大學叢書

機械原理

下册

劉仙洲著

商務印書館出版

大學叢書

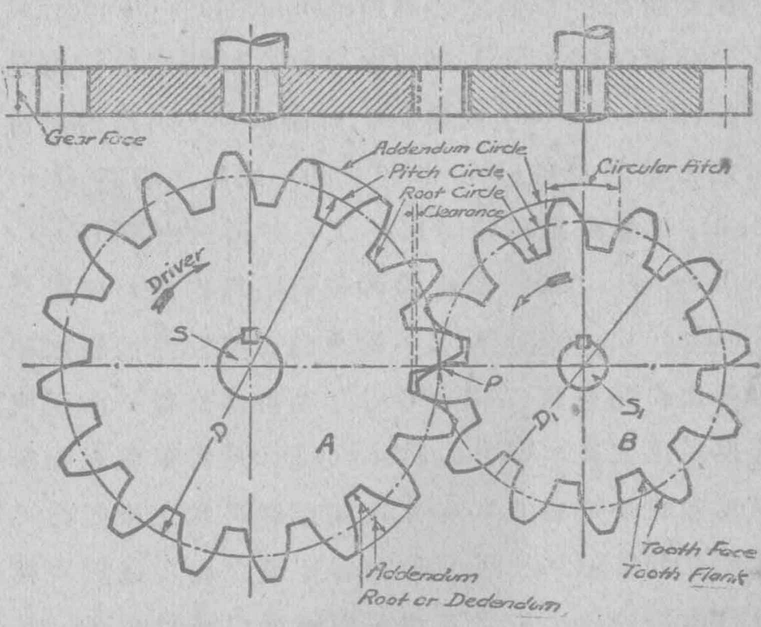
機械原理

下册

劉仙洲 著

第十章　齒輪

179. 齒輪之應用　在第八章,知一軸之迴轉運動,可由兩磨擦輪之滾動接觸傳達於別一軸。惟此種傳達,係完全依賴磨擦力。且難免滑動發生。故當兩軸之速比須絕對確定或所擬傳達之動力較大時,即不適用,而別代以齒輪。使兩輪之周緣各備多數之齒,彼此互相銜接。當轉動時,齒與齒之間雖有相當滑動,而兩軸之速比則與理想上之兩磨擦輪無異。

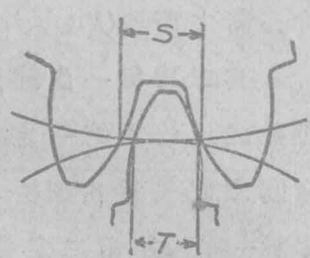


第 277 圖

如第 277 圖,設用虛線所表示之兩圓,仍相當兩磨擦輪。倘在 A 輪之周緣,沿輪軸平行之方向,備若干凸起部分。嵌入 B 輪周緣上之凹下部分。B 輪周緣上兩個凹下部分之間,亦備相當之凸起部分,嵌入 A 輪周緣上之凹下部分。則原來兩磨擦輪遂變爲兩齒輪。若計畫得宜,不但傳達之動力可以增加,且與兩磨擦輪理論上之速比完全一致。

180. <u>齒輪各部之名稱</u> 仍參看前圖,與原來兩磨擦輪相當之兩圓,謂之節圓 (Pitch circle)。兩節圓相切之點,謂之節點 (Pitch point)。包含各齒頂部之圓,謂之頂圓 (Addendum circle)。包含各齒根部之圓,謂之根圓 (Root circle)。頂圓之半徑減節圓之半徑,謂之齒頂距離(Addendum distance)。或簡稱之曰齒頂(Addendum)。節圓之半徑減根圓之半徑。謂之齒根距離 (Root distance)。或簡稱之曰齒根 (Root)。齒頂與齒根相加之和,謂之齒長 (Length of tooth), 或謂之齒高 (Height of tooth)。輪齒曲面在節圓以外之一部,謂之齒面 (Face of the tooth or tooth face)。輪齒曲面在節圓以內之一部,謂之齒腹 (Flank of the tooth)。與別一輪之齒面能實際接觸之一部齒腹,謂之作用齒腹 (Acting flank)。輪齒自齒輪一面至彼面之寬度謂之齒寬 (Width of face of gear)。當兩輪互相銜接時,沿兩輪之中心線,自一輪之頂圓至別一輪之根圓之一段距離,謂之餘隙 (Clearance)。卽相當一輪之齒根減別一輪之齒頂。一齒沿節圓所有之寬度,謂之齒厚 (Thickness of tooth)。兩

