高等材料力學

（下冊）

許 海 龍 教 授 編 著

五洲出版社 總經銷

ADVANCE

高等材料力學

（下 册）

許海龍教授編著

五洲出版社 總經銷

符 號

A 表一常數

B 表受扭轉之中空薄壁構件之面積〔參閱 p.29〕

a 表長度

b 表寬或濶

C 扭轉剛性〔圓截面為GI_p〕

C_1 為積分常數

D 平板常數，參閱p.129之式(64)

E 彈性模數，單位為 lb/in²

$F_{1,2,3,4}$ 為彈性基礎函數，參閱p.179之式(88)及表

G 剪力模數，單位為 lb/in²

g 重力加速度

h 表高度

I 慣性力矩

J_p 極慣性矩

j 為虛數單位，等於$\sqrt{-1}$

k 基礎模數，單位為 lb/in²，參閱 p.174之式(84)

k 彈簧常數， lb/in

L 受扭轉之中空薄壁構件之周長，參閱 p.30

l 表長度

M 力矩

M_b 彎矩…(樑者)

M_t 扭矩或扭力

M_1 平板割切後，其單位長度上之力矩，參閱 p.129 之圖

n 表正方向或垂直方向

n 表一數，常表一指數

P 表力，單位磅

P^* 筆紙挪氏之"縮減力"參閱 p.411

p 壓力，在表面上為 lb/in²，在線或樑上為 lb/in

p_1, p_0	表內壓力及外壓力
q	樑上單位長度上之作用負荷
R	較大半徑，指問題中之最大半徑者。
R_m, R_t, R_x, R_y	分別表曲率半徑，爲子午線向，切線向，x 線向及 y 線向者
r	一般之半徑，在公式中時爲變數
r_i, r_0	分表內半徑及外半徑
S	樑上之剪力，磅
S_1	板割切後單位長度之剪力
s	表應力，單位 lb/in²
ds	周界長上之一小單元
s_n	正應力
s_t	切向應力
s_r	徑向應力
s_s	剪應力；在直角座標系中之慣號，參閱 p.215 圖 6-115；在極座標系中之慣號，參閱 p.229 之圖 6-121 。
T	表薄膜之張力（lb/in），或索上張力（lb）
T_{xy}	表面之扭轉，參閱 p.122 之式（59a）
T_1	板割切後，其單位長度內之扭矩
t	表厚度（吋）
U	貯藏能
U^*	補充能，參閱 p.272
u	表 x 向上之位移；或在旋轉之對稱下，表切徑向之位移值
u	由 p.294 至 p.296 中僅表 "微變值"
V	速率，有時係爲圓盤之周速
v	表 y 向上之位移值；或在旋轉之對稱下，表切向之位移值
W	表重量（磅）
w	表 z 向上之位移值
w	在正(z)線向上板之撓度
X	表力，係支座上未知之反作用力
y	用以屈伏時之附記號

