中学数学综合题选编

上册

广州市教育局教研室编

ZHONGXUE SHUXUE ZONGHETI XUANBIAN

前　言

粉碎“四人邦”以后，广大师生的教与学的积极性空前提高，纷纷要求我们选编一些综合性的例题和习题，以补教材之不足。我们认为，在加强双基教学的基础上，重视对学生的综合解题能力的训练，对提高学生分析问题和解决问题的能力，有重要作用。为此，我们赶编了这本《中学数学综合题选编》。

书中主要选编了1979年高考考纲范围内一些带复习性的，或综合性的，或较有启发性的习题（个别超出考纲要求的题目，都打有“*”号）。习题按知识内容分类，各章节中再按解题方法编排例题和练习，可供老师教学和学生学习时参考。同学们阅读本书时，应先经过自己对习题的独立思考、演算，然后核对答案，并应特别注意对解题方法和规律的总结，以提高自己分析问题和解决问题的能力。

在编写过程中，得到了我市许多中学老师的热情支持和邦助，参与选题、审编工作，提出宝贵的修改意见。英德印刷厂热情地承担了本书的排印工作。在此我们一并致衷心的感谢。

由于选编的时间仓促，加上我们的水平所限，在选材、编排和解题上，难免有缺点、错误，请读者批评指正。

广州市教育局教研室

九年一月

目　　录（上册）

第一部分　代数与三角

第一部分　代数与三角

一、恒等变换

（1）代数式的恒等变换

例1. 若$4x^2-4x-3\leqslant 0$，化简：

$$\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{4x^2-12x+9}$$

解： 解不等式 $4x^2-4x-3\leqslant 0$

即解 $\begin{cases}2x-3\geqslant 0\\2x+1\leqslant 0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-3\leqslant 0\\2x+1\geqslant 0\end{cases}$

得 $\begin{cases}x\geqslant \frac{3}{2}\\x\leqslant -\frac{1}{2}\end{cases}$ （无解） 和 $\begin{cases}x\leqslant \frac{3}{2}\\x\geqslant -\frac{1}{2}\end{cases}$

原不等式的解是 $\frac{3}{2}\geqslant x\geqslant -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{(2x+1)^2}+\sqrt{(2x-3)^2}$

$=(2x+1)+(3-2x)=4$。

例2. 若$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$，求$\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$的值。

解： 将$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$两边平方并整理得$x+2=a+\frac{1}{a}$，

$\therefore \sqrt{4x+x^2}=\sqrt{(x+2)^2-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=a-\frac{1}{a}$，

（$\because$ $x\geqslant 0$，$a>0$，$\sqrt{x}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$，

$\therefore a \geqslant 1$，$a - \frac{1}{a} \geqslant 0$。）

$$\therefore 原式 = \frac{a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}} = a^2,$$

例3. 证明：$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}。$$

证明：注意到左边各分式，可用字母的循环转换由一个得到另一个。

第一个分式可变换为：

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(a-c)+(b-a)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$$

把字母进行循环转换，可得：

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a},$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b},$$

$$\therefore 原式左边=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a},$$

例4. 若 $a\geqslant 1$，求证：

$$\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\cdot\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\cdot\sqrt{\frac{a-1}{3}}}=2$$

证明：设 $\sqrt{\frac{a-1}{3}}=x$，$\because a\geqslant 1$

$\therefore$ x为实数，且 $a=3x^2+1$，

$$\therefore\ \sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\cdot\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\cdot\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$$

$$=\sqrt[3]{3x^2+1+\frac{3x^2+9}{3}\cdot x}+\sqrt[3]{3x^2+1-\frac{3x^2+9}{3}\cdot x}$$

$$=\sqrt[3]{3x^2+1+x^3+3x}+\sqrt[3]{3x^2+1-x^3-3x}$$

$$=\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}=x+1+1-x=2。$$

例5. 试证明：如果$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$是x的一个一次二项式的完全平方，而且$a$、b、c都是实数，一定有$a=b=c$。

证明：$\because (x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$

$$=3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ac)$$

$$=3\left[x+\frac{1}{3}(a+b+c)\right]^2+\frac{1}{3}\left[3(ab+bc+ac)-(a+b+c)^2\right]$$

