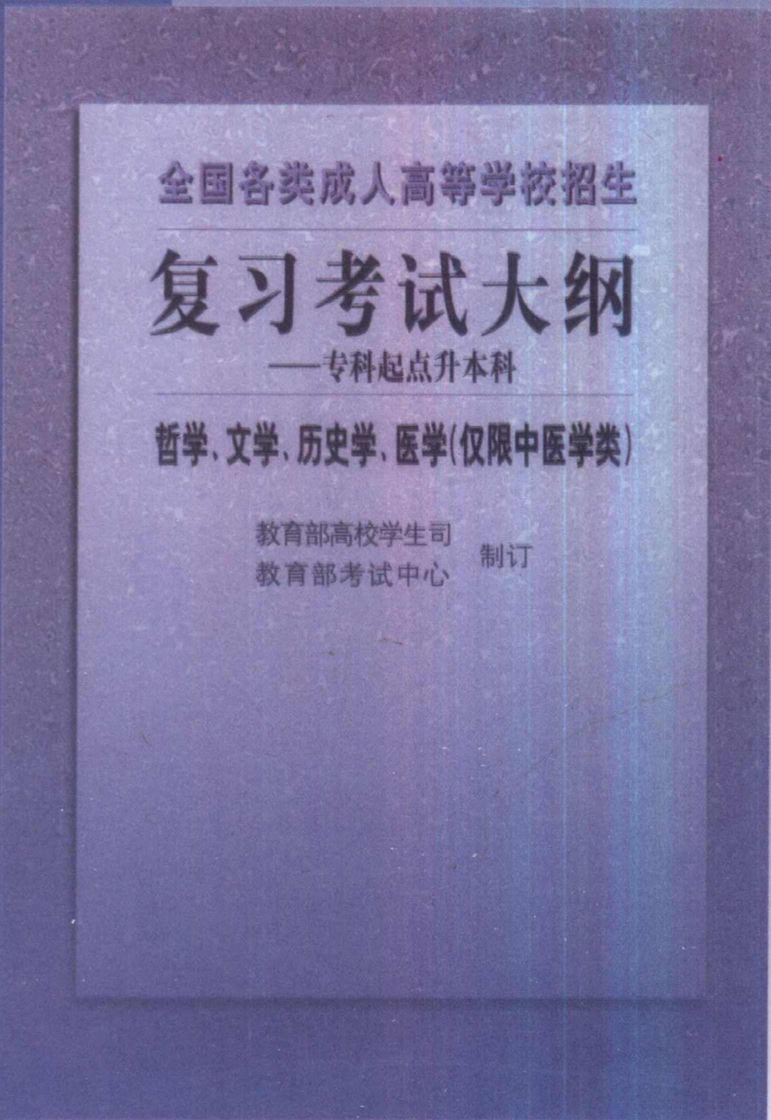
全国各类成人高等学校招生考试教材

专科起点升本科

高等数学(一)

(全国统考科目)

本书编委会 编


全国各类成人高等学校招生

复习考试大纲

——专科起点升本科

哲学、文学、历史学、医学(仅限中医学类)

教育部高校学生司
教育部考试中心 制订

中央民族大学出版社

897

全国各类成人高等学校招生考试教材

（专科起点升本科）

高等数学（一）

本书编委会　编

中央民族大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 1 / 《全国各类成人高校招生考试教材》编委会编. —北京：中央民族大学出版社，2000. 10
全国各类成人高校招生考试教材. 专升本
ISBN 7 - 81056 - 468 - 4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 全…　Ⅲ. 高等数学 - 成人教育：高等教育 - 入学考试 - 自学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 51603 号

书　　名	全国各类成人高等学校招生考试教材(高等数学一)
编　　著	本书编委会
责任编辑	孙　冲
出 版 者	中央民族大学出版社
印 刷 者	北京市朝阳区科普印刷厂印刷
发 行 者	全国新华书店
开　　本	787×1092(毫米)　1/16
印　　张	15.50
字　　数	363 千字
版　　次	2000 年 10 月第 1 版　　2000 年 12 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 7 - 81056 - 468 - 4/G·69
总 定 价	182.00 元(全 7 册)
单册定价	26.00 元

出版说明

2000年国家教育部颁布修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》(简称《大纲》,修订后的《大纲》适用期限为2001—2002年)。