齒之間沿節圓所有之寬度,謂之齒間(Width of space)。沿節圓,齒間與齒厚之差,謂之齒隙(Backlash)。如第278圖。沿節圓弧線,S減T之差,即爲齒隙。精製之齒,多不用齒隙。但粗製者或鑄造者,則須有相當之齒隙。



第278圖

181. 周節(Circular pitch)　沿節圓自第一齒之中心至第二齒之中心之一段弧線距離,謂之周節。或沿節圓自一齒上之任一點至相鄰之齒上相同之一點之弧線距離。且恆等於齒厚與齒間相加之和。

就定義觀之,可知節圓全圓周之長,必等於周節乘齒數。或周節必等於齒數除節圓圓周。仍參看第277圖。設T代表A輪之齒數,C代表周節,D代表節圓之直徑。則

$$C=\frac{\pi D}{T} \qquad \cdots\cdots(90)$$

又互相銜接之兩齒輪,須用同一之周節。

182. 徑節與節數(Diametral pitch and pitch number),模數(Module)。　徑節一名詞,有兩種定義。其一爲節圓直徑每吋所有之齒數。即齒數對於節圓直徑之比。例如某齒輪之齒數爲24。其節圓之直徑爲8吋。則此齒輪之徑節爲8除24,即等於3。即齒輪節圓直徑每有一吋,其圓周上即備有3個齒也。此種齒輪,有時簡稱之曰三節齒輪(3-Pitch gear)。又徑節有

時亦謂之節數(Pitch number)。

其二爲每一齒節圓直徑所有之長度。卽節圓直徑對於齒數之比。恰爲第一定義之反數。例如某齒輪之齒數爲24,其節圓之直徑爲8。則按第二定義,此齒輪之徑節爲24除8卽等於$\frac{1}{3}$吋。又用第二定義所得之數。有時謂之模數(Module)。設M代表模數,P代表節數或徑節,T代表齒數,D代表節圓之直徑;則得下列公式:

$$M=\frac{\text{節圓直徑}}{\text{齒數}}=\frac{D}{T}\cdots\cdots(91)$$

$$P=\frac{\text{齒數}}{\text{節圓直徑}}=\frac{T}{D}\cdots\cdots(92)$$

$$\text{故}\quad M=\frac{1}{P}\cdots\cdots(93)$$

183. 周節與模數之關係　周節與徑節之關係

按(91)式, $M=\frac{D}{T}$,

按(90)式, $C=\frac{\pi D}{T}$,

(93)÷(94),得 $\frac{C}{M}=\frac{\pi D}{T}\div\frac{D}{T}=\pi$

$$\text{或}\quad C=M\times\pi\cdots\cdots(94)$$

卽周節恆等於模數乘π也。

$$\text{又按(93)式,得}\quad C=\frac{\pi}{P}\cdots\cdots(95)$$

$$\text{或}\quad C\times P=\pi\cdots\cdots(96)$$

即周節恆等於徑節除π,或周節與徑節之乘積恆等於π也。

184. 一對齒輪之速比 (Speed ratio of a pair of gears)　仍參看第277圖,設A爲原動輪,裝置於S軸上。B爲從動輪,裝置於S_1軸上。N爲A輪每分鐘之迴轉數。N_1爲B輪每分鐘之迴轉數。D爲A輪節圓之直徑,D_1爲B輪節圓之直徑。T爲A輪之齒數。T_1爲B輪之齒數。C爲兩輪之周節。因兩齒輪互相銜接,故兩輪之周節相同。且A輪節圓上任一點之線速,必與B輪節圓上任一點之線速相等。

