

# 电机内的电磁场问题

哈尔滨电工学院

一九七八年五月

# 目 录

绪 论	电机内的电磁场问题	(1)
第一章	恒定磁场的基本理论	(3)
第二章	无界空间中的恒定磁场	(15)
第三章	具有铁磁边界时恒定磁场的解法 (I) —— 镜像法	(33)
第四章	具有铁磁边界时恒定磁场的解法 (II) —— 直接求解拉普拉斯方程 和泊松方程	(54)
第五章	用保角变换法解二维恒定无旋磁场	(97)
第六章	恒定磁场的图解法	(136)
第七章	恒定磁场的数值解法	(148)
第八章	时变电磁场的基本理论	(182)
第九章	正弦电磁场	(193)
第十章	电磁场的暂态	(240)
第十一章	电磁力	(253)
第十二章	汽轮发电机的端部磁场	(279)
附 录	椭圆积分和雅可比椭圆函数	(312)

# 绪论 电机内的电磁场问题

## 0—1 概 述

电机是一种电磁—机械能量转换装置。为了产生能量转换，电机内必须要有磁场（或电场）作为耦合场。当转子旋转时，耦合场受到扰动，磁场及其储能发生变化，电枢绕组内就会产生感应电势，转子上则将受到电磁力的作用；于是机械能就转换为电能或反之。因此，要研究旋转电机内能量转换的机制，必须对电机内的磁场分布（尤其是气隙磁场和槽内磁场的分布）有清楚的了解。

如众所周知，电机的运行性能取决于电机的参数和损耗。为了准确地进行电机的磁路、参数、损耗和电磁力等计算，亦必须知道气隙、铁芯、槽内、绕组端部以及某些结构部件附近的电磁场分布。因此研究电机内的电磁场，对设计一台性能良好的电机具有重要的意义；对于大型同步发电机（汽轮发电机和水轮发电机）尤其是这样。

此外，有些问题根本不能用路的概念而必须用电磁场的理论来研究、解决；例如具有实芯转子的异步和同步电机，开槽以后电磁转矩的分布等等。对于这类问题，电磁场理论的重要性是不言而喻的。

但是由于实际电机的边界形状比较复杂，加上铁芯饱和的影响，利用解析法来求解电机内的电磁场问题常常碰到一系列的困难。所以，多年来电磁场理论在电机中的应用受到一定的限制；所解决的问题大多是局部的、经过简化的。近年来由于计算技术的发展，情况发生了很大的变化。对于特定的电机，根据边界形状和部件所用材料；我们可以把定子、转子、气隙等不同区域分成许多网格，然后把电磁场方程离散化，再用电子计算机逐次渐近地算出各点的磁场值；这样，我们就可以较准确地算出考虑饱和、定转子开槽等一系列因素时，整个电机横断面内磁场的整体分布。

## 0—2 电机内的电磁场问题

从作用上看，旋转电机内的电磁场大体上可分成以下几类：

- (1) 气隙磁场；
- (2) 绕组端部磁场；
- (3) 槽内漏磁场和凸极电机主极的极间漏磁场；
- (4) 实芯转子中的电磁场。

其中(1)为主磁场；(2)和(3)是漏磁场。

按照是否随时间而变化，电机内的电磁场可分为

(1) 恒定磁场;

(2) 时变电磁场。

同步电机的主极磁场、极间漏磁场等属于恒定磁场。交流电机定子槽内导体的涡流损耗、实芯转子异步电机内的电磁场问题等均属于时变电磁场问题。由于电机中时变电磁场的变化频率很低，电机的线性尺寸比电磁波的波长要小得多，因此位移电流可以忽略不计；在电磁场理论中，这种场称为准稳电磁场。对于准稳电磁场，在导电媒介质中，马克斯威尔方程简化为涡流方程。研究实芯转子或导体中的涡流时，都是从涡流方程出发来求解。对于非导电媒介质，或者可以忽略导体（包括导电边界面）中的涡流和集肤效应的情况，马克斯威尔方程进一步简化为拉普拉斯方程或泊松方程，即所研究的问题实质上可以作为恒定磁场问题来处理；例如气隙磁场，电枢槽内的漏磁场，变压器原、副绕组间的漏磁场等。