鉴于重新修订并颁布的新《大纲》在考试科目设置方案、内容、要求、试卷结构和标准样卷等方面都与旧大纲有大幅度的调整,考虑到考生在使用新《大纲》进行复习备考时,因缺少统一教材而面临诸多困难,我们及时组织具有丰富教学、命题经验的专家和学者编写了这套专科起点升本科教材。

本套教材共分7册,包括政治、英语、大学语文、教育理论、高等数学(一)、高等数学(二)、民法。

本套教材具有三大特点:

1. 新:本套教材完全遵照教育部2000年颁布修订的新《大纲》的基本精神和要求,突出了新大纲新的命题趋势。

2. 精:本套教材内容精炼,习题精典,重点突出,使考生易于学习掌握。

3. 全:本套教材注重实用性和针对性,内容全面,层次分明,又兼顾学科的系统性和知识的连贯性,考生学习起来,一气呵成。

本套教材适宜指导专科起点升本科考生系统复习文化知识,满足各类成人高等学校选拔新生的最基本要求,帮助专科起点升本科考生掌握知识,提高应试能力。**书后附有新《大纲》及标准样卷。**

本套教材由清华大学、北京师范大学、北京外国语大学、首都师范大学、北京理工大学等院校部分老师编写。《高等数学(一)》由黄年华编写。

由于编写时间仓促,难免有不当之处,望读者提出宝贵意见,以便再版时改正。

中央民族大学出版社

2000年10月

目　　录

第一章　函数、极限和连续

§1.1　函　数

【知识范围】

1. 函数的概念

　函数的定义　函数的表示法　分段函数

2. 函数的简单性质

　单调性　奇偶性　有界性　周期性

3. 反函数

　反函数的定义　反函数的图像

4. 函数的四则运算与复合运算

5. 基本初等函数

　幂函数　指数函数　对数函数　三角函数　反三角函数

6. 初等函数

【主要内容】

1. 函数的概念

(1) 函数的定义

在中学数学中学习过函数，其定义为：

设在某个变化过程中，有两个变量 x 与 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个数值，都有一个确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数.

现在我们用集合的语言给出函数关系的定义：

设 D 是一个给定的数集，f 是一个确定的对应关系，如果对于 D 中的每一个元素 x，通过 f 都有 R 内的唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系，简称为函数，记作：

$$f:D\to R \text{ 或 } f(x)=y$$

两个函数仅当它们的对应规律和定义域都相同时，才是两个相同的函数.

按照函数 f 与 $x\in D$ 所对应的 $y\in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值，记作 $y=f(x)$，并称 D 为函数 f 的定义域，而 f 的函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数关系通常用 $y=f(x)$，$x\in D$ 来表示，并称 y 是 x 的函数，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

(2) 分段函数

在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数.

注意：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常

用到这种表示形式.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,任给 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

注意:函数的单调性总是与某区间 I 相联系的,相应的区间 I 称为单调区间(单调增加区间或单调减少区间). 若笼统地称某函数为单调函数,往往意指在其定义区间上是单调函数.

(2) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称,如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对于定义域 D 中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数.

注意:讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域必须关于坐标原点对称,奇函数的图形关于坐标原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果存在正数 M,使得对一切 $x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界;如果这样的 M 不存在,就称函数 $x=f(x)$ 在区间 I 上无界.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T(T\neq 0)$ 使得对于定义域 D 中的任何 x,$x\pm T$ 也在定义域 D 中,且恒有 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

3. 反函数

设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数,其值域为 Z,如果对每个 $y\in Z$,都有唯一的对应值 $x\in D$,满足 $y=f(x)$,则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数,记为

$$x=f^{-1}(y),y\in Z$$

并称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

如以 x 为自变量,则 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Z$;且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注意:严格单调增加(或减少)的函数有反函数,有些函数在其定义域内不是单调函数,但它在其子区间区间上是单调的,这时可在其子区间上讨论它的反函数.

4. 函数的四则运算和复合运算

设 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的全部或一部分包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则对 $u=\varphi(x)$ 的定义域内的某些 x,通过变量 u,变量 y 有确定的值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量,以 y 为因变量的函数,称此函数是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

必须注意:不是任何两个函数都可以复合成复合函数.

复合函数不仅可以由两个函数,而且可以由更多个函数经过复合构成.

5. 基本初等函数

(1) 幂函数

函数 $y = x^{\mu}$（μ 为任意实数）称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定. 但是不论 μ 取什么实数值. 当 $x > 0$ 时，它总是有定义的.