但A輪節圓上任一點之線速$=\pi DN$,

B輪節圓上任一點之線速$=\pi D_1N_1$,

故　$\pi DN=\pi D_1N_1$

$$\text{或}\frac{N_1}{N}=\frac{D}{D_1}\quad\cdots\cdots(97)$$

即兩輪每分鐘之迴轉數與其節圓之直徑成反比也。

又A輪節圓之圓周$=\pi D=CT$,

B輪節圓之圓周$=\pi D_1=CT_1$,

$$\text{兩式相除,得}\frac{D}{D_1}=\frac{T}{T_1}\quad\cdots\cdots(98)$$

即兩輪之直徑與其齒數成正比也。

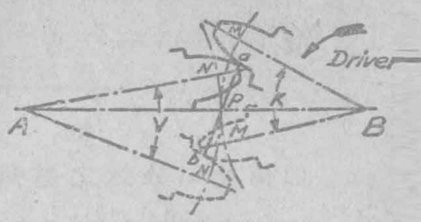
又由(97)及(98)兩式,得

$$\frac{N_1}{N}=\frac{T}{T_1}\quad\cdots\cdots(99)$$

即兩輪每分鐘之迴轉數與其齒數成反比也。

185. 作用角與作用弧(Angle and arc of action) 原動輪上之一齒推動從動輪上相當之一齒所迴轉之總角度,謂之原動輪之作用角,同理從動輪上之一齒被原動輪上相當之一齒推動,所迴轉之總角度,謂之從動輪之作用角。又無論就原動輪言或就從動輪言,當兩輪上之兩齒起始接觸,直至接觸點至節點時,所經過之角度,謂之原動輪或從動輪之進角(Angle of approach)。當兩輪上之兩齒在節點接觸,直至彼此離開,所經過之角度,謂之原動輪或從動輪之退角(Angle of recess)。無論就原動輪言或就從動輪言,作用角恆等於進角加退角之和。

如第279圖,用實線所表示之二齒,係原動輪上之一齒M方起始推動從動輪上之一齒N。用虛線所表示者,仍為此二齒,惟其地位係N齒將起始離開M齒。當M齒推動N齒之時間內,B輪上任一輻射線,例如經過M齒中心之線,必經過一角度K,而A輪上任一輻射線則必經過一角度V。故K即為B輪之作用角,V即為A輪之作用度。



第279圖

又在節圓上正對作用角之一段弧線,謂之作用弧(Arc of action)。正對進角之一段弧線,謂之進弧(Arc of approach)。正對退角之一段弧線,謂之退弧(Arc of recess)。

因兩輪旣互相銜接,傳達運動其作用弧恆爲相等,故其作用角須與其半徑成反比。但就前段之結果,知半徑與齒數成正比,故得下列公式

$$\frac{\text{原動輪之作用角}}{\text{從動輪之作用角}}=\frac{\text{從動輪之齒數}}{\text{原動輪之齒數}}\quad\cdots\cdots\cdots(100)$$

作用弧永不能小於周節。因若使作用弧小於周節,則當第二對齒未至起始接觸以前,第一對齒即已離開,事實上必不能繼續運動也。

186. 接觸線 (Path of contact)　仍參看前圖,用實線表示之二齒彼此在 a 點接觸。此接觸點實係二齒之接觸線對於紙面之投射點。接觸線之長度,與齒寬相同。爲簡單起見,多就一點加以研究。用虛線表示之二齒,彼此在 b 點接觸。如將二齒畫在一中間位置,則彼此必在別一點接觸,由此類推,當二齒彼此有作用之時間內,每在一不同之地位,即必有一不同之接觸點。連所有各接觸點所成之線 (在此圖上,即 aPb 線)。謂之接觸線。按作成輪齒曲線之性質之不同,此接觸線或爲直線,或爲曲線。但所有製造合宜之齒,兩輪之節點 P 恆在此接觸線上。

