中等专业学校试用教材工科专业通用

数学第四册

习题解答

广州地区中专数学教研会编

目　录

广州地区中专学校数学教研会在79年讨论教育部新编的中专数学教材（初稿）时，考虑到第四册是一些新内容，为了便于广大中专数学教师的备课和批改作业，在广东省高教局和广州市教育局的领导下，成立了中专数学第四册的习题解答编写组。参加编写工作的有：广东省机械学校的廖锦昌、黄铭鉴；广东省轻工业学校的苏兆霞；广东省水利电力学校的戚林娣、吴伟贤；广州市轻工业学校的裘炳容；广州市无线电学校的王少铭、何振鸿；广州市交运学校的赖木荣；广州市机电工程学校的程国兴；广州市化工学校的徐启荣。另外还得到广东省水利电力学校财务组、教务科和数学组等的同志们的大力协助。

本书完全按照教育部编的中专数学第四册80年版进行编写。内容包括：排列组合、二项式定理、概率论、行列式、矩阵、无穷级数、拉氏变换、逻辑代数等六章，每章前面还附有内容小结。

在征订过程中得到全国各中专学校的大力支持，在此表示衷心的感谢。由于编者水平浅薄、加以编写时间仓促，难免有不少缺点和错误，恳切希望大家提出批评指正，共同把中专的数学教学工作搞好。

广州地区中专数学教研会

一九八〇年十一月

第二十章
排列组合二项式定理

内容提要

一、排列、组合

1．两个基本原理

（1）乘法原理——完成一事要有K个步骤，每一步骤各有方法n_1，n_2……n_k种，完成此事的不同方法种数是

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_k$$

（2）加法原理——完成一事有K类方法，每一类中又分别有n_1，n_2，…，n_k种不同方法，完成此事的不同方法种数是

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

2．基本公式

（1）n个不同元素中取m个（$n\geqslant m$）元素的排列的种数

没有重复排列

1）选排列（$n>m$）

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

2）全排列（$n=m$）

$$A_n^n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=P_n=n!$$

可以重复排列　　$N=n^m$

（2）n个不同元素中取m个不同元素的组合种数

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

（3）组合的两个性质

1）$C_n^m=C_n^{n-m}$

2）$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

3．排列和组合的区别

排列和元素排成的顺序有关系，但是组合和这种顺序没有关系。

二、应用数学归纳法证题的一般步骤

1．先验证n取第一个自然值a时命题成立（这是递推的基础）。

2．再作出归纳法假定："设n=K（K≥a）时命题成立"，然后利用这个假定以证明："当n=K+1时命题也成立"（这是递推的根据）。

证明了这两点，就可作出结论："对于从a开始的所有自然数n，命题都成立"。

注意：以上两个步骤，缺一不可，否则成为荒谬。

三、二项式定理

1．二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$$

2. 二项式展开式的性质

(1)通项公式

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k (K=0, 1, 2, \cdots, n)$$

(2)系数最大的项

当n为偶数时；　第 $\frac{n}{2}+1$ 项

当n为奇数时；　第 $\frac{n+1}{2}$ 项和 $\frac{n+1}{2}+1$ 项

(3)各项系数的和

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$$

3. $(a-b)^n$ 的展开式

$$(a-b)^n=C_n^0 a^n-C_n^1 a^{n-1} b+C_n^2 a^{n-2} b^2-\cdots+(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k+\cdots+(-1)^n C_n^n b^n$$

通项公式

$$T_{k+1}=(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k \quad (K=0,1,2,\cdots,n)$$

习题20—1

1. 写出

(1)从4个元素a、b、c、d里每次取出2个元素的所有排列；

(2)从4个元素 a_1、a_2、a_3、a_4 里每次取出3个元素的所有排列。

解 (1) $A_4^2=4\times3=12$

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

(2) $A_4^3=4\times3\times2=24$

$a_1a_2a_3$	$a_2a_1a_3$	$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$
$a_1a_2a_4$	$a_2a_1a_4$	$a_3a_1a_4$	$a_4a_1a_3$
$a_1a_3a_2$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$
$a_1a_3a_4$	$a_2a_3a_4$	$a_3a_2a_4$	$a_4a_2a_3$
$a_1a_4a_2$	$a_2a_4a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_4a_3a_1$
$a_1a_4a_3$	$a_2a_4a_3$	$a_3a_4a_2$	$a_4a_3a_2$