幂函数 $y = x^{\mu}$ 的性质与图形，也要根据 μ 的值而定. 例如当 $\mu > 0$ 时，函数在定义域内是单调增加的；当 $\mu < 0$ 时，函数在定义域内是单调减少的，下面是几个常见幂函数的图形.

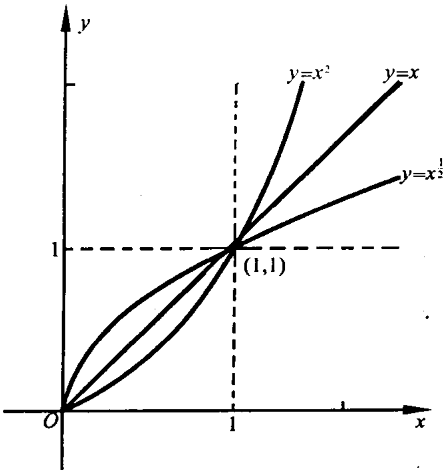


图 1 - 1

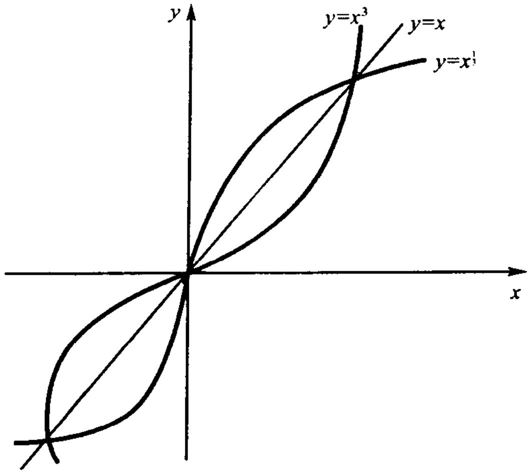


图 1 - 2

（2）指数函数

函数 $y = a^x$（$a > 0, a \neq 1$）称为指数函数. 它的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）. 当 $a > 1$ 时，函数是单调增加的，当 $a < 1$ 时，函数是单调减少的. 函数的值域为（0，$+\infty$），且当 $x = 0$ 时，$y = 1$，所以函数的图形位于 x 轴上方，且通过 y 轴上的点（0,1），它的图形如图 1 - 3 所示. $a = \mathrm{e}$ 时，得指数函数 $y = \mathrm{e}^x$.

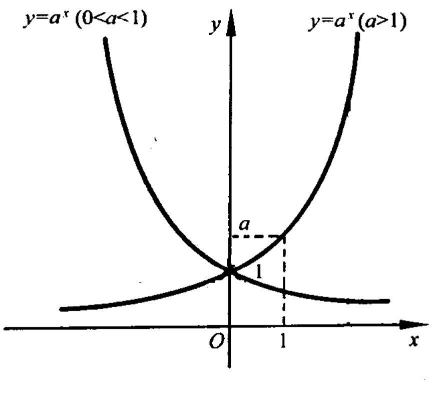


图 1 - 3

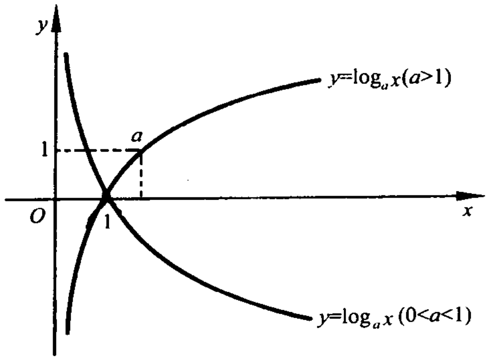


图 1 - 4

（3）对数函数

指数函数 $y = a^x$ 的反函数，记作 $y = \log_a x$（$a > 0, a \neq 1$）称为对数函数. 它的定义域为（0，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$）. 当 $a > 1$ 时，对数函数 $y = \log_a x$ 是单调增加的；当 $0 < a < 1$ 时，对数函数 $y = \log_a x$ 为单调减少的，对数函数的图形位于 y 轴右方.

注意：对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数，其定义域和值域互相对应，一个函数的定义域恰好是另一个函数的值域.

特别地,取 $a=e$,得自然对数 $y=\ln x$.

(4) 三角函数

三角函数共有六个:

① 正弦函数　函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 值域为 $[-1,1]$,且为有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数. 如图 1 - 5 所示.