187. 傾斜角或壓力角(Angle of obliquity or pressure angle)

經過節點且與中心線垂直之一線,對於由節點至兩齒接觸點所畫之線中間所成之角,謂之傾斜角或壓力角。在某種輪齒此傾斜角係一定之大小。在別種輪齒。則隨兩齒接觸之

地位而變化。

原動輪齒及於從動輪齒之力,其方向恆沿由節點至兩齒接觸點之直線(見下段),故傾斜角或壓力角愈小時,原動力使從動輪迴轉之分力必愈大,使兩軸彼此遠離之分力必愈小。易言之,即較大之傾斜角結果使及於軸承之壓力較大也。

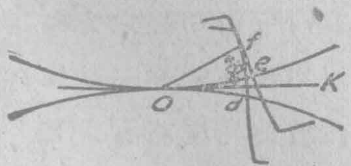
188. 齒輪之基本定律 (Fundamental law of gearing) 用齒輪傳達兩軸之運動,其最要之條件,即應使兩輪齒所具之曲線無論接觸點在何處,其兩軸迴轉之速比恆為一定,即應使兩軸迴轉之速比與理想上相當之兩磨擦輪毫無差異也。能達到此種條件之情形如下:——

從兩輪節點至兩輪齒接觸點之直線,須恆與接觸點之切線垂直。即兩輪輪齒所具之曲線,須使所有接觸點之公法線永經過節點也。此謂之齒輪之基本定律。可由下列數法說明之。

(a) 按前章第 178 段之理,知倘接觸點之公法線劃分中心線兩部之長短恆為一定,則兩軸迴轉數之比即恆為一定。若兩輪輪齒所具之曲線,能使所有接觸點之公法線永經過節點。則所分中心線兩部之長短,當然恆為一定。即恆為兩節圓之半徑,兩節圓之半徑其長短既恆為一定,故兩軸迴轉之速比亦恆為一定也。

(b) 如第280圖,設 O 為兩節圓之節點。f 為兩齒之接觸

點。當兩輪各繞其軸迴轉時,若假設兩軸之速比與理想上相當之兩磨擦輪無異,則兩輪節圓之節點O可視爲其中之一輪繞別一輪之瞬時中心。O點旣爲兩輪之瞬時中心。兩輪上任一點運動之方向,必係與該點至O點之直線垂直。f點旣爲兩齒之接觸點。故兩齒上在f處彼此接觸之兩點,其相對運動之方向必與Of垂直。但兩齒在接觸點之相對運動,須爲完全滑動



第 280 圖

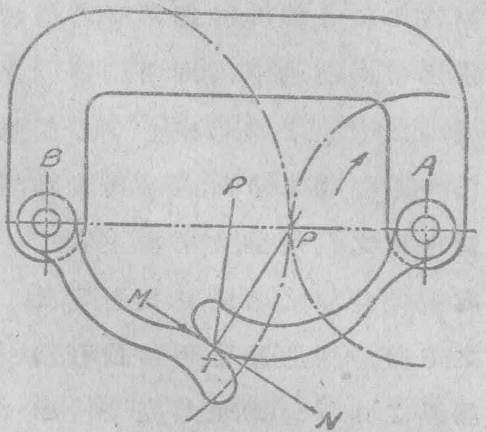
(卽一齒沿別一齒滑動。不如此則不彼此相妨,卽彼此不銜接)。易言之卽相對運動之方向,恆沿接觸點切線之方向也。