本书先研究电机中的恒定磁场问题，然后研究时变电磁场问题。研究时着重注意分析和解决问题的方法，同时注意到联系实际。由于电机内的磁场问题（例如气隙磁场、槽内磁场等）大多可以简化成二维的情况，所以在整个分析中，我们将以二维问题为主。对于某些需要作为三维问题来处理的，例如汽轮发电机的端部磁场，考虑端部效应时实芯转子异步电机内的电磁场，我们将引入三维的严格分析。

# 第一章 恒定磁场的基本理论

电机中的电磁场问题，很多可以作为恒定磁场来研究。本章首先说明恒定磁场的基本定律及其积分和微分形式，然后介绍磁场的磁位函数和力线函数、标量磁位和向量磁位，并导出磁位所满足的微分方程，最后对恒定磁场的解法作一简介。

## 1—1 恒定磁场的基本方程

不随时间变化的电流称为恒定电流。在恒定电流的周围将形成恒定磁场。恒定磁场的分布可用磁感强度  $\mathbf{B}$  来描述。

实验证明，在恒定磁场中，磁场强度  $\mathbf{H}$  和磁感强度  $\mathbf{B}$  分别遵守安培全电流定律和磁通连续性定律。下面对这两条定律作一简要说明。

**安培全电流定律** 在恒定磁场内，磁场强度  $\mathbf{H}$  沿任意闭合回线  $C$  的线积分值，恰好等于通过以回线  $C$  作为边缘的曲面  $S$  上的全电流值，这个规律就称为安培全电流定律。用数学形式表示时，

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-1)$$

式中  $\mathbf{J}$  为通过面积  $d\mathbf{s}$  处的电流密度向量，积分  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$  表示通过曲面  $S$  的全电流值；回线  $C$  的正方向与面积  $S$  的正方向之间符合右手螺旋关系。

(1—1) 式是安培全电流定律的积分形式。在研究磁场问题时，常需知道磁场中任意一点的  $\mathbf{H}$  值，因此应设法找出与 (1—1) 式相当的微分形式。

利用向量分析中的斯托克斯定理，即

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot}\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

可得

$$\int_S (\text{rot}\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-2)$$

由于上式对任意闭合回线  $C$  以及把  $C$  作为边缘的任意曲面  $S$  都成立，所以等式左、右积分号内的被积函数应该相等；即

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1-3)$$

此式就是安培全电流定律的微分形式，它与 (1—1) 式相当。

(1—3) 式说明，磁场强度的旋度就等于该点的电流密度。

研究电机中的磁场问题时，常用的坐标系为直角坐标系和圆柱坐标系。在直角坐标系中，旋度的表达式为：

$$\begin{aligned} \text{rotH} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \\ (\text{或 } \nabla \times \mathbf{H}) &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \\ &\dots\dots (1-4) \end{aligned}$$

在圆柱坐标中:

$$\begin{aligned} \text{rotH} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r \frac{1}{r} & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\theta \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ &\quad + \mathbf{a}_z \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1-5)$$

**磁通连续性定律** 分析和实验表明,对空间任意区域,进入闭合曲面 $S$ 的磁通量与出去的磁通量恒等;即磁感强度 $\mathbf{B}$ 对闭合曲面 $S$ 的面积分恒等于零,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-6)$$

上式说明,磁通量是处处连续的,无头无尾的。这个规律就称为磁通连续性定律。

(1-6)式是积分形式。利用向量分析中的高斯定理或者散度的定义,不难证明

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1-7)$$

上式就是磁通连续性定律的微分形式。

(1-7)式说明,磁感强度的散度恒等于零,即 $\mathbf{B}$ 是一个无源场。

在直角坐标中,散度的表达式为:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ (\text{或 } \nabla \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (1-8)$$

