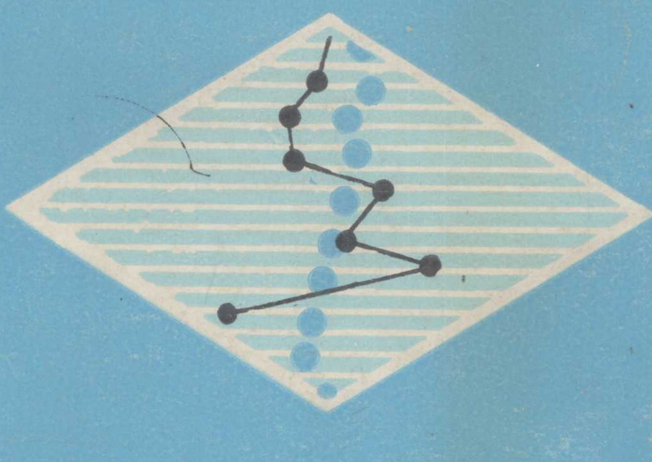
实用经济数学

——方法及案例分析

宋先道　陈　赫



湖南省技术经济与管理现代化研究会
长沙市长远规划办公室
合编

序　言

为了实现我国管理科学的现代化，我一直认为：管理人员应该学点数学。这不单是因为马克思曾经说过，一种科学只有在它成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。更重要的原因是，当代社会主义的实践向管理科学提出了这种客观的需要。对于管理研究的定量化，是当代管理科学发展的一个重要特征。对于这一点，我们以往的认识是不清楚的。在过去一个较长的时期内，我们管理理论界对管理研究的定量化没有给以应有的重视，甚至把它视为资产阶级的管理学而加以排斥，这在理论上和实践中都造成了有害的影响。

目前，在我国，对于从事过传统管理的人员来说，他们有丰富的实践经验，重要的在于掌握必要的、新的近代数学方法；而对于近年来毕业的管理专业人员来说，他们有一定的数学基础，但缺乏管理的实际经验，而且，一般来说，他们要么缺乏一些新颖的数学工具，要么已掌握的数学工具用得不太顺手，重要的是应该向他们提供在管理中使用数学的实例分析。

我经常和本书的两位编著者谈及此事，谈话中就自然提出了"向管理人员提供一本便于自学的经济数学教材"的问题。谈论这些事大概是去年冬天的事。不到一年时间，一本60万字的《实用经济数学　方法及案例分析》就送到了我的面前！细细读来，它是实现了我们的初衷的。感谢宋先道、陈赫两位作者同志，他们是数量经济学领域中有志的开拓者，在对这块荆棘丛生而前景广阔的园地的耕耘中，他们付出了辛勤的劳动，筚路篮缕之功，应当予以鼓励。

这本书虽然是为长远规划研究班学员而编写的，但从内容看，完全可以作为高等院校经济、管理专业本科生和研究生的参考书，我甚至想鼓励两位编著者将它精炼成教材。

凡新生事物总难免有缺陷。因此，作为一次新的尝试，本书的问世，不表示一件工作的最后完成，正相反，它表示一件工作才刚刚开始。幸好有湖南省技术经济与管理现代化研究会的正、付秘书长肖申生（湖南省经济研究中心）和戴超伦（长沙市计委付主任）两位同志精心审阅，使得这本书有了一个健康的雏体，相信在使用中它将逐渐丰满、不断完善。

李剑华

一九八四年七月于马王堆疗养院

前　言

本书是为湖南省长沙市经济、社会长远发展规划研究班学员而编写的教材。主要介绍了数理经济学和经济计量学的基本方法、线性规划及经济分析、实用经济预测学和最优控制理论在管理科学中的应用等方法，并配备了一定数量的案例（均引用我国经济、管理科学中的最新成果），供读者学习时参考，为进行政府和企业的经济分析与规划时提供分析工具。

全书共分十二章，各章基本上各自独立，读者可随意选用。本着“通俗易懂、便于自学、方便适用和雅俗共赏”的原则，叙述中没有采用高等分析（如泛涵分析和拓扑学等）的方法，读者只要具有一定的微积分学初步和线性代数基础知识就可以自学，不太了解这些数学基础知识的读者，可先掌握附录中的有关知识。对于初学者来说，可略去第十一章（可计算的一般均衡模型）和第十二章（最优控制理论在管理科学中的应用）的内容。

书中所引用的我国经济管理学界的专家和学者有关研究成果的案例中，作者对有些案例改动较小，目的是为了让读者比较和借鉴分析问题的思想和方法。有些案例中所用到少数方法，书中未专门介绍，但这并不影响读者阅读，必要时可参见有关书籍。