由此觀之,可知與Of垂直之直線,卽爲兩齒接觸點之切線而Of卽爲兩齒接觸點之公法線也。故欲使兩軸迴轉之速比恆爲一定,接觸點之公法線須永經過節點O。

(c) 如第281圖,設A與B爲兩輪之中心。P爲兩輪之節點並假定有兩齒在T點接觸。其輪齒曲線之情形,係使T點之公法線,經過節點P。又MN爲T點之公切線。

當兩輪迴轉時,不但兩輪有相對之運動。兩輪對於固定之輪架亦各有相對之運動。按相對運動言,若使一輪不動而使別一輪與輪架運動。必與使輪架不動而使兩輪運動,其結果相同。假設以B爲中心之輪固定不動,而使以A爲中心之輪按箭頭所指之方向迴轉同時使輪架向B輪原來迴轉相反之方向迴轉以就之。則A輪之接觸點T運動之方向必與

PT 垂直。易言之,即沿 MN 之方向。故能時與 B 輪之接觸部分為瞬時之接觸。(因運動之方向,恆沿切線之方向,故不致分離,亦不致彼此衝突)。反而言之,若兩輪之曲線,其情形係使其公法線不經過節

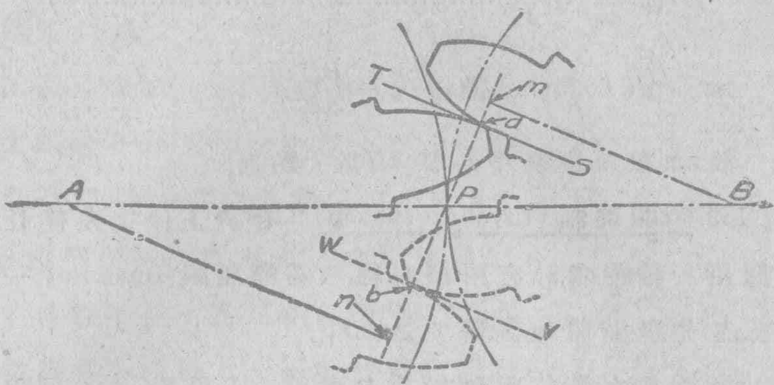


第 281 圖

點 P,而經過任意之一點 P'。並假設 A 輪仍按箭頭所指之方向迴轉,則 A 與 B 必致分離。因 TP' 旣為公法線。則 B 輪接觸部分之方向必係與之垂直。A 輪之接觸點 T 必沿 MN 之方向,向 M 運動也。若 A 輪向箭頭相反之方向迴轉,A 輪之接觸點 T 必向 N 運動,而 B 輪接觸部分之方向則高於此(因與 TP' 垂直)。故 A 與 B 必致衝突。兩者旣均屬不可能,故接觸點之公法線須恆經過 P 點。

(d) 如第282圖,設用實線所表示之二齒,在 a 點相接觸。即兩輪齒之曲線在 a 點相切。畫 ST 線在 a 點與兩齒曲線相切。此兩曲線之形狀,必須使此切線與由 a 點至節點 P 之直線垂直。

同一方法,用虛線表示之兩齒,其接觸點 b 之切線必須與由 b 點至 P 點之直線垂直。



第 282 圖

如欲使兩輪之速比恆爲一定,則互相接觸之兩齒,無論在何地位,均須適合於此種條件。

茲證明之如下:

設 An 與 Bm 爲 AB 兩中心至經過接觸點 a 之公法線之垂直線。

並設 $\omega_A=A$ 輪之角速率(以半徑角計),$\omega_B=B$ 輪之角速率則 n 點之線速率 $=\omega_A\times An$, m 點之線速率 $=\omega_B\times Bm$。就此時刻言,m 與 n 運動之方向,均係沿 nm 直線,且其動作與在 nm 兩點裝置一無伸縮性之繩,由 A 輪拽引 B 輪無異。卽 m 點之線速率等於 n 點之線速率也。

$$故\ \omega_A\times An=\omega_B\times Bm,\quad 或\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{Bm}{An}\cdots\cdots\cdots(1)$$

但有同一線速率之兩點,其角速率恆與其半徑成反比。

即 $\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{BP}{AP}$ ……………………………………(2)

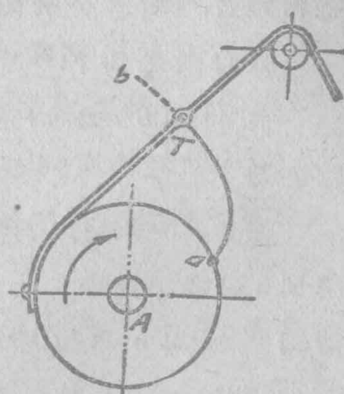
由(1)與(2),得 $\frac{Bm}{An}=\frac{BP}{AP}$.