在圆柱坐标中,

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-9)$$

**介质的宏观磁性** 介质的电磁性质是很复杂的。普遍而言,介质内每点的磁场强度 $\mathbf{H}$ 均应为该点磁感强度 $\mathbf{B}$ 的函数,即

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}) \quad (1-10)$$

具体的函数关系取决于介质的物理性质。(1-10)式就称为介质的成份方程。

对于各向同性的磁介质, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 为同方向,于是

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-11)$$

此时介质的导磁系数  $\mu$  为一标量。若介质为线性，则  $\mu$  为一常值；若介质为非线性，则  $\mu$  不是一个常值，而是磁感强度  $B$  的函数。

在电机中，常遇的介质有两种，一是空气，一是铁芯。空气的导磁系数  $\mu_0$  为一常值， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨/米。铁芯则是一种非线性介质，且严格来讲  $B$  与  $H$  之间不是单值关系。但在工程分析中，一般把铁芯的磁化曲线作为其  $B \sim H$  关系，即认为  $B \sim H$  关系为单值关系；且在多数情况下近似地认为  $\mu_{Fe} = \text{常值}$ 。

**恒定磁场的基本方程** 综上所述，可知在恒定磁场中

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

(1-12) 式就是恒定磁场的基本方程。

## 1-2 标量磁位和向量磁位

按照磁场强度的旋度是否等于零，恒定磁场分为无旋场和旋度场两种。从(1-12)式可知，在电流密度  $\mathbf{J} = 0$  处（载流区之外）， $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ，该处的磁场就是无旋场；在  $\mathbf{J} \neq 0$  处（载流区内部）， $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$ ，该处的磁场为旋度场。

**无旋场和标量磁位** 由向量分析可知，旋度为零的向量场总可以表示为一梯度场。在无旋场中，由于磁场强度的旋度为零，所以磁场强度可表示为一标量  $\Omega$  的梯度，即

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega \quad (1-13)$$

$\Omega$  称为无旋场的标量磁位。

在直角坐标中，梯度的表达式为

$$\text{grad } \Omega = \mathbf{i} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-14)$$

由于

$$\mathbf{H} = \mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z$$

所以

$$H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-15)$$

在圆柱坐标中，

$$\text{grad } \Omega = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-16)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_r H_r + \mathbf{a}_\theta H_\theta + \mathbf{a}_z H_z$$

$$\therefore H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-17)$$

沿任意方向  $l$  上标量磁位的方向导数  $\frac{\partial \Omega}{\partial l}$ ，应该等于磁场强度向量  $\mathbf{H}$  在该方向上投影的负值，即

$$\frac{\partial \Omega}{\partial l} = -H \cos \alpha \quad (1-18)$$

式中  $\alpha$  为磁场强度  $\mathbf{H}$  与选定方向  $l$  间的夹角 (图1-1)。当  $\alpha = 90^\circ$  时,  $\cos \alpha = 0$ ,  $\frac{\partial \Omega}{\partial l} = 0$ , 即  $\Omega(x, y, z) = \text{常值}$ ; 这一曲面 (曲线) 就称为标量等磁位面 (线)。由此可见, 标量等磁位面 (线) 和磁力线互成正交。

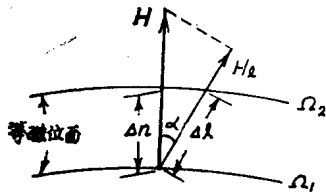


图1-1 标量磁位的梯度与方向导数的关系

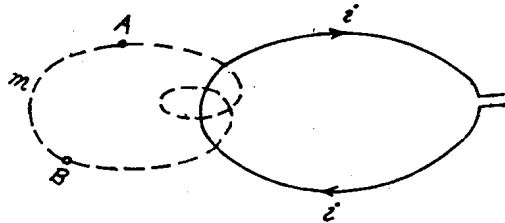


图1-2 标量磁位的多值性

标量磁位这一概念仅在无旋场中存在, 且  $A$ 、 $B$  两点间的标量磁位差可为多值、循环函数, 其值与是否环绕载流导体有关 (即与路径有关)。例如在图1-2中, 若从  $A$  点出发, 环绕电流  $i$  后到达  $B$  点, 则  $A$ 、 $B$  两点的磁位差  $\Omega_{AB}$  应为

$$\Omega_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \int_{AmB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \Omega_{AmB} \quad (1-19)$$