2. 计算

(1) A_{10}^4 (2) $9A_8^4-2A_8^5$ (3) $\dfrac{A_{15}^9}{A_9^7}$

(4) $\dfrac{A_8^4+A_8^4}{A_9^5-A_9^4}$ (5) P_7 (6) $\dfrac{P_5-A_5^2}{5}$

(7) $P_9-8P_8-7P_7$ (8) $\dfrac{A_7-P_6}{6!+5!}$

解 (1) $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$

(2) $9A_8^4-2A_8^5=9\times8\times7\times6\times5-2\times8\times7\times6\times5\times4=15120-13440=1680$

(3) $\dfrac{A_{15}^{9}}{A_{9}^{7}}=\dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7}{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}=10010$

(4) $\dfrac{A_{8}^{5}+A_{8}^{4}}{A_{9}^{5}-A_{9}^{4}}=\dfrac{8\times7\times6\times5\times4+8\times7\times6\times5}{9\times8\times7\times6\times5-9\times8\times7\times6}=\dfrac{25}{36}$

(5) $P_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(6) $\dfrac{P_5-A_{5}^{2}}{5}=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1-5\times4}{5}=20$

(7) $P_9-8P_8-7P_7=9!-8\times8!-7\times7!$

$=8!-7\times7!=7!=5040$

(8) $\dfrac{A_{7}^{5}-P_6}{6!+5!}=\dfrac{7\times6\times5\times4\times3-6!}{(6+1)\times5!}=\dfrac{15}{7}$

3. 求证

(1) $A_{2}^{2}+A_{3}^{2}+A_{4}^{2}=A_{5}^{2}$

(2) $P_{n+1}-P_n=n^2P_{n-1}$

(3) $A_{n}^{m}+mA_{n}^{m-1}=A_{n+1}^{m}$

(4) $A_{n}^{m}=A_{n-2}^{m}+2mA_{m-2}^{m-1}+m(m-1)A_{n-2}^{m-2}$

$(m\leqslant n-2)$

证明(1)左边$=2\times1+3\times2+4\times3=20$

右边$=5\times4=20$

$\therefore A_{2}^{2}+A_{3}^{2}+A_{4}^{2}=A_{5}^{2}$

(2) 左边 $=P_n(n+1-1)=nP_n=n\cdot np_{n-1}=n^2P_{n-1}$

$\therefore P_{n+1}-P_n=n^2P_{n-1}$

(3) 左边 $=\dfrac{n!}{(n-m)!}+m\cdot\dfrac{n!}{(n-m+1)!}$

$=\dfrac{(n-m+1)\cdot n!}{(n-m+1)\cdot(n-m)!}+\dfrac{m\cdot n!}{(n-m+1)!}$

$=\dfrac{(n+1)\cdot n!}{(n-m+1)!}$

$=\dfrac{(n+1)!}{(n-m+1)!}$

右边 $=\dfrac{(n+1)!}{(n-m+1)!}$

$\therefore\ A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

(4) 右边 $=\dfrac{(n-2)!}{(n-2-m)!}+2m\cdot\dfrac{(n-2)!}{(n-2-m+1)!}+m(m-1)$

$\cdot\dfrac{(n-2)!}{(n-2-m+2)!}$

$=\dfrac{(n-2)!}{(n-m-2)!}+\dfrac{2m\cdot(n-2)!}{(n-m-1)!}$

$+\dfrac{m(m-1)\cdot(n-2)!}{(n-m)!}$

$=\dfrac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-m)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

$=$ 左边

$\therefore\ A_n^m=A_{n-2}^m+2mA_{n-2}^{m-1}+m(m-1)A_{n-2}^{m-2}$

4. 化简

（1）$\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$　　　　（2）$\dfrac{n[n!+(n-1)!]}{(n+1)!-n!}$

解（1）$\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}=\dfrac{(n+2)(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}$

$=(n+2)(n+1)n$。

（2）$\dfrac{n[n!+(n-1)!]}{(n+1)!-n!}=\dfrac{n\cdot n!+n!}{(n+1-1)\cdot n!}=\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$.