故nm線須恆交中心線AB於P點也。

189. 漸開線制 (Involute system) 合於上段之定律且實際應用於輪齒者,計有兩種曲線,一爲漸開線(Involute),一爲擺線。茲先就漸開線制研究之如下。

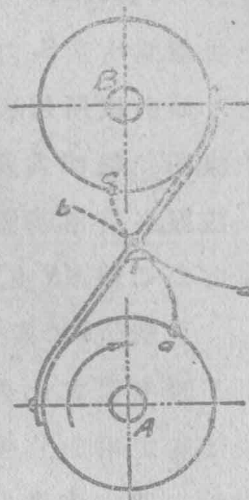
漸開線之畫法,前曾於第七章第121段論及之。若但就漸開線之畫出論,按第121段所言之方法,使一帶或一繩由一靜止之圓柱上,時時引直,向下撤退。與第283圖所示之情形,將帶或繩時時引直而使圓柱迴轉,結果實無差異。

當圓柱A繞其心迴轉時,同時並時時將繩引直,若假定A之下部有一較大之平板與A同轉,則T處之筆必在其上畫出一漸開線ab。反而言之,若使圓柱A向反對方向迴轉,則T處之筆,必在其上畫出一漸開線ba。



第283圖

如第284圖,於A圓柱之上別設一圓柱B。並將帶之一端固定於其上。若A與B同時向相反之方向迴轉,使帶一面由A撤退,一面向B纏繞,且時時使帶引直。更假設A與B之下

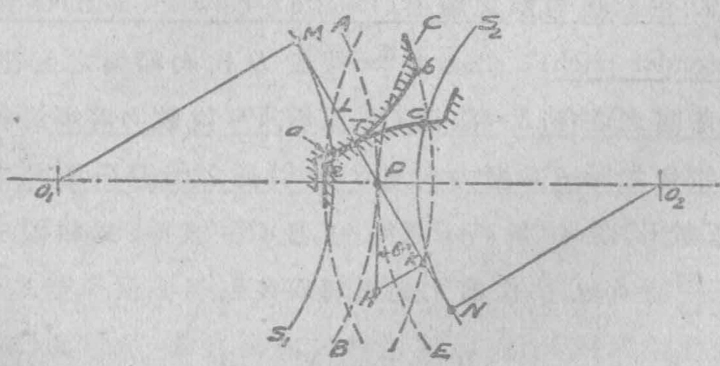


第 284 圖

部各有共同迴轉之一平板。則當帶由 A 撤退時，T 處之筆必在 A 下部之平板上，畫出漸開線 aT。同時當帶向 B 纏繞時，T 處之筆必在 B 下部之平板上，畫出一漸開線 dT。曲線上虛線部分，係表示當 A 與 B 再繼續迴轉時，所應畫出之漸開線。

曲線上任一點之法線，恆與其基圓相切，此爲漸開線之一種特性。兩漸開線在接觸點 T 有一公法線。此公法線又恆爲兩基圓之公切線，畫兩漸開線之 T 點，既恆在此公切線上，即接觸點恆在此公切線上。

190. 漸開線齒合於齒輪基本定律之證明　如第 285 圖，設 APB 與 CPE 爲互相銜接且具有漸開線齒之兩輪之節圓。



第 285 圖

並設 aTb 與 cTe 爲兩齒表面。在 T 點互相接觸。且此兩齒表面之曲線爲 S_1 與 S_2 兩基圓之漸開線。

如前段所述,因漸開線之特性,從漸開線上任一點畫一法線,則此線即爲基圓之切線。可知兩漸開線之接觸點 T 之公法線,必爲兩基圓之公切線 MN。故兩齒接觸點恆在兩基圓之公切線 MN 上。