式中  $k$  为环绕电流  $i$  的次数,  $\Omega_{AmB}$  为从  $A$  点经  $m$  到达  $B$  点 (即不环绕电流  $i$ ) 时  $A$ 、 $B$  两点的磁位差。

对均匀介质, 把 (1-13) 式代入 (1-12) 式, 可得

$$\text{div} \mathbf{B} = \mu \text{div} \mathbf{H} = -\mu \text{div} (\text{grad} \Omega) = 0$$

或

$$\text{div} (\text{grad} \Omega) = \nabla^2 \Omega = 0 \quad (1-20)$$

(1-20) 式说明, 在无旋场中, 标量磁位  $\Omega$  满足拉普拉斯方程。

在直角坐标中, 拉普拉斯方程为:

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-21)$$

在圆柱坐标中,

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-22)$$

对二维空间内的无旋场, 除磁位函数  $\Omega$  外, 还可定义一个力线函数  $\Psi$ ,  $\Psi = \text{常值}$  的曲线即为磁力线。由于磁力线和等位线互相正交 (图1-3), 所以

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\Omega=\text{常值}} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{常值}}} \quad (1-23)$$

这样, 已知磁位函数, 即可导出力线函数, 反之亦然。以后可知, 在二维无旋场中,  $\Omega$  和  $\Psi$  是一对共轭函数, 它们各自满足拉普拉斯方程;  $\Omega + j\Psi$  将组成一个复磁位函数。



无旋场除了可用标量磁位  $\Omega$  来表征和计算之外, 还可用向量磁位  $\mathbf{A}$  来分析、计算。可以证明, 无旋场内向量磁位  $\mathbf{A}$  同样满足拉普拉斯方程 (参看 1—30 式)。换言之, 求解无旋场的问题, 实质上是一个求解满足特定边界条件的拉普拉斯方程问题。

**旋度场和向量磁位** 在旋度场中  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$ ,  $\mathbf{H}$  不能用一个梯度场来表示, 因而不存在标量磁位的概念。但是, 由向量分析可知: 一个散度为零的向量场总可以表示为另一向量的旋度场。由于磁感强度  $\mathbf{B}$  的散度恒等于零, 故为便于计算, 在旋度磁场中可以定义一个向量磁位  $\mathbf{A}$ , 使

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (1-24)$$

并令

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1-25)$$

这样就可得到

$$\text{rot} \mathbf{B} = \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \star \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1-26)$$

或

$$\star \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1-27)$$

式中  $\star$  是作用于向量  $\mathbf{A}$  的一个向量拉普拉斯算符, 其定义为

$$\star \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) \quad (1-28)$$

(1—27) 式就是向量磁位  $\mathbf{A}$  所满足的微分方程, 这个式子是一个向量方程, 称为向量泊松方程。

对于直角坐标, 经过运算可知,  $\star \mathbf{A}$  恰好等于标量拉普拉斯算符  $\nabla^2$  分别作用于  $A_x$ 、 $A_y$  和  $A_z$  所组成的向量, 即

$$\star \mathbf{A} = i \nabla^2 A_x + j \nabla^2 A_y + k \nabla^2 A_z \quad (1-29)$$

此时整个向量方程式可以分解成三个标量方程式, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

(1—30) 式说明: 在旋度场中, 向量磁位及其在直角坐标内的三个分量都满足泊松方程; 所以在直角坐标中, 求解旋度磁场问题实质上是一个求解满足特定边界条件的泊松方程问题。

① 当利用向量磁位  $\mathbf{A}$  来描述恒定磁场时, 应注意到  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  不是一与一的对应关系, 而是多、一对应关系; 因为在  $\mathbf{A}$  上加上任一矢量  $\nabla \varphi$ , 仍能得到同一的磁感强度  $\mathbf{B}$ , 即  $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。由于任一矢量场均可表示为无旋场  $\mathbf{A}'$  和无源场  $\mathbf{A}''$  的叠加, 向量磁位  $\mathbf{A}$  可任意加上  $\nabla \varphi$  就意味着  $\mathbf{A}$  的无旋场部份  $\mathbf{A}'$  是任意的, 只有无源场部份  $\mathbf{A}''$  才有确定的意义, 因此通常取  $\mathbf{A}' = 0$ , 于是  $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$ , 而  $\text{div} \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}'' = 0$ 。

