可用符号：{1，…，5}表之，因其数码不多，可全部写成{1，2，3，4，5}。

现在要解决的是：从五个中取出三个有多少种取法，我们想这样进行：

第一，在｛1，2，3，4，5｝中，先取1个者，共有五种可取，次取1个者，只有四种，此时合计应该5×4呢还是5＋4呢？应该是积法则，是5×4＝20，再其次即第三次选取1个者，就只有三种了，在20种中，每一种有三种可取，那么一共有多少种呢？应是20×3=60，即5·4·3＝60，也就是5·(5—1)·(5—2)=5·4·3＝60种。

上述的选取方法，实际上是这样做的：

我们设置三个坐椅，并给以编上坐次如下图所示：

于是有，如:

□	□	□
1	2	3
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

这就是说取头三个人（1，2，3），选坐之就有六种不同的坐法，这样做的结果，正合我们选取三个人来照相的要求：三个人并排而坐三个位置照相，那么就有不同的坐法一共有六张照片，这样一来在五个人选三个人每照一张者，就总共有60张照片。

第二，在问题中，情况就不同了，每三个人可照六张相片，在其中任一张来看，我们都可以看得出来，每张相片都是我们一个调

M

登队呀。

因此，我们可以区分问题1与问题2的情况了，在问题1中三个人凑在一起时，有编号情况，在问题2中三个人凑在一起时，就无须编号，为了好说起见，我们就说问题1中三个人凑在一起时是与次序有关的，不妨说它是有次序的结合，而在问题2中说是无次序的结合。我们通过分析，得到两种不同的结合，在数学上就形成了两种概念，它们是用下述定义来确定地描述的：

定义1．设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是由m个不同元素构成的有限集合

（i）从其中有序地取出n个不同元素构成有序的结合称为n一排列，或简称排列。

（ii）无序地取出n个不同元素组成无序的结合称为n一组合或简称为组合。

这样一来，排列与组合的二个概念就成了组合数学的最基本的概念，也就是其他许多概念都是由它们作为基础而派生的。正如并联和串联一样是电路分析的基础那样作用的。

因此，我们现在说：问题1是个排列问题，而问题2是个组合问题。它们都是组合论或组合数学的基本问题，不能以为组合问题是排列问题引伸出来的，事实上也可以从问题2来导出问题1的。

下列再举出若干问题，由同学们自己来说出：哪些是排列问题，哪些是组合问题。

问题1：我校买进20张床，每取二张：

（i）放在仓库里，（ii）放在招待所里的房间。

问题2：有三种颜色不同的球，每取出二个：（i）放在有定位的架上，（iii）放在一堆。

问题3：某机关共有100人，每取出30人：(i)乘坐汽车去开会，(ii)去看电影。

(6)五种基本问题的解法

有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中若干元素，依据某种要求，作出各种的结合，一般地认为有五种情况是基本的：

(i)在A取r个不同元素，作出r一排列的总数称为排列数，即求不重复排列的总数问题，一般用 P_r^n 表示该集合n元素，取不同r个元素作r一排列的排列总数，写为：n中的r一无重排列数 $=P_v^n$，以下类此。

(ii)有重复的排列总数，用 U_r^n 表之。

(iii)无重复的组合总数，用 C_r^n 或 $\binom{n}{r}$ 表之。

(iv)有重复的组合总数，用 F_r^n 表之。

(V)r一无重组合中，又无二相邻元素的组合数。

下面我们来推导这五种公式。

定理3．在有m个不同元素的集合 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$ 中取出 $n\leqq m$ 个不同元素可构成

$$P_n^m=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

个不同的n一排列。

证明：在定理中"取出"元素是要构成"排列"的，所以依排列定义，是有序选取的，那么：

第一个选取可在m个不同元素中进行，所以第一个位上的元素一共有m个可资选取。

第二个选取时，除了一个被第一个取去外，还剩下 $m-1$ 个不同的元素，所以第二个位上的元素有 $m-1$ 个不同元素可资选取。

由第一个位和第二个位的选取法，就共有 $m\times(m-1)$ 个选法。

接着如此进行下去：

第三个位，有 $m-2$ 个可资选取

第四个位，有 $m-3$ 个可资选取，等等，

第 n 个位，就只有 $m-(n-1)$ 个可资选取，因此，得到 $m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1)$ 个选取法，即

$$P_n^m=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

注：当 $n=m$ 时，称为全排列，即有

$$P_m^m=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\cdots(m-m+1)=m(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1$$