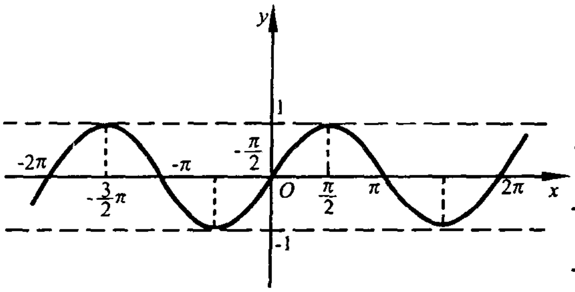


图 1 - 5

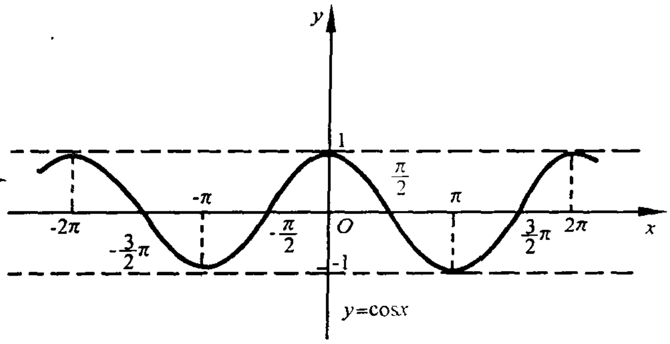


图 1 - 6

② 余弦函数　函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,且为有界函数,偶函数和以 2π 为周期的周期函数. 如图 1 - 6 所示.

③ 正切函数　函数 $y=\tan x$ 称为正切函数. 它的定义域为 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数. 如图 1 - 7 所示.

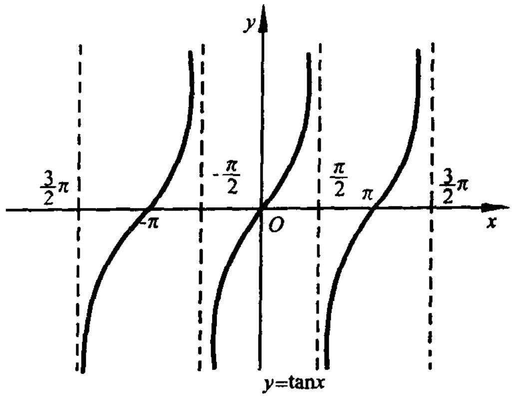


图 1 - 7

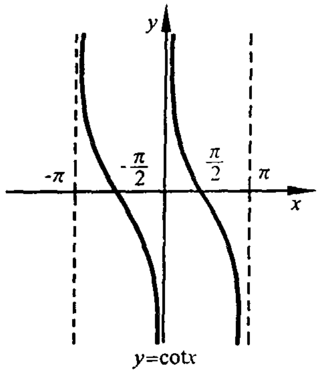


图 1 - 8

④ 余切函数　函数 $y=\cot x$ 称为余切函数. 它的定义域是 $(k\pi-\pi,k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是奇函数,且是以 π 为周期的周期函数,如图 1 - 8 所示.

⑤ 正割函数　函数 $y=\sec x$ 称为正割函数. 它是余弦函数的倒数,即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$. 它的定义域是 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数,且是偶函数. 它的图形很少用到,故从略.

(6) 余割函数　函数 $y = \csc x$ 称为余割函数. 它是正弦函数的倒数,即 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$. 它的定义域为 $(k\pi - \pi, k\pi)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 它是以 2π 为周期的周期函数,且是奇函数. 它的图形很少用到,故也从略.

(5) 反三角函数

由于三角函数在它们的定义域内不是单调的,在通常意义下无法讨论其反函数. 通过限制它的定义域范围,使其成为单值的. 这样得到的三角函数的反函数称为反三角函数.

正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数依次为:

① 反正弦函数　$y = \arcsin x$,定义域 $[-1,1]$,值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

② 反余弦函数　$y = \arccos x$,定义域 $[-1,1]$,值域 $[0,\pi]$. 反正弦函数是单调增函数、奇函数;反余弦函数是单调减函数.

正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的反函数依次为:

① 反正切函数　$y = \arctan x$,定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

② 反余切函数　$y = \text{arccot}\, x$,定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0,\pi)$. 反正切函数是单调增函数,且是奇函数;反余切函数是单调减函数.