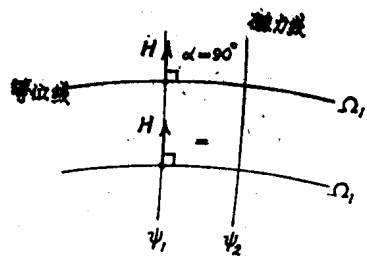


图 1—3 磁位函数和力线函数

向量磁位不但在旋度场中存在，在无旋场中亦存在。在无旋场中，由于  $\mathbf{J} = 0$ ，所以向量磁位满足拉普拉斯方程。

由泊松方程解出向量磁位后，根据 (1-24) 式，即可求出磁感强度  $\mathbf{B}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= iB_x + jB_y + kB_z \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

对二维磁场， $\mathbf{J} = kJ_z$ ， $J_x = J_y = 0$ ； $\mathbf{A} = kA_z$ ， $A_x = A_y = 0$ ；因此只要求解  $A_z$  的二维泊松方程即可，即

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (1-32)$$

此时

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1-33)$$

这实质上就相当于把求解旋度磁场中矢量  $\mathbf{B}$  的问题，转化为一个求解  $A_z$  的标量泊松方程问题。

对于圆柱坐标，根据向量拉普拉斯算符  $\nabla^2$  的定义，经过运算以后可知，向量磁位  $\mathbf{A}$  的三个分量  $A_r$ 、 $A_\theta$  和  $A_z$  应满足下列方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -\mu J_r \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} &= -\mu J_\theta \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -\mu J_r \\ \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} &= -\mu J_\theta \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

(1-35) 式说明，在圆柱坐标中，分量  $A_z$  单独满足标量泊松方程， $A_r$  和  $A_\theta$  则组成联立偏微分方程组。

对二维磁场， $\mathbf{J} = a_z J_z$ ， $J_r = J_\theta = 0$ ； $\mathbf{A} = a_z A_z$ ， $A_r = A_\theta = 0$ ，因此仅需求解  $A_z$  的二维泊松方程即可，即

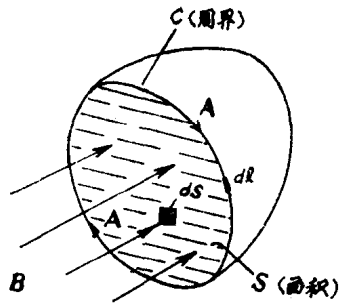


图1—4 由向量磁位  $\mathbf{A}$  求磁通量  $\Phi$

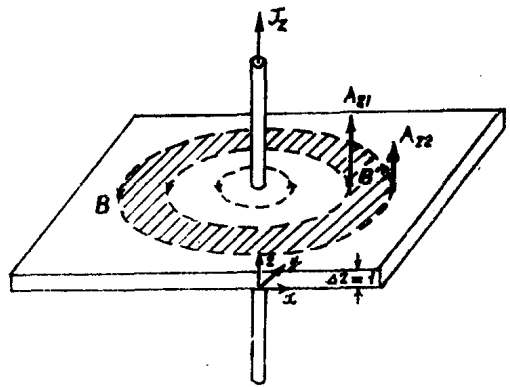


图1—5 二维磁场问题中  $J_z$ 、 $A_z$ 和 $\Phi$ 的关系

$$\nabla^2 A_z = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J_z \quad (1-36)$$

向量磁位求出后，通过面积  $S$  的磁通量  $\Phi$  即可求出（图1—4）：

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A_r dx + A_\theta dy + A_z dz \end{aligned} \quad (1-37)$$