在本书编写的过程中，作者经常得到中南矿冶学院管理工程系李剑华教授和湖南财经学院黄实华教授的精心指导，并承肖申生和戴超伦两位同志精心审阅，中南矿冶学院管理工程系许振苏老师曾审阅了部分书稿。李希平同志提供了湖南省浏阳县经济、社会长远规划的有关案例，规划课题组胡梅魁、丛善本、曹木君等同志也提出了宝贵意见。长沙市计委吴小平、瞿丽霞、李健明、李艳新同志，湖北省自动化研究所周坤华同志，以及湖南省湘潭市东坪印刷厂的同志们为本书的编印和校样做了许多工作，作者在此一并致谢。

由于作者才疏学浅，书中错误在所难免，敬请经济、管理学界的专家和学者们批评指正。

作　者

一九八四年八月

目 录

绪论

这本实用经济数学的方法及案例分析主要介绍数理经济学、经济计量学、实用预测学、和运筹学、最优控制论的一些基本理论和方法，为进行社会经济活动分析、制定发展方针和政策提供一些工具。

经济活动，是人类生存和发展不可少的实践活动；经济过程，则是人类社会欲求文明进步极其重要的基本过程，它的发展必须遵循人类社会所固有的经济规律。

数理经济学是用数学的语言描述人们经济活动规律的一门学科。确切地说，数理经济学是用数学的符号叙述经济理论，它并不是经济学的一个独特分支。从政府制定发展方针的意义上来说，数理经济学是进行经济活动分析的一种方法。在政府进行经济活动分析时，使用数学符号来描述实际的问题，引用已知的数学定理和公式进行推理运算。就分析的具体经济问题而言，可以是微观或宏观的。

经济计量学是根据统计资料、运用数学方法对经济活动发展规律和经济关系进行定量分析的一门经济学科。在我国也称为数量经济学，它是二十世纪三十年代产生的一门新兴学科。近年来在我国也引起了重视，1980年成立了中国数量经济研究会，并相继建立了从事数量经济研究和有关实际应用的机构。

经济计量学是以经济理论和数理经济学为理论基础，依据经济活动的统计资料，利用现代数学方法和计算技术，在考察经济活动的数量表现、数量特征、数量变化和数量关系的基础上研究经济现象、分析经济过程、探讨经济规律，为预测经济发展的趋势、水平和制定经济发展的规划提供参考依据。它侧重于使经济理论具有数量的表示，使一般实际的经济现象能具体地用经济变量和经济关系式给出，使某经济关系中的各因素的依存关系统一于经济计量模型之中。经济计量模型由一个方程或一组联立方程所构成。马克思认为，一种科学只有成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。我们在进行经济活动分析时，借助于数学工具，通过定量分析，有助于具体认识经济现象的本质及其发展规律，丰富和发展经济理论。任何经济现象都是质和量的辩证统一，一定的质规定一定的量，一定的量也表现一定的质。经济现象质和量都是客观存在的，具有现实的经济内容。按照对立统一规律和量变与质变规律，将定性分析和定量分析结合起来，对经济现象的质和量进行研究，符合马克思主义的科学的认识论。经济理论研究经济现象的本质及其发展规律，为定量分析提供理论依据。定量分析离开马克思主义政治经济理论的指导，离开定性分析，就数论数，就会走到纯数学形式主义的岐途上去。另一方面，经济现象在质的规定下，还有数量方面，经济发展规律在不同地点、时间、条件下还有不同的数量表现，如国民经济发展的速度、比例、生产的规模和生活水平，积累和消费水平在不同地点、时间、条件下各不相同，必须借助于定量分析才能得到具体刻划和论证。忽视定量分析，依据片面的认识去决定方针、政策来指导工作，必然会产生有害的结果。因此，运用经济计量模型，将定性分析和定量分析结合起来，有助于全面地认识经济现象的本质及其发展规律。

通过定量分析可以预测经济现象未来的发展趋势，根据经济计量模型中所含因素过去的数值，从动态上进行定量分析，可以研究各因素的变动对经济现象发展变化的影响，预测其未来发展的变化趋势。预测是决策的前提。进行预测可以为决策者进行判断作出决策提供参考数据，以便于采取措施，控制事物发展，有计划地进行社会主义四化建设。

依据经济计量模型，进行定量分析，采用不同的参数和变量，模拟经济体系的运行，可以得出不同的结果，提出不同的方案。决策者可以从不同的方案中选择最优方案作为参考，来制订政策、编制计划、作出经济决策。