Z 彎曲時之截面模數 $= I/y_{max}$

Z_1 板割切後單位長度內之截面模數

α 熱膨脹係數

α 表一角

α_{12} 表一影響係數，參閱 p.288 之式（120）

β 表一角

β 在彈性基礎上樑之係數，參閱 p.175 之式（86）

β_{12} 反影響係數，參閱 p. 290

γ 表單位體積內之重量 $= \rho g$

γ 表一角，或剪應變

γ_{xy} 係 xy 面內之剪應變

δ 指撓度（吋）

Δ 表一增加值，如用 Δr，Δx 等

Δ 即 $\bigtriangledown^2$ 爲藍博萊斯（Laplace）運算符號，或〝爹兒〞Gel 之運算符號參閱 p.133

ϵ 表應變量，有時指一微小值

ϵ_x 在 x 向上之應變值

ϵ_r 在徑向上之應變值；ϵ_t 爲切向上之應變值

λ 表一長度，參閱 p. 82 式（51）

λ 表曲管之係數，參閱 p.311 式（125）

μ 表卜生氏比（Poisson's ratio），鋼材約爲 0.3

ρ 爲密度 = 單位容積內所含之質量

Φ 表一應力函數；聖恩凡能特氏應力函數（參閱 p. 6）；亞瑞氏應力函數（參閱 p. 216）；傑克遜氏應力函數（參閱 p. 47）

φ 表一角

Ψ 表流線函數（參閱 p. 23）。傑克遜氏之等角函數（參閱 p. 48）

θ 表一角或扭轉角

θ_1 表單位長度內之扭轉角

ω 表角速度

目　錄

6 二向度之彈性力學理論

§6-1 亞瑞氏應力函數（The Airy Stress Function）

在本章中吾人將採用比前述更嚴密且通用之方法，以探討某種平面應力之狀況，對〝彈性力學之理論〞（Theory of Elasticity）與〝材料力學〞（Strength of Materials）之意義，兩者雖名異實主題一致；前者時被數學家嚴格地處理之；而後者則習慣地被工程師們所選用，但所求出之解，有時與嚴密分析所求得者相符，而有時則變成一種優異且適用之近似解。

對於〝彈性力學理論〞之接受係由〝位移〞（Displacement）（即 u 與 v）開始：設想在 xy 平面內有一未受應力之靜止薄平板，在此平面內因予〝適宜〞之支承，故於受負荷後仍保持靜止狀態，但若該板於其〝自身平面內〞受負荷或力之作用時，則板內各點（x，y）將生一微量之位移，設在未受應力時某點之座標為（x,y），則受應力後座標將成（$x+u$，$y+v$），此 u 與 v 分別為 x 與 y 向上之位移值，故處二向度之狀況下，u 與 v 應均為 x 與 y 之函數，而函數 u（x,y）與 v（x,y）在數學觀念上務具連續性，因若非連續性時，則板處變形後將生開裂或重疊，此為材料所不能支持者（即不可能者）。雖然對此 u 與 v 之連續性要求很平凡，但實具極大關係，因其是導出p.217與p.218中〝連貫方程式〞(101)（Compatibility Equations）之基礎。

今吾人用圖 6-114 之法由位移值 u 與 v 以導出應變量 ϵ_x，ϵ_y 與 γ 。圖示板中某一小矩形 $dxdy$ ，未受應力者用實線表之，而已受應力狀態者用虛線表之。

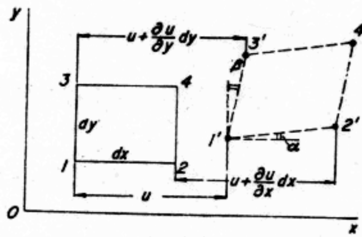

圖6-114 如圖示：某單元 $dx\,dy$ 在無應變狀態時為 1 2 3 4，但應變後則為 1′2′3′4′。由此圖形可導出應變式（97）。

1. 選轉角點 1 為運算之基點，則藉定義知：11′ 之水平距離為 u ，而 11′ 之垂直距離為 v ；今轉角點 2 與轉角點 1 之間之差距為 dx，則點 2 與點 1 之間之位移差值設為 du ，而在此狀況中該值卽為〔$(\partial u/\partial x)\,dx$〕，因之，由其彼此間扣除距離，可得長度 $dx = 12$ 之受應變之伸長量為：

$$1'2' - 12 = 22' - 11' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

故其應變為： $$\epsilon_x = \frac{1'2' - 12}{12} = \frac{(\partial u/\partial x)\,dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

2. 依相似之方式，以點 3 代點 2 ，得：

$$\epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

3. 至於剪應變 γ 之表示較為冗繁。在圖示中其剪應變角為 $\gamma = \alpha + \beta$ ，則：

(a) 藉定義得：11′ 之水平距離 $= u$ ，而

$33'$之水平距離$= u + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dy$，相減而得：

$1'$與$3'$間之水平距離$= \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dy$，今因

$1'3'$間之垂直距離$= dy$，故得：

$\beta = \dfrac{\partial u}{\partial y}$（若爲軟鋼時，則此角之值將小於0.001弧度）

(b) 同理：對1，1′，2與2′各點，學者可求得：

$1'2'$之垂直距離$= \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) dx$，故

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

(c) 則 $\gamma = \alpha + \beta = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$