∴要使上式成为一个x的一次二项式的完全平方，必须

$$3(ab+bc+ac)-(a+b+c)^2=0$$

即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$

全式乘以2，变形得：

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

在实数范围内，要满足上式，必须而且只须：

$a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$。

$\therefore a=b=c$。

例6. 化简$\dfrac{1}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$

解、设$\sqrt{29+12\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$ $(x>y>0)$

两边平方，$29+12\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$

$$\therefore \begin{cases} x+y=29 \\ \sqrt{xy}=6\sqrt{5}, \end{cases}$$

解上述方程组并注意到$x>y>0$求得 $x=20$，$y=9$。

$$\therefore \sqrt{29+12\sqrt{5}}=\sqrt{20}+\sqrt{9}=2\sqrt{5}+3$$

同理求得，$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3$

$$\therefore 原式=\frac{1}{2\sqrt{5}+3}+\frac{1}{2\sqrt{5}-3}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}-3+2\sqrt{5}+3}{20-9}=\frac{4\sqrt{5}}{11}$$

二次根式开平方可仿上述解法。但有时也可由观察得出，如

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}=\sqrt{3}+2$$

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{20}-\sqrt{9})^2}=2\sqrt{5}-3 \text{ 等}$$

一般地说，二次根式开平方，还可利用下面公式直接化简，公式是：

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$(A>0,\ B>0,\ A^2>B)$

例7. 分解因式

（1）$a^4+b^4+1-2a^2b^2-2a^2-2b^2$

（2）$x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+\cdots\cdots-xy^7+y^8$

解 (1)原式 $=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)+1-4a^2b^2$

$$=(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$$

$$= (a^2+b^2-1+2ab)(a^2+b^2-1-2ab)$$

$$= [(a+b)^2-1][(a-b)^2-1]$$

$$= (a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)。$$

解 （2）

解法①原式 $= x^6(x^2-xy+y^2)-x^3y^3(x^2-xy+y^2)$

$$+y^6(x^2-xy+y^2)$$

$$=(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$$

解法② $\because$ $(x+y)(x^8-x^7y+x^6y^2-\cdots\cdots+y^8)$

$$=x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3$$

$$=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$$

$\therefore$ 原式 $=(x^2-xy+y)(x^6-x^3y^3+y^6)$

因式分解，必须注意在什么数的范围内进行，一般地说对于整式的因式分解，如果没有特别说明，都要求把一个整式分解为有理系数的既约因式的积。

例8.在实数范围内分解因式

$$x^4-4x^2+4x-1$$

解法① 原式 $=(x^4-1)-(4x^2-4x)$

$$=(x^2+1)(x+1)(x-1)-4x(x-1)$$

$$=(x-1)(x^3+x^2-3x+1)$$

$$=(x-1)[(x^3-3x^2+3x-1)+(4x^2-6x+2)]$$

$$=(x-1)\{(x-1)[(x-1)^2+2(2x-1)]\}$$

$$=(x-1)^2(x^2+2x-1)$$

$$=(x-1)^2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})。$$

解法② 对于 $f(x)=x^4-4x^2+4x-1$，易见

$$f(1)=1^4-4\times1^2-4\times1-1=0$$

$\therefore x-1$是x^4-4x^2+4x-1的一个因式，

用竖式除法可知：

$$(x^4-4x^2+4x-1)\div(x-1)=x^3+x^2-3x+1$$

同理可得　$x-1$是x^3+x^2-3x+1的一个因式

$$(x^3+x^2-3x+1)\div(x-1)=x^2+2x-1$$

$$\therefore 原式=(x-1)^2(x^2+2x-1)$$

$$=(x-1)^2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$$

*解法③ 用综合除法，原多项式可能的一次因式是$(x\pm1)$先用$x-1$去试除。

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 0 & -4 & 4 & -1 & 1 \\
 & 1 & 1 & -3 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 2 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & -1 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore 原式=(x-1)(x-1)(x^2+2x-1)$$

$$=(x-1)^2(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$$

练　习

1．化简：$\left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]\div\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$

答：$\dfrac{x+1}{(x-1)(2x-1)}$

2．化简：$\left[16+\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2(a-b)}{a+b}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

答：$\begin{cases} \dfrac{4(a^2+b^2)}{a^2-b^2} & (当a>b时) \\ \dfrac{4(a^2+b^2)}{b^2-a^2} & (当a<b时) \end{cases}$