例如，党和国家制定工资政策和物价政策，就要依据经济模型进行模拟预测。因为，既要根据统计资料了解工资和物价的历史和现状，也要了解工资和物价的不同提高程度将会造成的对各方面的不同影响。如果工资水平太低，就会影响职工的生活水平和劳动积极性；农村产品收购价格太低又会影响农民的生活水平和劳动积极性。工资水平太高，物价水平太高，又可能造成国家财政出现赤字、通货膨胀，进而影响人民生活。为了避免和克服这些现象的出现，党和国家就要依据预测资料了解不同调整方案可能造成的不同结果，以便采取不同的措施，选择最优方案，对工资和物价进行合理地调整。

又如，我们在制定经济政策的战略规划时，就要借助于经济计量有关模型，弄清楚本地区或本部门的产业结构、科学技术结构、消费结构、就业结构和资源结构。

按其研究经济对象范围的不同，经济计量通常分为宏观模型和微观模型。研究整个国民经济、某一地区、某一部门经济关系的经济计量模型属于宏观模型。研究某一经济单位（如个别企业、社队、家庭）、某种产品的经济计量模型属于微观模型。

按包括经济关系的多少不同，经济计量模型可分为单一方程模型与联立方程模型。只用一个方程研究自变量和因变量数量关系的模型是单一方程模型。用联立方程研究自变量和因变量多方面数量关系的模型是联立方程模型。

按包括方程个数的多少的不同，经济计量模型可分为大、中、小型模型。模型中所含方程式的个数超过一百个的为大型模型。模型中所含方程式的个数在三十与一百个之间的为中型模型。少于三十个的是小型模型。

按经济变量发生的时间不同，经济计量模型可分为动态模型和静态模型。模型所反映经济关系的经济变量，是在同一时期发生的，则这个模型为静态的。模型所反映经济关系的经济变量，是在不同时期发生的，则这个模型是动态的。

按模型所含变量次数的高低不同，经济计量模型可分为线性模型和非线性模型。模型是由变量（一个或多个）的一次方程构成的，则这个模型是线性的。模型是由变量（一个或多个）的二次以上方程构成的，则这个模型是非线性的

数理经济学为经济计量学方法的应用开辟出道路，确定经济规律大致的方向。这两个学科的共同之处是：都用数学关系式来表示经济关系，但数理经济学具有一般性和假定的精确性，排斥了不确定性，不考虑影响经济关系发生随机变化的随机因素；经济理论和数理经济学依假定给出问题的精确行为的模式，而经济计量学则具体的研究这种精确行为模式中产生离差的那些随机扰动。同时，从统计资料中计算出关系式中的参数值，提供关于模型的检验指标和置信度。从下面的例子中，我们可得到明确的说明。

经济理论中假定某一商品A的需求量Q取决于它的价格P_1，另一与其有关的商品的价格为P_2，消费者的收入为Y，消费偏好为W。数理经济学用线性需求函数形式来表示商品A的

需求关系：

$$Q=b_0+b_1P_1+b_2P_2+b_3Y+b_4W \quad (0\text{—}1)$$

其中b_i（$i=0, 1, 2, 3, 4$）为需求函数中的待定系数。

式（0—1）表明，商品A的需求量仅取决于方程右边的四个因素。然而，实际经济活动中的现象远非如此，人类由于各种其它社会因素影响而不太稳定的行为，可能导致在上述四个因素不变的情况下，商品A的需求量在一定幅度的范围发生波动。这并不是经济理论有错，只不过它只考虑了主要因素而忽略了随机因素的影响。在经济关系式中再引进一个随机变数μ来考虑这些"其它"因素的影响，于是，用经济计量学工具来研究需求函数时，其形式（随机的）为：

$$Q=b_0+b_1P_1+b_2P_2+b_3Y+b_4W+\mu \quad (0\text{—}2)$$

其中μ表示影响需求量的随机因素，称为随机干扰项。比较式（0—1）和式（0—2），显然可知μ的意义极为重大，它将数理经济学中的精确式和经济计量学中的随机式区别开来。数理经济学至多能确定所有b_i的符号和取值的大致范围，而经济计量学则可算出b_i在一定经济条件下的具体数值。因而，经济计量模型实用性和适用性更强一些。

在这里需要顺便指出的是：在本讲义中，凡是用到函数的连续性这一概念的地方，我们并没有专门加以说明，而假定这一条件总是成立的。例如，在一般正常情况下，某种商品的需求量Q为其价格P的单调递减的单值连续函数，对连续性的假定，并不是价格可以连续地变化，实际上价格只能间断地跳着变。我们所说的连续性，是指一定的价格，有着一定的销售量与之对应。论斤计两商品的销售量也符合这种连续性的假定。但是电视机、录音机只能按台出售，它们的销售量不具备连续性，不过对于一个庞大的市场来说，我们可以近视地把电视机、录音机的销售量视为连续函数。