上述五种函数统称为基本初等函数,是最常用、最基本的函数,它们的定义域、性质和图形(图形请参考相关教科书)应当牢记.

注:① 指数函数运算性质有

$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, (ab)^x = a^x b^x, (a^x)^y = a^{xy}$.

② 对数函数运算性质有

$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$.

$\log_a x^b = b\log_a x, \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, a^{\log_a x} = x$.

③ 常用的三角公式

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1, \cos x \cdot \sec x = 1, \tan x \cdot \cot x = 1.$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)].$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切函数,统称为初等函数.

高等数学中所遇到的函数,大多数是初等函数. 分段函数一般不是初等函数.

【例题解析】

例 1 判断下列几组函数是否恒等

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$;

(2) $f(x)=x$ 与 $y(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$;

(4) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$.

解

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\neq 1\}$. 而 $y=x+1$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\in R\}$,故它们不是恒等函数.

(2) 显然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同,故它们不是恒等函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\neq 0\}$,而 $g(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid x>0\}$,故它们不是恒等函数.

(4) 由 $y=\sin^2x+\cos^2x=1$ 知两者恒等.

例 2 求下列函数的定义域

(1) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;

(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

(3) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$.

解

(1) 对于函数 $\arcsin(\dfrac{x-1}{2})$,由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,得因此其定义域为[1,3].

(2) 要使 y 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0,\\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4,\\ 0<x<5.\end{cases}$$

其交集为[1,4],故函数的定义域为 D:[1,4].

(3) 要使 y 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}x+1>0,\\ x-1>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x>-1,\\ x>1.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $D:(1,+\infty)$.

例 3 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$, $u=\varphi(x)=x+1$,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 易知 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$,即 $[-2,2]$;$\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由 $|\mu|=|x+1|\leqslant 2$,得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$.

例 4 已知函数 $f(x)$ 的定义域为[0,1],求 $f(2x-3)$, $f(\sin 2x)$ 的定义域.

解 因为 $f(x)$ 的定义域为[0,1],所以 $f(2x-3)$ 的定义域为

$0 \leqslant 2x-3 \leqslant 1$，即 $3 \leqslant 2x \leqslant 4$，也即：$\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$.

同理，$f(\sin 2x)$ 的定义域成为 $0 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$，即 $2n\pi \leqslant 2x \leqslant 2n\pi+\pi$ 故定义域为 $n\pi \leqslant x \leqslant n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0\end{cases}$，求函数 $f[f(x)]$ 的表达式.

解 这是一个分段函数.

$$
\begin{aligned}
f[f(x)] &= \begin{cases}-1, & f(x)<0 \\ 0, & f(x)=0 \\ 1. & f(x)>0\end{cases} \\
&= \begin{cases}-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1. & x>0\end{cases} \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

故函数 $f[f(x)]$ 的表达式仍为 $f(x)$.

例 6 设

$$
f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x \leqslant 0 \\ 1+\sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \dfrac{\pi}{x}. & x>\pi\end{cases}
$$

求 $f(-1)$，$f(0,)f(\dfrac{\pi}{2})$，$f(\pi)$，$f(e\pi)$.

解 这是分段函数，求函数值时必须从自变量所在的区间的表达式中去计算.

$$f(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

$$f(0)=e^{0}=1 \quad 或 \quad f(0)=1+\sin 0=1.$$

$$f(\frac{\pi}{2})=1+\sin \frac{\pi}{2}=2.$$

$$f(\pi)=1+\sin \pi=1.$$

$$f(e\pi)=\frac{\pi}{e\pi}=\frac{1}{e}.$$

例 7 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$，求 $f(x-1)$，$f[f(x)]$.

解 把 $g(x)=x-1$ 代替 $f(x)$ 中的 x，得

$$f(x-1)=\frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^{2}}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^{2}-2x+2}}.$$

再把 $g(x)=f(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x，可得

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

例 8　设$f(x) = \dfrac{ax}{2x+3}$,且$f[f(x)] = x$,求 a.

解　本题是已知$f[f(x)]$的表达式,反求参数 a. 由

$$f[f(x)] = \frac{af(x)}{2f(x)+3} = x \quad 得$$

$$\frac{a\dfrac{ax}{2x+3}}{2\dfrac{ax}{ax+3}+3} = \frac{a^2x}{2ax+6x+9} = x,$$

即

$$a^2x = (2a+6)x^2 + 9x.$$

比较同次幂的系数得

$$a^2 = 9, 2a+6 = 0$$

解得　$a = -3$.