3.化简：$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

略解：$\because \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$

$=\sqrt{x-1}+1$

同样 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\begin{cases} \sqrt{x-1}-1 & (x\geqslant 2) \\ 1-\sqrt{x-1} & (1\leqslant x<2) \end{cases}$

$\therefore$原式$=\begin{cases} 2\sqrt{x-1} & (当x\geqslant 2时) \\ 2 & (当1\leqslant x<2时) \end{cases}$

4.化简：$|4-a|-\sqrt{a^2+10a+25}+\sqrt{(3a-2)^2}$

答：原式$=\begin{cases} 11-3a & (a<-5) \\ 1-5a & (-5\leqslant a<\frac{2}{3}) \\ 3+a & (\frac{2}{3}\leqslant a<4) \\ -11+3a & (4\leqslant a) \end{cases}$

5.计算：$\left|\dfrac{1-\sqrt{8}}{1+\sqrt{8}}\right|+\sqrt{(\cos\frac{3\pi}{4})^2}-\log_2\sqrt{2}+\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$

答：$\dfrac{25+13\sqrt{2}}{14}$

6.计算：$3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\cdots\cdots}}}}-\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$

答：10

7.计算：$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$

略解：设$x=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$

两边立方得：

$x^3=18+3\sqrt[3]{81-80}\cdot(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}})$

$=18+3x$

$\therefore\quad x^3-3x-18=0$

$(x-3)(x^2+3x+6)=0$

$\because x^2+3x+6=0$　　无实数根

$\therefore x=3$

即 原式$=3$

8. 已知最简根式$^{3a+2}\sqrt{4a+3b}$与$^{b+4}\sqrt{2a+4b+1}$是同类根式，求a、b的值

提示：根据同类根式的定义，列出方程组求解。

答：　$a=1$，　$b=1$

9. 若$x=\dfrac{4ab}{a+b}$，试求 $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$的值

提示：原式$=1+\dfrac{4a}{x-2a}+1+\dfrac{4b}{x-2b}$

答：2

10. 已知$(3x-\dfrac{1}{y}-4)^2+(9x^2+\dfrac{1}{y^2}-40)^2=0$，求实数$x$、$y$。

提示：$\begin{cases}3x-\dfrac{1}{y}-4=0\\9x^2+\dfrac{1}{y^2}-40=0\end{cases}$

答：$\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$　　或$\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

11．若$x+\dfrac{1}{x}=4$，　求$x^4-\dfrac{1}{x^4}$的值

略解：∵　$x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

而　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=14$

$x-\dfrac{1}{x}=\pm\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\pm\sqrt{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\right)}=\pm2\sqrt{3}$

∴　$x^4-\dfrac{1}{x^4}=\pm112\sqrt{3}$

12．若$x^2+x-1=0$，求x^3+2x^2+x+1的值。

略解：∵　$x^3+2x^2+x+1=x(x^2+x-1)+(x^2+x-1)+x+2$

而　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

∴　原式$=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

13．如果$\dfrac{a}{b}=\sqrt[3]{5}$

求：$\dfrac{a^2+ab+2b^2}{a^2+ab+b^2}$的值（$\sqrt[3]{5}\approx1.71$）

提示：原式$=1+\dfrac{b^2}{a^2+ab+b^2}$

再把$a=b\cdot\sqrt[3]{5}$代入计算。

14．如果$x>0$，$y>0$，

且　$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$

求 $\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$ 的值。

略解：由$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$整理得

$$x-2\sqrt{x}\sqrt{y}-15y=0$$

即 $(\sqrt{x}+3\sqrt{y})(\sqrt{x}-5\sqrt{y})=0$

$\because\ \sqrt{x}+3\sqrt{y}\neq0\qquad\therefore\ \sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=5.$

$$\therefore\ 原式=\frac{\dfrac{2x}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+3}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-1}=\frac{2\times25+5+3}{25+5-1}=2。$$

15。若x是方程 $2x+2\sqrt{x^2-2}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}}$ 的根，求

$\dfrac{13}{\sqrt{\dfrac{17}{2}-\dfrac{10\sqrt{6}}{7}x}}$ 的值。

略解：从原方程解得 $x=\pm\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$（负值是增根）

$$\therefore\ 原式=\frac{13}{\sqrt{\dfrac{17}{2}-\sqrt{30}}}=\frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{17-2\sqrt{30}}}=2+\sqrt{30}$$