第一章　基本概念和基础知识

第一节　经济数学模型的成分

经济数学模型通常用由变量所组成的一组方程式来描述所研究的经济现象。由于社会经济系统中的许多因素相互联系，这些方程对所采用的一组分析假设给出数学形式，然后借助于数学的理论和方法，对这些方程进行有关的数学推理、运算，从逻辑上推出一组结论。

一　变量、常量、参数和系数

变量是在给定的问题中其大小可以变化的量，也就是能取不同值的量。在经济学中，通常所使用的变量包括投入、产出、消费、积累、价格、利润、成本、收益、出口量和进口量等等。既然变量可取各种不同的值，因而只能用一符号而不用具体数字表示它。例如，我们可用P表示价格，用R表示收益，用C表示成本，用Y表示国民收入等等。

常量是在给定的问题中不会变化的量。例如供应方程的标准式为

$$Qs=-a+bP \quad (1\text{—}1)$$

其中的a和b，在给定的问题中为定值，而在不同的问题中可取不同的值，这样的量称为常量

或参数。象乘数一样，放在变量之前的数字或字母常量，又称为系数，如式（1—1）中的b。

内生变量（源于内的）是在研究的问题中，由经济数学模型所决定和解释的变量。也就是因变量，如式（1—1）中的Q_S。然而，在经济数学模型中也含有这样的变量，它是由模型外用已知数据的形式所给定的，这样的变量就称为外生变量（源于外的）。也就是自变量。

应该注意的是，某一模型的内生变量可能是另一模型的外生变量。例如在分析某产品的价格P时，变量P为内生变量，但在经济活动的供、产、销结构中，对某家使用该种产品作为投入要素的企业来说，其生产函数中的该种产品（作为投入要素）的价格P则为已知数，因而，此时P被认为是外生的。

二、方程式与均衡

虽然变量可以独立存在，但只有用方程或不等式描述出它们的互相关系时，才有实际的意义。

经济数学模型中的方程，按其所代表经济关系的不同，可分为以下几种：

行为方程，是指代表消费部门与生产部门经济活动之间行为关系的方程式。如经济函数中的消费函数和投资函数都是行为方程。

定义与均衡方程，是指为了明确定义和表明经济系统中的平衡关系而确定的方程式。例如，表示国民收入应等于消费、投资与政府开支的总和的方程，就是定义与均衡方程。

技术方程，是指反映有关经济现象间生产技术关系的方程式。例如反映产出与投入（劳动量、资金量）之间生产技术关系的生产函数，就是技术方程。例如设生产函数为：

$$Y = aK^{\alpha}L^{\beta} \qquad (1—2)$$

其中：Y—某种产品的产出

K—投入的资金量

L—投入的劳动量

a，α，β—参数。

式（1—2）就是一个技术方程。

当我们的模型包含均衡概念时，才具有均衡状态。若是这样的话，那么均衡状态就是一个方程，该方程描述达到均衡必须予先具备的条件。在经济学中，当市场上的供给量和需求量相等时，我们就称为市场均衡。若用Q_d表示需求量，用Q_S表示供给量，那么市场均衡的关系就表示为：

$$Q_d = Q_S \qquad [需求量 = 供给量]$$

在国外有些经济数学文献中，又把市场均衡称之为市场清理（*Market Clearing*），把满足均衡条件的价格称之为市场清理价格。

第二节　导数在经济学中的应用

一　导数在经济学中的概念

导数在经济学中的概念就是边际的概念。我们知道，在科学技术的发展史上，微积分和导数概念的创立是具有最伟大意义的事件之一；而边际概念的确立，将微分和导数引入了经济学，使经济学研究的对象从常量进入变量，这在经济学发展史上具有划时代的意义。下面让我们分析一个经济学中的例子。