因之，三個應變方程式爲：

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

再由虎克氏定律而得應變與應力間之關係式爲：

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(s_x - \mu s_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(s_y - \mu s_x) \qquad (98) \\ \gamma &= \frac{s_s}{G} \end{aligned}$$

(一) 平衡方程式（The Equilibrium Equation）

作用在單元 $dxdy$ 之某一點上之應力，應使該獨立單元形成一組平衡力系。若此項應力不隨各點之位置而改變（如 s_x，s_y，s_s 均爲定值，且不與 x,y 有關係），則自行完成平衡；但若如圖 6-115 所示係爲各點且不同之應力時，則將於所得之條件中形成一組方程式。在圖 6-115中僅表 x 向上之各分力，還有 y 向上之其他四個力。今因圖中在 x 向上之四個力之合力必須爲零，得：

$$\left(s_x+\frac{\partial s_x}{\partial x}dx\right)dy-s_x dy+\left(s_s+\frac{\partial s_s}{\partial y}dy\right)dx-s_s dx=0$$

在此式之六項中，有四項係一階之微量數（爲正比於 dx 或 dy），另二項係二階之微量數（爲正比於 $dxdy$ 者）；但一階微量數之各項係彼此相消，故此平衡式則純爲二階微量數所表示者。另從 $+y$ 向上之四力間（圖 6-115中未繪出者）之平衡亦可導出類似之表示式，其結果爲：

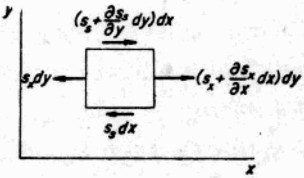

圖6-115 圖示板中某一單元 $dxdy$ 上，受隨各點之位置而不同之應力作用時之力系。但僅在圖中表出 x 向上之各力，並依此圖可導出平衡式（99）之第一式。

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_x}{\partial x}+\frac{\partial s_s}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial s_y}{\partial y}+\frac{\partial s_s}{\partial x}&=0\end{aligned}\qquad(99)$$

(二) 亞瑞氏應力函數（The Airy Stress Function）

在式(99)中之應力狀態係依一組三個應變數（Dependent Variables）來表明，而此應變數又依兩個自變數（Independent Variables）x，y 而變；以致本問題顯得更爲冗繁。幸好約在1860年，有英國天文學家亞瑞氏首創含 x, y 之單一函數 Φ 以替代此 s_x，s_y 及 s_s 之三個函數之應力狀態，方使本問題獲更進一步之分析。其各應力可藉"亞瑞氏應力函數"Φ之微分而導得，爲：

$$s_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$s_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \qquad (100)$$

$$s_s = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

此應力函數Φ之定義式(100)曾經很明智地策劃再選取之，故對任意連續函數Φ（可於三次微分）均能適合平衡式(99)，此點學者得代入以證實之。亞瑞氏應力函數除能促使分析極快簡化外，並能供給"某些具體可見事實"之重大優點。吾人試於 xy 平面上繪得一Φ之曲線，並選取適當之比例尺使Φ之高度很小以致其斜度 $\partial\Phi/\partial x$ 甚微，則從式(100)中得知：在 x 向上之正應力（Normal stress）就是Φ曲面在 y 向上之曲率，更進一步地說，在任何方向上各點之正應力相等於同一點上正交方向之Φ面之曲率；而剪應力 s_s 亦很明顯地可

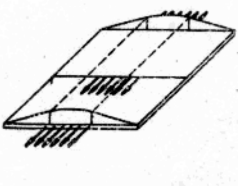

圖6-116 由圓筒面與切面所組合之亞瑞氏應力函數Φ曲面。依定義式(100)知在其中段部份具定值應力，但因無和諧之變形，故此Φ函數不能滿足連貫方程式(101)，因之爲一非眞實之亞瑞氏應力函數。