5. 解方程

（1）$A_x^2=30$;　（2）$A_x^2=56x$;　（3）$\dfrac{A_x^5+A_x^4}{A_x^3}=4$

解（1）$x(x-1)=30$　　$x^2-x-30=0$

$x_1=6$，$x_2=-5$（舍去）　∴ $x=6$

（2）$x(x-1)=56x$　$x^2-57x=0$.

$x_1=57$　　$x_2=0$（舍去）∴　$x=57$.

（3）$\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=4$

$(x-3)(x-4)+(x-3)=4$

$x^2-6x+5=0$.　$x_1=5$，　$x_2=1$（舍去）

∴ $x=5$.

6. 在一铁路沿线上有20车站，问需要准备多少种客车票？

解因客车票有终点站和起点站之分，故有顺序的问题，属于排列问题.

$A_{20}^2=20\times19=380$

7. 解放军某部队收到5封不同的慰问信，分给5个班，每

班一封。问可以有多少种分法？

解：不同的信分给不同的班是不同的分法，因而亦是排列问题，并且是全排列$P_5=5!=120$

8．经过十字路口处的交通车辆，一共有几种路线？

解：十字路口有4个不同位置，从这4个位置中任选两个出来作为起点和终点构成一种路线.

$$A_4^2=4\times3=12.$$

9．某种产品加工时需要经过五个工种：

（1）加工顺序共有多少种排法？

（2）其中一个工种必须最先开始加工，工序有几种排法？

（3）其中一个工种不能在最后加工，工序有几种排法？

（4）其中有两个工种必须连续加工，而且这两个工种只能一个在前另一个在后，工序有几种排法？

解（1）产品加工时，五个工种均有顺序问题．故是一个全排列问题　　$P_5=5!=120$

（2）第一个工种最先加工已确定，则其余4个工种依(1)一样是全排列：

$$P_4=4!=24$$

（3）方法一：总的排法P_5，减去其中一个工种在最后加工的排法P_4

$$\therefore P_5-P_4=120-24=96.$$

方法二：先安排最后一个工序，然后再安排上一个工序，可按乘法原理得

$4\times4\times3\times2\times1=96.$

（4）把指定连续加工的二个工种看成是一个工种，则只有4个工种进行全排列

$\therefore\ P_4=4!=24$

10. 7人并坐照像

（1）如果某人必须坐在的中间，有多少种不同的坐法？

（2）如果某人不能坐在中间三个位置上，有多少种不同坐法？

（3）如果某人必须坐在中间或两端，有多少种不同坐法？

（4）如果某三人必须坐在一起，有多少种不同坐法？

解：（1）某人坐在中间确定了，余下6个人坐其他位置；则是全排列问题

$\therefore\ P_6=6!=720$

（2）某人不准坐在中间三个位置，则有A_4^1种坐法，其余6个人有P_6种坐法，按乘法原理得.

$$A_4^1\ P_6=4\times720=2880$$

（3）某人必须坐在中间或两端有A_3^1种坐法，其余6人有P_6种坐法，按乘法原理得：

$$A_3^1\cdot P_6=3\times720=2160.$$

（4）某三人看作一个元素与其余4人共五个元素有P_5种坐法，而三人中又可全排列有P_3种坐法，按乘法原理

得：

$$P_3 \times P_6 = 6 \times 120 = 720.$$

11. 用数字0、1．2．3．4．5组成没有重复的数字的数

（1）能够组成多少个六位数？

（2）能够组成多少个能被25整除的五位数？

*（3）能够组成多少个比34521大的五位数？

解（1）包括0做头的六位数是P_6个，但0做头的数一般不称为六位数，这类数为P_5个故用减法：

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600$$

（2）能被25整除的五位数其末两位数必须是5、0或2、5

∴

末两位数是5、0的有：A_4^3个

末两位数是2、5的有：A_4^3个，但其中0做头的五位数有A_3^2个　故应为$A_4^3 - A_3^2$个.