用符号 $m!=m(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1$ 称之为 m 阶乘。

定理 4、条件同定理 3，取出 n 个不同元素可构成：

$$C_n^m=P_n^m/n!$$

个 n 一组合数。

证明是简单的，因为一个 n 一组合，可作出 n！排列即 n！个 n 一排列。于是在 P_n^m 中每 n！个 n 一排列就成为一个 n 一组合，

故 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{n!}=P_n^m/n!$，亦即

$$P_n^m=n!\,C_n^m$$

有些情况要加以补充说明：

（i）有的把 $P_n^m=(m)_n=[m]_n$ 称之为 m 的阶乘数

（ii）有的把 $C_n^m=\binom{m}{n}$ 称为组合数

阶乘数与组合数有一个关系即 $P_n^m : C_n^m=(m)_n : \binom{m}{n}=n!$

我们对定理 3，可以作这样的陈述：

第一个位上的有 m 个元素可资选取，而第二个位上选取法，可看做在 m－1 元素作（n－1）一排列的选取计有 P_{n-1}^{m-1} 个，于是有（由积法则）

$$P_n^m=mP_{n-1}^{m-1}$$

由此递推之，即有 $P_{n-1}^{m-1}=(m-1)P_{n-2}^{m-2}\cdots$，$\therefore P_n^m=m(m-1)\cdots(m-n+1)$，不过在此处，我们假定 $P_{n-n}^{m-n}=P_0^{m-n}=1$，即 $P_1^{m-n+1}=(m-n+1)P_{n-n}^{m-n}=(m-n+1)$ 而已。

定理 5．由 m 个不同元素，可作出重复次数不限的 n 一重复排列个数为 m^n。

重复排列这一概念稍须说明一下：例如有限集合 $A=\{a, b, c, d\}$，要从中作 3 一重复排列，就是说在 3 个元素中可能是 aaa 或 bbb 等，也可能是 aca，aac 等等．重复次数是肯有限止的，指的就是在 3 一重复排列中，某些元素可以出现一次，可以出二次，但最多只能出现 3 次，因此，在 A 中作 3 一排列有

abc acb, abd, adb, acd, adc

bac, bca, bad, bda, bcd, bdc

再下去有 c，d 为首位的，一共有 12 种，因此

$$P_3^4=4\cdot(4-1)(4-2)=4\cdot3\cdot2=24 \text{种}$$

现在有重复了，于是就多了aab aac aad, aba, baa, aca, caa, ada, daa等等，可见

选第一个位时有4种，第二个位时等等都有4种，一共选3次，由积法则有 $4\cdot 4\cdot 4=4^3=64$ 种。

证明：在重复次数不限的情况下（最多只能重复n次，上例中可有aaa，bbb等等）选各个位的元素都有m个，作n一重复排列，于是应取n次m个，由积的法则得 $\underbrace{m\cdot m\cdots\cdots m}_{n\text{次}}=m^n$，即为所证，即有公式

$$u_n^m=m^n$$

定理6．由m种不同的元素可作出重复次数不限的n一重复组合个数为$\binom{m+n-1}{n}$，即

$$F_n^m=\binom{m+n-1}{n}$$

分析：这个问题不能象定理4那样，可从定理3推出，即一个组合（C_n^m中的一个）可有n！个排列，也就是在P_n^m中每一有关的n！个排列可视为有一个组合与之对应，这样一个关系来推导的。这是何故呢？这是因为不同的重复组合，可以得到不同的重复排列。例如当A{a, b, c, d}时，A的3一重复组合{a, b, c}，可有六个3一重复排列

abc, acb, bac, bca, cab, cba

而组合{a，a，b}可给出三个3一重复排列：

aab, aba, baa

而组合{a，a，a}只能有一个3一重复排列aaa．因此，要想证明这个定理，就得另想办法了。我们从根本上已经知道有限集合

都可与原集〔1，n〕构成一一对应，这样m个不同元素的集合可以原集｛m｝=｛1，2，3，…，m｝来代表它，由它作成的n—重复组合当然也是有限集合，既然如此，那它也可以找到与它发生一一对应的某个组合，而这个组合可以是重复的，可能吗？

先用实例来说明：设｛5｝=｛1，2，3，4，5｝由它作出3—重复组合，问有多少种？

先取一个组合如（3，2，3）这个组合可写成为（2，3，3），（这就是说在组合｛a，b，c｝中可改为有某种次序的新形式的同组合）这样就有2≦3≦3即可取等号成2＜3=3，这就是说可重复的，我们作一个新组合{2+0，3+1，3+2}={2，4，5}若有重复组合｛5，4，5｝改为｛4，5，5｝，作一新的组合{4，5+1，5+2}={4，6，7}，于是有

$$A=\{1,2,3,4,5\} \qquad A'=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\{2,3,3\} \longleftrightarrow \{2,4,5\}$$

$$\{4,5,5\} \longleftrightarrow \{4,6,7\}$$

A的重复组合，就与A'的不重复组合发生一一对应，即A中有多少个重复组合，A'中就有一样多少的不重复组合与之对应，而在A'中是从7=5+2=5+（3−1）〔=m+（n−1）〕中取3—组合，即

$$C_3^7=\binom{7}{3}=\binom{m+n-1}{n}=F_3^5.$$

这样一般地说就是在m个元素中取出n—重复组总可以写成{a_1，a_2，…，a_n}，其中$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$，作出对应的组合：

$$\{a_1, a_2+1, a_n\} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \{a_1+0, a_2+1, \cdots, a_n+n-1\}$$