例 9　设$f(1-x) = \dfrac{1+x}{2x-1}$,求$f(x)$.

解　设 $u = 1-x$,得 $x = 1-u$,于是

$$f(u) = \frac{1+(1-u)}{2(1-u)-1} = \frac{2-u}{1-2u},$$

再将 u 换成 x,得

$$f(x) = \frac{2-x}{1-2x}.$$

例 10　设$f(x+1) = x^2+2x+3$,求$f(x)$.

解　令 $u = x+1$,得 $x = u-1$,于是

$$f(u) = (u-1)^2 + 2(u-1) + 3 = u^2 + 2,$$

再将 u 换成 x,得

$$f(x) = x^2 + 2.$$

例 11　设$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,试以$f(x)$表示$f(3x)$.

解　先将 $3x$ 代入$f(x)$的表达式中,得

$$f(3x) = \frac{3x}{3x-1}.$$

再由$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$解得　$x = \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$代入$f(3x)$中,得

$$f(3x) = \frac{3x\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3x\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1} = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

例 12　判断下列函数的奇偶性

(1)$f(x-1) = x^2-2x-7$;

(2) $y = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$;

(3) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(4) $f(x) = \dfrac{\sin(\sin x)}{x}(x \neq 0)$.

解

(1) 令 $u = x-1$，得　$x = u+1$，于是

$$f(u) = (u+1)^2 - 2(u+1) - 7 = u^2 - 8.$$

也就是　$f(x) = x^2 - 8$.

因为　　$f(-x) = (-x)^2 - 8 = x^2 - 8 = f(x)$，

所以　　$f(x) = x^2 - 8$ 为偶函数.

(2) 令 $f(x) = y = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$，则

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-\sin x}{1+x^2} = -f(x).$$

故　函数 $y = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 是奇函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}] = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

(4) 因为　$f(-x) = \dfrac{\sin\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(\sin x)}{x} = f(x)$.

故 $f(x)$ 是偶函数.

例 13　设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试讨论 $f[g(x)]$ 与 $f[f(x)]$ 的奇偶性.

解　由题设，$f(-x) = -f(x)$，$g(-x) = g(x)$，于是 $f[g(-x)] = f[g(x)]$，故 $f[g(x)]$ 为偶函数.

$$f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)].$$

故 $f[f(x)]$ 为奇函数.

例 14　求下列函数的反函数

(1) $y = e^x - 1$;

(2) $y = 1 + \lg(x+2)$.

解

(1) 由 $y = e^x - 1$ 得 $e^x = y+1$，故 $x = \ln(y+1)$，交换 x 与 y 得反函数

$$y = \ln(x+1).$$

(2) 由 $y = 1 + \lg(x+2)$，得 $x = 10^{y-1} - 2$

交换 x 与 y 得反函数

$$y = 10^{x-1} - 2.$$

例 15　在半径为 R 的球内作一内接圆柱体，试将圆柱体的体积 V 表示为圆柱体的高 h 的函数，并求此函数的定义域.

解　设内接圆柱体的底半径为 r，则由题意得

$$r^2 = R^2 - (\frac{h}{2})^2, \quad 即 \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}.$$

所以　$V = sh = \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot (R^2 - \frac{h^2}{4}).$

因为　$r > 0$,

所以　$$R^2 - \frac{h^2}{4} > 0, 故 \quad 0 < h < 2R.$$

也就是此函数 $V = \pi h \cdot (R^2 - \frac{h^2}{4})$ 的定义域为 $(0,2R)$.

例 16　选择题

(1) 函数 $y = cos^4 x - sin^4 x$ 的最小正周期是(　　).

(A) 4π.　(B) 2π.　(C) π.　(D) $\frac{\pi}{2}$.

(2) 在下列不等式中，(　　)成立.

(A) $\frac{3}{2} \leqslant \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant 2$.

(B) $\frac{7}{2} \leqslant \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant \frac{3}{2}$.

(C) $0 \leqslant \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

(D) 以上都不对.

(3) 设 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 z_f，则 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域(　　).

(A) 均为 z_f.

(B) 均为 D_f.

(C) 前者为 z_f，后者为 D_f.

(D) 前者为 D_f，后者为 z_f.

(4) 已知 $f(\frac{1}{x}) = (\frac{x+1}{x})^2$，则 $f(x) = ($　　$)$.