$$\therefore \quad A_4^3 + (A_4^3 - A_3^2) = 24 + (24 - 6) = 42$$

（3）五位数中首位是4的有A_5^4个，首位是5的亦有A_5^4个，首位是3，第二位是5的有A_4^3个

$$\therefore \quad 2A_5^4 + A_4^3 = 2 \times 120 + 24 = 264$$

12. 在电报编码中，是从0、1、2，…，9这十个数码里任取4个（可重复取），按不同次序组成一个电码来表示一

个汉字，问最多能表示多少个不同的汉字？

解：这是一个重复排列问题

$N=10^4=10000$

13．有5个小电灯排成一排，每个电灯有亮和不亮两种状态，总共可以表示多少种不同信号？

解：此是一个重复排问题

$N=2^5=32$

14．电话号码由6个数字组成，如果左面第一位和第二位不能出现0，最多可能有多少个六位电话号码？

解：第一、二位不能为0，则各有9个可能，而第三至第六位各有10个可能

$\therefore\quad 9^2\times10^4=810000$

15．（1）4个同学分配到三个生产小组去参加劳动，每组1人，有几种不同分配方法？

（2）4个同学分配到三个生产小组去参加劳动，有几种不同的分配方法？

（3）4个同学争夺三个项目竞赛的冠军，冠军获得者有几种可能情况？

解（1）这是一个选排列问题

$A_4^3=4\times3\times2=24$

（2）这是一个重复排列问题

$N=3^4=81$

（3）亦是一个重复排列问题

$N=4^3=64$

习题20—2

1．写出

（1）从4个元素a、b、c、d里每次取出2个的所有组合。

（2）从5个元素a_1，a_2，a_3，a_4，a_5中每次取出3个的所有组合。

解（1）$C_4^2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

ab　　ac　　ad

bc　　bd　　cd

（2）$C_5^3=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

$a_1a_2a_3$　　$a_1a_2a_4$　　$a_1a_2a_5$　　$a_1a_3a_4$

$a_1a_3a_5$　　$a_1a_4a_5$　　$a_2a_3a_4$　　$a_2a_3a_5$

$a_2a_4a_5$　　$a_3a_4a_5$

2．计算

（1）C_{12}^3；（2）C_{59}^{57}；（3）$C_7^4\cdot P_4$；（4）C_{200}^{197}；

（5）$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$

解（1）$C_{12}^3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

（2）$C_{59}^{57}=C_{59}^2=\dfrac{59\times58}{2\times1}=1711$

（3）$C_7^4\times P4=C_7^3\cdot4!=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times24=840$

（4）$C_{200}^{197}=C_{200}^{3}=\frac{200\times199\times198}{3\times2\times1}=1313400$

（5） 原式$=2(C_5^0+C_5^1+C_5^2)=2(1+5+10)=32$

3. 求证

（1）$KC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$（2）$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

证明（1）左边$=K\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$

右边$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$

∴ $KC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$

（2）利用组合的性质2：$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

右边$=C_n^{m-1}+\left(C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}\right)=C_n^{m-1}+C_n^m$

$=C_{n+1}^m=$左边.

∴ $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$

4. 求n

（1）$C_n^3=A_n^2$；（2）$11C_n^3=24C_{n+1}^2$；

（3）$nC_n^{n-3}+A_n^3=4C_{n+1}^3$；（4）$C_n^6=C_n^7$。

解（1）原方程为$\frac{A_n^3}{P_3}=A_n^2$

即 $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=n(n-1)$

$n=8$

（2）原方程为 $\dfrac{11\cdot n\cdot(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{24(n+1)\cdot n}{2}$

即 $11n^2-105n-50=0$

$n_1=10\qquad n_2=-\dfrac{5}{11}$（舍去）

$\therefore\quad n=10$

（3）原方程为 $nC_n^3+A_n^3=4C_{n+1}^3$

$$\frac{n\cdot n(n-1)(n-2)}{6}+n(n-1)(n-2)=4\times\frac{(n+1)n\cdot(n-1)}{6}$$

即 $n^2-16=0$

$n_1=4\qquad n_2=-4$（舍去）

$\therefore\quad n=4.$

（4）$\therefore\quad C_n^6=C_n^{n-6}\quad\therefore\quad C_n^{n-6}=C_n^7$

即 $n-6=7$

$\therefore\quad n=13.$

5．从8个字母a_1、a_2，…，a_8中，每次取出了3个相乘，可以组成多少种不同的乘积？

解：因为乘积满足交换律，不管顺序问题，所以是组合问题

$$C_8^3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$