例1，设由$K(x)$给出生产某种产品为x单位的成本函数（见图１—１）

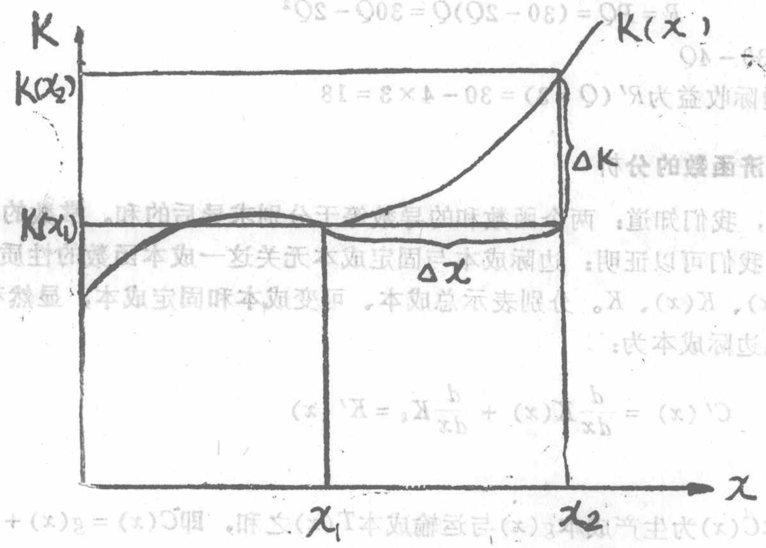


图　（１—１）

如果我们将产量自x_1单位增加到x_2单位，那么产量增加$\triangle x = x_2 - x_1$，则相应有一个成本增量$\triangle K = k(x_2) - k(x_1)$。如果假设成本函数$K(x)$是可微的，那么

$$K'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

表示在产量为x_1单位时边际成本，即表示在假定已经生产x_1单位的情况下，新添加一个单位的生产成本。现在我们把这个问题简单地叙述为：

如果$K(x)$表示成本函数，那么$K'(x)$表示边际成本。

由类似地分析，我们可以得到经济学几个常用的边际概念：

设$U(g)$为某厂商消耗某种物质g的效用函数。如果我们固定所有其余物质的消耗数量，则$U'(g)$就是这种物质g的边际效用。

设$f(x)$为一生产函数，也就是说将产出$f(x)$视为某种投入x的函数，而将其余所有投入的数量固定，则$f'(x)$就是该种投入x的边际生产。

设$R(Q)$表示总收益，则$R'(Q)$就表示边际收益。边际收益的定义为：附加销售一个商品引起总收益的变化。在下文中，将介绍一个边际收益应用的实例。

总之，经济学中的任何边际概念可以表示为其函数的导数。在下文中，我们将知道，边际概念在政府和企业经济活动分析中是一个很有用的概念。

例2 a）若总收益函数为

$$R = 75Q - 4Q^2$$

则边际收益为 $R'(Q) = 75 - 8Q$

b）若总成本函数为

$$C = Q^2 + 7Q + 23$$

则边际成本为 $C'(Q) = 2Q + 7$

例3．设需求函数为$P = 30 - 2Q$，求$Q = 3$的边际收益。

求得总收益函数为

$$R = PQ = (30 - 2Q)Q = 30Q - 2Q^2$$

取导数$R'(Q) = 30 - 4Q$

若$Q = 3$，那么边际收益为$R'(Q = 3) = 30 - 4 \times 3 = 18$

二　几个经济函数的分析

在微分学中，我们知道：两个函数和的导数等于分别求导后的和。常数的导数为零。应用这两个公式，我们可以证明：边际成本与固定成本无关这一成本函数的性质。

1）设用$C(x)$、$K(x)$、K_0分别表示总成本、可变成本和固定成本，显然有：$C(x) = K(x) + K_0$。那么边际成本为：

$$C'(x) = \frac{d}{dx}K(x) + \frac{d}{dx}K_0 = K'(x)$$

得已证明。

如果总成本$C(x)$为生产成本$g(x)$与运输成本$T(x)$之和，即$C(x) = g(x) + T(x)$，那么

$$C'(x) = g'(x) + T'(x)$$

2）如果$f(x)$是一个生产函数，即$f(x)$为某种产品的生产数，x为要素投入，那么$f'(x)$为边际生产。如果P为这项产品的固定价格，则$Pf(x)$为总产值，则可以得到货币单位为测度的边际成本为：

$$\frac{d}{dx}Pf(x) = Pf'(x)$$

3）如果$K(x)$是数量为x的某种产品的总成本，则$D(x) = \dfrac{K(x)}{x}$为平均成本。其变化率为：

$$D'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x) - \dfrac{K(x)}{x}}{x}$$