16。如果$a\neq0$，$x+y=a$，$x^3+y^3=b$，

若出用a、b表示 x^2+y^2的式子。

答：$\dfrac{a^3+2b}{3a}$

17。若 $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=\dfrac{x+y}{z}=k$，

求证　　$k=2$　或 $k=-1$

略证：　∵　$y+z=kx$

$z+x=ky$

$x+y=kz$

三式相加，得　$2(x+y+z)=k(x+y+z)$

当　$x+y+z\neq 0$　　则　$k=2$

当　$x+y+z=0$　　即　$x+y=-z$，易得 $k=-1$。

18. 若 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，试证 $x=y=z$ 或 $x^2y^2z^2=1$

略证：　∵　$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}$

∴　$yz(x-y)=y-z$　　①

同理　$xz(y-z)=z-x$　　②

$xy(z-x)=x-y$　　③

①·②·③得　$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)$

$=(x-y)(y-z)(z-x)$

∴ $(x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1)=0$

即　$x=y=z$，或 $x^2y^2z^2=1$。

19. 若　$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$

求证：$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

提示：令已知的比值为 k。这是遇到若干相等的比时常用的方法。

20. 若　$a:b=c:d$，试证：$(\sqrt{a}+\sqrt{b}):\sqrt{a+b}$

$=(\sqrt{c}+\sqrt{d}):\sqrt{c+d}$。

21. 若　$\frac{x-y}{x+y}=a$，　$\frac{y-z}{y+z}=b$，　$\frac{z-x}{z+x}=c$，　试证

$(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$。

证明：∵ $\dfrac{x-y}{x+y}=a$

根据合分比定理，得：

$$\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)-(x+y)}=\frac{a+1}{a-1}$$

即：$\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{x}{y}$

同理 $\dfrac{1+b}{1-b}=\dfrac{y}{z}$， $\dfrac{1+c}{1-c}=\dfrac{z}{x}$，

$$\therefore \frac{1+a}{1-a}\cdot\frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{1+c}{1-c}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$$

即 $(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$

另法：把已知条件分别代入求证等式的左、右两边，亦不难证得。

22．已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证 $a^2+b^2=1$。

略证：由题设条件可知：$0<a<1$，$0<b<1$

设 $a=\mathrm{Sin}\,\alpha$， $b=\mathrm{Sin}\,\beta$ （α、β为锐角）

则 $\mathrm{Sin}\,\alpha\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\beta}+\mathrm{Sin}\,\beta\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2\alpha}=1$

即 $\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=1$ $\therefore \alpha+\beta=90°$

$\therefore$ $a^2+b^2=\mathrm{Sin}^2\alpha+\mathrm{Sin}^2\beta=\mathrm{Sin}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

借助三角变换，进行代数式的恒等变形，是一种常用的解题方法，它从一个侧面说明不同学科的知识和方法的相互渗透。以后，在用辅助角进行三角恒等变换，解某些特殊的代数方程时还会遇到。

23．已知：$a^2+b^2=1$，$M^2+N^2=1$，求证 $|aM+bN|\leqslant 1$。

提示：参考22题的证法。

24. 若：$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=1 \\ cx^2+bxy+ay^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ 　　且$a\neq c$

求证：$a+b+c=4$

提示：将第一个等式与第二个等式两边分别相减，得

$(a-c)(x^2-y^2)=0$；$x=y$　（$x=-y$不合）

代入第三个等式得　$x=y=\frac{1}{2}$

25. 化简　$\dfrac{1+x^4+x^8+\cdots\cdots+x^{4n-4}+\cdots\cdots+x^{8n-4}}{1+x^2+x^4+\cdots\cdots+x^{2n-2}+\cdots\cdots+x^{4n-2}}$。

提示：分子的首项是1，项数是$2n$，公比是x^4。

答：$\dfrac{x^{4n}+1}{x^2+1}$

26. 求下列n个二项式的乘积

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)$$

提示：考虑到$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2-\frac{1}{x^2}$，

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^4-\frac{1}{x^4}，\cdots\cdots$$

故将原式乘以$\left(x-\frac{1}{x}\right)$，再除以$\left(x-\frac{1}{x}\right)$，便可算出其分子。

答：$\dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^n-1}(x^2-1)}$。

27. 在有理数范围内分解因式：