(A) $(\frac{x+1}{x})^2$.

(B) $(1-x)^2$.

(C) $(\frac{x}{x+1})^2$.

(D) $(1+x)^2$.

(5) 设 $f(x) = \frac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，则 k 的取值是(　　).

(A) $k \geqslant 2$.

(B) $k > 2$.

(C) $0 \leqslant k < 2$.

(D) $0 < k < 2$.

(6) 函数 $y = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$ 的奇偶性(　　).

(A) 偶函数.

(B) 奇函数.

(C) 非奇非偶.

(D) 以上都不对.

(7) 已知 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > 1$，则 x 的取值范围是(　　).

(A) $0 < x < 1$.

(B) $1 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < x < -1$.

(C) $x > 1$.

(D) $\frac{1}{2} < x < 1$.

(8) 下列函数中,(　　　) 为奇函数.

(A) $f(x) = \frac{|x|}{x}\sin x$.　　　　(B) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

(C) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.　　　　(D) $f(x) = \frac{x(1+x)}{1-x}$.

(9) 函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 是(　　　).

(A) 关于直线 $y = x$ 对称.　　　　(B) 关于原点对称.

(C) 关于 y 轴对称.　　　　(D) 关于 x 轴对称.

解:

(1) 用推演法.

$$\because\quad y = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x.$$

又 $\because$ $\cos x$ 的周期为 2π $\therefore \cos 2x$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

即所选的周期为 π,故选(C).

(2) 用赋值法.

令 $x = 0$, $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1$,故可知(A)、(C) 错. 再用推演法验(B) 是否正确.

$$\because\quad \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 \geqslant x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \leqslant \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 \leqslant 3x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geqslant 0.$$

可知(B) 正确,故选(B).

(3) 用定义法.

由反函数的定义可知 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 z_f, $y = f^{-1}(x)$ 与 $x = f(y)$ 仅是变量 x、y 对换而已,根据函数表示法与用什么字母表示无关,而对应关系和定义域不能变的特点,可知 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域也应是 z_f,故可知选(A).

(4) 可用赋值法.

令 $x = 1$,则 $f(1) = 4$,又将 $x = 1$ 代入四个选择项中,分别为 $4, 0, \frac{1}{4}, 4$,因此可排除(B)、(C). 再令 $x = 2$,得 $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$,而将 $x = \frac{1}{2}$ 代入(A)、(D) 中,分得为 $9, \frac{9}{4}$,故可排除(A),而(D) 为正确答案.

也可用推演法.

令 $t=\frac{1}{x}$,则 $x=\frac{1}{t}$,代入已知关系式中有

$$f(t)=\left(\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}}\right)^2=(1+t)^2,$$

然后将 t 换成 x,即 $f(x)=(1+x)^2$,

故(D)为正确答案.

(5)用推演法.

由题设知,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,也就是说分母不能为0,故 $kx^2+2kx+2\neq 0$,若设 $y=kx^2+2kx+2$,则题意表示为 y 不与 x 轴相交.此时分两种情况:

$k=0$ 时,$y=0\cdot x^2+2\cdot 0\cdot x+2\neq 0$,故 $f(x)=\frac{x}{2}$,其定义域显然为 $(-\infty,+\infty)$,符合题意.

$k\neq 0$ 时,y 为关于 x 的二次函数,要使 y 不与 x 轴相交,则必有 $\Delta=(2k)^2-4\times k\times 2<0$,故得 $0<k<2$.

综上所述,k 的取值范围是:$0\leqslant k<2$.

故(C)为正确答案.

(6)可用直接法.

设 $y=f(x)$.

$$\because\quad f(-x)=\ln(\sqrt{(-x)^2+1}+x)+\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)$$
$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=f(x).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)=y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是偶函数.故(A)是正确答案.

(7)根据题意有

$$\begin{cases}x^2-1>0, & \cdots\cdots ①\\ x^2-1<\frac{1}{2}. & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

由①式得 $x>1$ 或 $x<-1$

由②式得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$

综合之,得 $1<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<-1$.

故正确答案是(B).

(8)直接排除法.

(A)$f(-x)=\frac{|-x|}{-x}\sin(-x)=\frac{|x|}{x}\sin x=f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数.

(B)$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$,故 $f(x)$ 也为偶函数.

(C)$f(-x)=\frac{a^{x}-a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}-a^{x}}{2}=-\frac{a^{-x}-a^{-x}}{2}=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数.