显然，要使平均成本变化率为零，必须使边际成本等于平均成本。

三　函数的极值

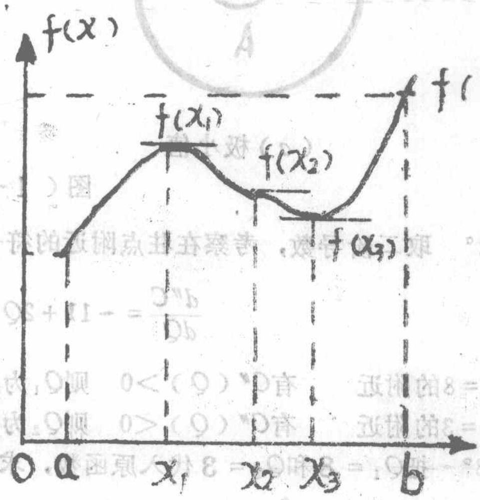
在经济活动分析和作经济规划时，我们经常会遇到求函数的极值，下面仅以一元函数为

例，对这个问题加以讨论。

1）函数的极值与极值点

图(1—2)所示为定义在区间$[a, b]$上的一元函数$f(x)$。

图(1—2)中有两个特殊点x_1和x_3。在x_1附近，函数$f(x)$的值以$f(x_1)$为最大；在x_3附近，函数以$f(x_3)$为最小。x_1与x_3分别称为函数的极大点与极小点，统称为极值点。$f(x_1)$和$f(x_3)$相应地称为函数的极大值与极小值，统称为极值。极值是相对于一点的附近而言的，仅有局部的性质；而函数的最大值与最小值，是指整个区间而言的，具有全局的性质。如图(1—2)中函数的最大值为$f(b)$，函数的最小值为$f(a)$。一般地，函数的极值不一定是最优值（最大值或最小值）。



图（1—2） 一元函数的极值

2）极值点存在的条件

1° 极值点存在的必要条件

我们在高等数学中已经学过：如果函数$f(x)$的一阶导数存在的话，则有极值点的必要条件为： $f'(x)=0$

仍以图(1—2)中所示的一元函数为例，由图可见，在x_1与x_3处均有$f'(x_1)=0$和$f'(x_3)=0$，即函数在该点处的切线与x轴平行。但一般来说，使$f'(x)=0$的点不一定都是极值点。例如图中的x_2点，虽然$f'(x_2)=0$，但并非极值点，而是一个拐点。因此，$f'(x)=0$仅为极值点存在的必要条件，而并非充分条件。通常称$f'(x)=0$的点为驻点。极值点必为驻点，但驻点不一定是极值点。驻点是否为极值点可以通过函数的二阶导数来判断。

2° 极值点存在的充分条件

若在驻点附近有$f''(x)<0$时，则该点为极大值点；

若在驻点附近有$f''(x)>0$时，则该点为极小值点。

在图(1—2)中的x_2处，$f'(x)=0$，其右侧有$f''(x)<0$，但其左侧$f''(x)>0$，因此它不是一个极值点。所以函数的二阶导数的符号成为判别极值点的充分条件。

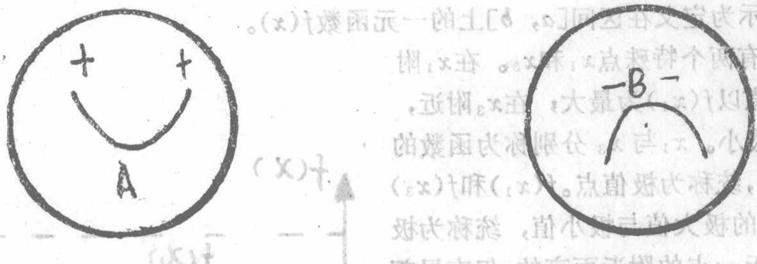
在经济学的意义上，二阶导数是计算边际函数（已求得的一阶导数）的瞬时变化率。在驻点附近，当二阶导数小于零，就意味着函数由驻点向下移动，因而该点存在极大值；该二阶导数大于零，这表明函数由驻点向上移动，因而该点存在极小值。简单地说：正的二阶导数（＋＋）表示曲线由驻点向上移动；负的二阶导数（－－）表示曲线由驻点向下移动。为了帮助记忆，我们采用图(1—3)来表示。