視爲在該點上Φ面之"扭轉"（見 p.122）。例如：在圖 6-116 中之亞瑞氏Φ曲面，在其中段部份爲一圓筒面，而在其兩邊部份爲兩切平面。自式（100）知板中應力僅在板之中段部份係一定值縱向應力，而在其外側者爲零應力。因此顯見板中之任一質點均成平衡狀態，乃證實式（100）與式（99）間之自行吻合關係。但在本例題中尚未某些不對處，須待檢查其變形後始能發覺。若板確已承受如圖 6-116 所示之應力時，則其中段部份將生伸長〔見式（98）〕，而外側部份因不受應力故仍能保持原長。因之對未受應力前之連續板，則於受應力後而成不連續之三段。在圖 6-116 中之應力分佈雖然滿足平衡關係，但與一同等需要之連續變形條件相違背，該情形在"彈性力學"之科學系統中稱爲"連貫性條件"（Condition of compatibility）。

(三) 連貫方程式（The Compatibility Equation）：

在數理上所謂之"連貫性"係指位移函數 u 與 v 須具連續性而言，亦即無裂縫或重疊情形者：就是 u 與 v 務爲可微分（differentiable），查看式（97），得：

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \tag{a}$$

又

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \tag{b}$$

因$(a)=(b)$，得：

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \tag{101-a}$$

此即有關應變項之"連貫方程式"。

接着吾人將此式（101-a）改爲有關應力之表示式（101-b）之形式，再轉換成亞瑞氏函數Φ之表示式（101-c）。先以式（98）代入式（101-a）中得：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E}(s_x - \mu s_y)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{E}(s_y - \mu s_x)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{s_s}{G}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 s_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} = \frac{E}{G} \frac{\partial^2 s_s}{\partial x \partial y}$$

藉彈性常數間之關係式 $E = 2G(1+\mu)$，則上式右邊一項可改爲：

$$(1+\mu)\left[\frac{\partial^2 s_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 s_s}{\partial x \partial y}\right]$$

次引入平衡式（99），可得消去上式中剪應力項。但爲求得對稱型，則以式（99）中之第一式代上式括號內之第一項 $\partial^2 s_s / \partial x \partial y$，且以平衡式（99）中之第二式代上式括號內之第二項 $\partial^2 s_s / \partial x \partial y$，得：

$$-(1+\mu)\left(\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial y^2}\right)$$

則此式中 μ 之項，係與上列等式中左邊之同類項相同，故可相互消去，剩餘下列四項爲：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(s_x + s_y) = 0$$

此結果卽爲應力項所成之連貫方程式。但自其導式之步驟中，吾人得悉其式顯爲眞正連貫方程式（101-a）與平衡式（99）之混合式。

最後，將式（100）之各式代入上式中，爲得由應力函數Φ之項所成之連貫方程式，爲：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = 0 \qquad (101\text{-}c)$$

展開，卽得：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{2y^4} = 0$$

四 調和與雙調和方程式之探討（Discussion of the Harmonic and Biharmonic Equations）

在前面 p.13 中式（11）爲與式（101-b）之形式相似；並藉應力之莫氏圓，得知在任一點上其（$s_x + s_y$）之値，係相等於該點處任意二正交應力之和（但此二正交應力對 x 軸線所夾之角無關）；且（$s_x + s_y$）之和値亦相等於該點處兩主應力之和值。若應用式（11），則吾人可見及式（101-b）如后：

1 若將某點（x, y）之兩主應力之和垂直繪畫於該點上面，則在 xy 基面之上部所成曲面之形狀，係兩面受等空氣壓力之伸張薄膜。

2 式（101-b）被數學家稱爲"藍博業斯"氏微分方程式，或爲"調和"微分方程式。而函數如（$s_x + s_y$）者因適合此微分方程式，故謂之"調和函數"（Harmonic Equation）；若將此術語推引之，係稱式（101-c）者爲"雙調和方程式"（Biharmonic Equation），而適合此方程之應力函數Φ則謂之"雙調和函數"（Biharmonic function）。因之，顯而易見地Φ曲面較調和面（$s_x + s_y$）者更爲困難。

3 若任命一Φ曲面，並在其上某一點處任取二正交曲率半徑之和，設爲 z 面並繪在 xy 基面之上部，則吾人可得一新 z 面：

$$z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi$$

此新成之 z 面仍具有式（101-c）之特性：在其任一點上兩正交向處曲率之和爲零；換言之，此 z 面亦示：在一兩面上受等空氣壓力之薄膜，則Φ曲面本身更具廣泛性者。