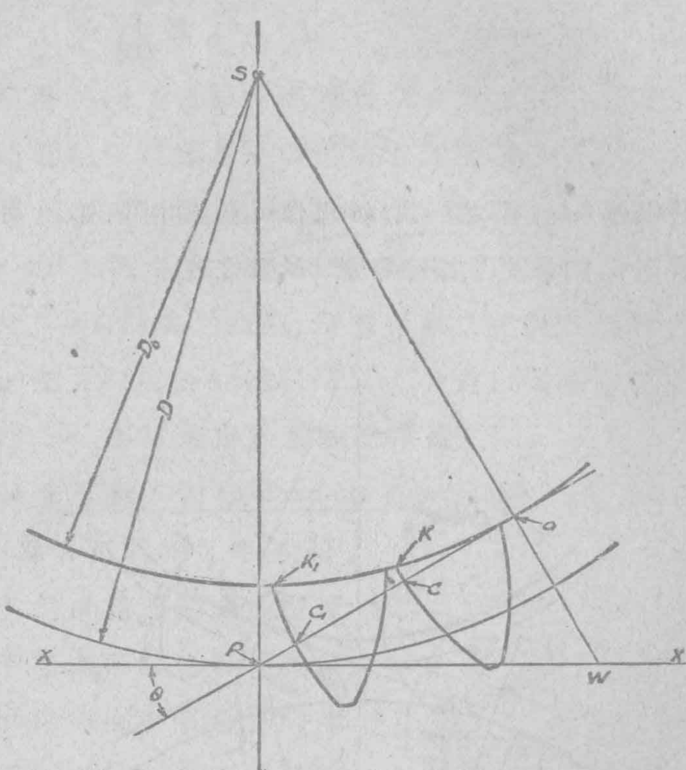
又就 O_1PM 與 O_2PN 兩相似三角形比較觀之,可知倘使兩基圓半徑之比與兩節圓半徑之比相同,且恆爲一定,則互相接觸之兩齒,其接觸點之公法線,必永經過節點 P。即合於齒輪之基本定律也。

191. 法節 (Normal pitch) 沿接觸點之法線,自一齒上之一點至第二齒上相當之點之直線距離,謂之法節。如第 286 圖上之 CC_1。按漸開線之畫法,此距離恆一定,且恆等於相鄰之二齒在基圓上相當之兩點之弧線距離。如圖上之 KK_1。

192. 法節與周節之關係 (Relation between normal pitch and circular pitch) 仍參看286圖,設 D 代表節圓之直徑,D_b 代表基圓之直徑,$N=$ 法節,$C=$ 周節,$T=$ 齒數。a 爲傾斜線與基圓相切之點。θ 爲壓力角。畫 Sa 並引長之,使遇節點 P 之切線 XX 於 W。則 asP 角 $=aPW$ 角 $=\theta$。且 aPW 與 asP 爲相似三角形。故 $\frac{as}{sp}=\cos\theta$。按法節之定義,得 $N=\frac{\pi D_b}{T}$。

前(90)式,爲 $C=\frac{\pi D}{T}$, 故得 $\frac{N}{C}=\frac{D_b}{D}=\cos\theta$ ……(101)

卽法節恆等於周節與壓力角之餘弦之乘積。



第 286 圖

193. 接觸線之長度與作用弧之長度之關係(Relation between length of path of contact and length of arc of action) 如第 287 圖，用實線所表示之兩齒，係兩齒起始在接觸線上接觸之情形。用虛線所表示之兩齒，係兩齒終止在接觸線上接觸之情形。故 α 爲從動輪之作用角，而 NPM 則爲從動輪之作用弧。基圓上相當之弧爲 LK。