例 4 设总成本函数为$C=31+24Q-5.5Q^2+\frac{1}{3}Q^3$，求其极大值和极小值。

解1° 先求驻点，取函数的导数，并令其为零

$$\frac{dC}{dQ}=24-11Q+Q^2=0$$

可求得驻点为$Q_1=8 \quad Q_2=3$



（a）极小值　　　　　　　　（b）极大值

图（1—3）

2° 取二阶导数，考察在驻点附近的符号

$$\frac{d''C}{dQ}=-11+2Q$$

在$Q_1=8$的附近　　有$C''(Q)>0$　则Q_1为极小值点；

在$Q_2=3$的附近　　有$C''(Q)<0$　则Q_2为极大值点，

3° 把$Q_1=8$和$Q_2=3$代入原函数，求出极小值和极大值分别为：

$$C(Q_1)=31+24(8)-5.5(8)^2+\frac{1}{3}(8)^3=41.67$$

$$C(Q_2)=31+24(3)-5.5(3)^2+\frac{1}{3}(3)^3=62.5$$

第三节　函数的弹性

一　弹性的定义

设$f(x)$为变量x的函数，那么

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\text{和}\frac{h}{x}$$

分别称为函数$f(x)$的增长率和自变量x的增长率。

我们把函数$f(x)$的增长率和自变量x的增长率之比定义为函数的弹性，记为$\frac{Ef(x)}{Ex}$或σx，那么有

$$\frac{Ef(x)}{Ex}=\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}:\frac{h}{x}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{x}{f(x)}$$

如果$f(x)$可微，则有：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{x}{f(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot$$

$$\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{\dfrac{df(x)}{f(x)}}{\dfrac{dx}{x}} \qquad (1-3)$$

亦即 $\sigma_x = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ （1—4）

经济学的价格弹性是供求量变化率同价格变化率之比。数学的表示式为

$$\sigma=\frac{dQ/Q}{dP/P}$$

为了运算的方便，价格弹性还经常表示为如下形式：

$$\sigma=\frac{dQ/dP}{Q/P}=\frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}} \qquad (1-5)$$

二　利用函数的图形计算弹性

这里仅以供给函数和需求函数为例来介绍。由于$\sigma=\dfrac{dQ/dP}{Q/P}=\dfrac{\text{边际函数}}{\text{平均数值}}$，就可以从边际函数和平均函数来计算供给弹性（$\sigma_S$）和需求弹性（$\sigma_d$）。边际函数值等于过曲线定点的切线的斜率，平均函数值等于曲线定点到原来点的连线的斜率。

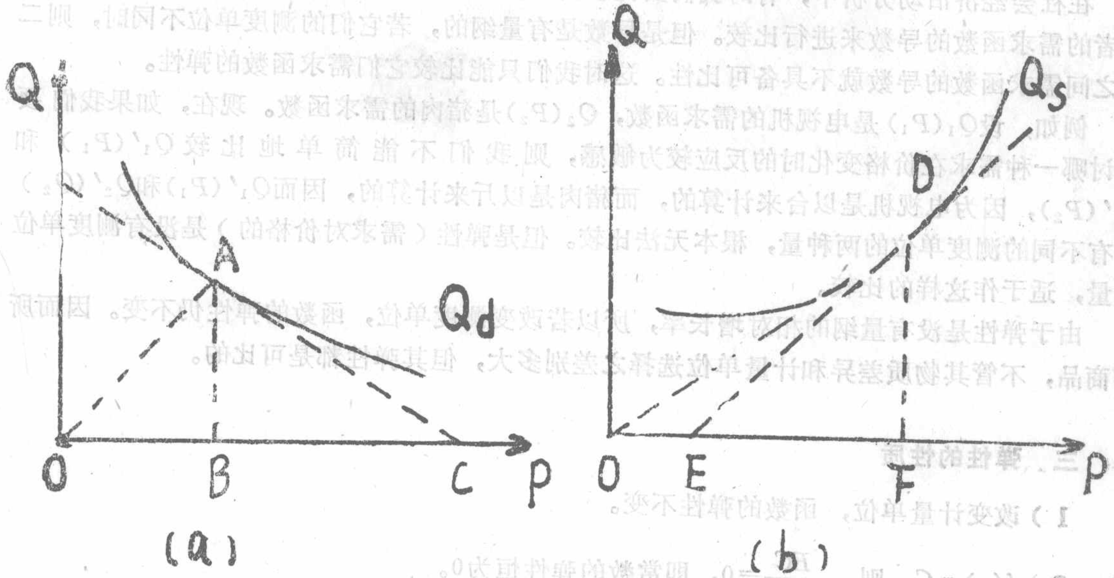


图　（1—3）

图1—4（a）所示的需求函数，在点A的边际函数的斜率是$-AB/BC$，在点A的平均函数的斜率AB/OB，那么

$$\sigma_d = \frac{-AB/BC}{AB/OB} = -\frac{OB}{BC}$$

图（1—4（b））所示的供给函数：在点D的边际函数的斜率是DF/EF，在点D的平均函数的斜率为DF/OF。那么

$$\sigma_S = \frac{DF/EF}{DF/OF} = \frac{OF}{EF}$$

例5．设需求函数为$Qd = 560 - 3P - P^2$，试确定当$P = 10$时需求对价格的弹性。

解　先取导数$\frac{dQ}{dP} = -3 - 2P$

再代入已知的价格水平（$P = 10$）

$$\frac{dQ}{dP} = -3 - 2(10) = -23$$

求出$P = 10$时的产出水平

$$Q = 560 - 3(10) - (10)^2 = 430$$

把这些值代入弹性公式

$$\sigma_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -23\frac{10}{430} = -0.5$$