4. 藉觀察式（101-c）得知：凡調和函數必具雙調和性；但雙調和函數者一般並非必具調和性者也。則在後面數拾頁中，吾人將易見對求雙調和函數並無很大之困難（如求式（101-c）之解答），因吾人可不加思索地寫下數百個此雙調和函數也。對每個寫出之解答，若用式（100）微分之，即得一組即平衡且適合連貫條件之應力狀態。換言之，每一雙調和函數Φ即爲某一應力問題之解。但此對吾人並無助益，因一般所欲者爲某特定應力問題之解也。當對此特定問題而求其應力函數Φ時，則又屬另一回事且顯示特別困難，是一般人

未能具有之能力。故在後面數拾頁中，對此問題吾人仍採取〝反求法〞之方式進行：即先寫下許多之雙調和函數，並用式(100)微分之，然後對所得結果加以探討；則於此解答中有些在實用上甚屬重要者，亦有些太造作而失實用者；但經此整理而建立成册，再以精巧地重疊法而求類似他種特定狀況之解答。

5. 當於求解此問題之過程前，先敘述數學家們所謂之〝唯一性定理〞(Uniqueness theorem)。沒有一未受應力之形狀屬平板，並予以本身平面內受一組力系之作用，則吾人可預得該板中之應力係惟一之正確解，而非具二、三種不同之正確答案，此款事實僅靠直覺，故數學家們將之敘述如下：「對某種問題，若已求得一雙調和函數 Φ，且由此所導出之各應力均適合本問題之邊界條件，則此函數 Φ 即謂之〝唯一〞者，亦即該應力問題之唯一正確解。」(因其數學證明頗爲冗繁故此省略)。

(五) 平面應力與平面應變 (Plane Stress and Plane Strain)

對於上面所導述之通用理論與公式(97)至(101)者，係表示薄平板不受垂直於其平面之負荷作用時之形況，即 $s_z = 0$ 者，故謂之爲〝平面應力〞之一種狀態，則在 z 向上所生之應變，係：

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(s_x + s_y)$$

因此該板將改變其厚度，故〝平面應力〞問題顯非是〝平面應變〞者。今取一無限厚度之板(但非薄平板者)而探討之，亦即某一圓筒體其 z 向上之長度 ℓ 較 x 與 y 之尺寸大過甚多時，並設僅在圓筒之 x 與 y 向上受力系，而沿 z 向上爲均佈者。今設原平面之剖面仍持一平面，而割取該筒中某厚度 dz 之薄板後仍保持等厚時，則謂之爲〝平面應變〞之形況。但當此平面應變產生時，則其第三種應力 s_z 將不爲零，即：

$$\epsilon_z = 0 = \frac{1}{E}[s_z - \mu(s_x + s_y)]$$

$$\therefore \quad s_z = \mu (s_x + s_y)$$

故通常之長圓筒“平面應變”之問題，亦非同時是“平面應力”之問題者。今吾人將前述整個分析步驟（爲平面應力者）引入對具第三種應力 s_z 之“平面應變”之分析，則式（97）者不變，但式（98）應重寫爲：

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [s_x - \mu (s_y + s_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [s_y - \mu (s_x + s_z)] \qquad (98\text{-}a) \\ \gamma &= \frac{s_s}{G} \end{aligned}$$

對此情況繼藉 p.215 至 p.218 之分析，吾人即見平衡式（99）並不改變，且式（100）者亦係保持不變。又因在導式中不涉及 z 向者故連貫式（101-a）亦相同。其次，吾人若將式（98a）代入式（101-a）中，則在其左邊將多出兩項，爲：

$$-\mu \frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 s_z}{\partial y^2}$$

但其右邊各項不變，故整理之結果，使式（101-b）改爲：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (s_x + s_y - \mu s_z) = 0$$

由“平面應變”中 $\epsilon_z = 0$，得 $s_z = \mu (s_x + s_y)$ 代入上式得：

$$(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) (s_x + s_y) = 0$$

or

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (s_x + s_y) = 0$$