弹性是一种无量纲的量，因为它是用因变量的变化率与自变量的变化率之比来度量的，所以它与因变量、自变量所取的测度单位无关。

在社会经济活动分析中，有时我们要比较两种商品对价格反应的灵敏度，你可能想到用二者的需求函数的导数来进行比较。但是导数是有量纲的，若它们的测度单位不同时，则二者之间需求函数的导数就不具备可比性。这时我们只能比较它们需求函数的弹性。

例如，设$Q_1(P_1)$是电视机的需求函数，$Q_2(P_2)$是猪肉的需求函数。现在，如果我们要探讨哪一种需求在价格变化时的反应较为敏感，则我们不能简单地比较$Q_1'(P_1)$和$Q_2'(P_2)$，因为电视机是以台来计算的，而猪肉是以斤来计算的，因而$Q_1'(P_1)$和$Q_2'(Q_2)$是有不同的测度单位的两种量，根本无法比较。但是弹性（需求对价格的）是没有测度单位的量，适于作这样的比较。

由于弹性是没有量纲的相对增长率，所以若改变测度单位，函数的弹性仍不变。因而所有商品，不管其物质差异和计量单位选择之差别多大，但其弹性都是可比的。

三、弹性的性质

1）改变计量单位，函数的弹性不变。

2）$f(x) = C$，则，$\frac{EC}{Ex} \equiv 0$，即常数的弹性恒为0。

3）$f(x) = ax$，则$\frac{E(ax)}{Ex} = 1$，即齐次线性函数的弹性等于1。

4）$f(x)=ax+C$，则 $\dfrac{Ef(x)}{Ex}=\dfrac{ax}{ax+c}$，即线性函数的弹性为双曲函数。

5）$f(x)=ax^b$，则 $\dfrac{Ef(x)}{Ex}=b$，即幂函数$f(x)=ax^b$的弹性等于其指数b。

6）①$f(x)=ae^{\lambda x}$，则$\dfrac{Ef(x)}{Ex}=\lambda x$

②$f(x)=ae^{K(x)}$，则$\dfrac{Ef(x)}{Ex}=K'(x)x$

7）$$\frac{E}{Ex}[f(x)\pm g(x)]=\frac{f(x)\dfrac{Ef(x)}{Ex}\pm g(x)\dfrac{Eg(x)}{Ex}}{f(x)\pm g(x)}$$

两个函数和的弹性为各自弹性的加权平均数。

8）$$\frac{E[f(x)\cdot g(x)]}{Ex}=\frac{Ef(x)}{Ex}+\frac{Eg(x)}{Ex}$$

两个函数积的弹性为各自弹性的和。

9）$$\frac{E\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]}{Ex}=\frac{Ef(x)}{Ex}-\frac{Eg(x)}{Ex}$$

函数的商的弹性为被除式和除式的弹性的差。

现在我们根据弹性的定义来验证性质1，其余的几个性质，作为练习留给读者。

设用一种计量尺度测得因变量为y，自变量为x，现在改变计量单位，测得的因变量为$Y=\lambda y$，自变量为$X=\mu x$。那么由弹性的计算公式（1—5），可得因变量对自变量的弹性为：

$$\frac{EY}{EX}=\frac{dY}{dX}\cdot\frac{X}{Y}=\frac{d(\lambda y)}{d(\mu x)}\cdot\frac{\mu x}{\lambda y}=\frac{\lambda dy}{\mu dx}\cdot\frac{\mu x}{\lambda y}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}$$

这就是原计量尺度测得的弹性，得已证明。

最后，我们给出求复合函数弹性的法则：

设y是μ的函数，而μ又是x的函数，即$y=f[\mu(x)]$，则有

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{Ey}{E\mu}\cdot\frac{E\mu}{Ex}$$

也就是说，复合函数的弹性等于函数对中间变量的弹性与中间变量对自变量弹性的乘积。

下面举几个计算函数弹性的例子。

例6 $f(x)=5x$

解 由性质3，有

$$\frac{Ef(x)}{Ex}=\frac{E(5x)}{Ex}=1$$