上式说明，通过面积  $S$  的磁通量就等于向量磁位  $\mathbf{A}$  沿该曲面周界线  $C$  的回路积分值。

对二维磁场问题，通过单位轴向长度的磁通量  $\Delta\Phi$  为（图1—5）：

$$\Delta\Phi = \int_0^1 A_{z2} dz - \int_0^1 A_{z1} dz = (A_{z2} - A_{z1}) \int_0^1 dz = \Delta A_z \quad (1-38)$$

故向量磁位将具有力线函数的性质  $A_z = \mu\Psi$ ，而等  $A$  线将与磁力线重合。

### 1—3 恒定磁场的边界条件

在实际问题中，在所研究的区域内，常会遇到不同  $\mu$  值的磁介质形成交界面的情况（例如在电机中，气隙和铁芯形成交界面）。此时常需知道由一种介质进入另一种介质时，磁感强度  $\mathbf{B}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  发生怎样的变化。

在不同介质形成的交界面上，由于介质的性质有一突变，故磁场亦会有突变；因此在交界面处磁场基本方程的微分形式已不再适用，须用新的关系——磁场的边界条件来代替。对求解具有分界面和特定边界的磁场问题时，边界条件是必不可少的。

在交界面处，磁场基本方程组的积分形式仍然有效，故边界条件可据此推出。

**交界面上电流密度为零或有限值时** 平行于交界面作一小扁平匝，如图1—6所示。把磁通连续性定律应用于该小扁匝，并令  $S_1$  和  $S_2$  的面积  $\Delta s \rightarrow 0$ ，再考虑到小匝侧面的面积为高阶无穷小量，可得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta s = 0$$

即

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1-39)$$

或

$$\mu_1 H_1 \cos \theta_1 = \mu_2 H_2 \cos \theta_2 \quad (1-40)$$

式中  $\theta$  为磁场与交界面法线间的夹角。(1-39) 式说明, 磁场通过交界面时, 磁感强度的法向分量是连续的。

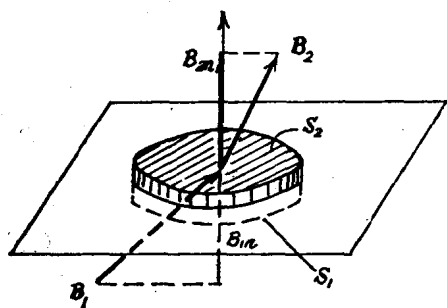


图1-6 交界面两边磁感强度法向分量的关系

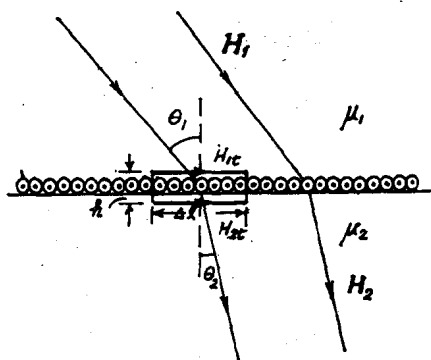


图1-7 交界面两边磁场强度切向分量的关系

再考虑图 1-7 所示小扁图路, 此图路的长边  $\Delta l$  与交界面平行,  $\Delta l \rightarrow 0$ ; 短边  $h$  为高阶无穷小量。对此图路应用安培全电流定律, 可得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) \Delta l = Jh \cdot \Delta l$$

由于电流密度  $J$  为零或有限值, 故

$$\lim_{h \rightarrow 0} (H_{1t} - H_{2t}) = \lim_{h \rightarrow 0} Jh = 0 \quad (1-41)$$

$$\therefore H_{1t} = H_{2t} \quad (1-42)$$

或

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2 \quad (1-43)$$

(1-43) 式说明, 若交界面上的电流密度为零或有限值, 磁场通过交界面时, 磁场强度的切向分量是连续的。

(1-39) 和 (1-42) 式这两个式子就是恒定磁场的边界条件。

将 (1-43) 式除以 (1-40) 式, 可得

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (1-44)$$

若交界面的一边 (例如区域 2) 为铁磁物质, 另一边为空气; 并设  $\mu_2 = \mu_{Fe} = \infty$ , 则上

式变为  $\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = 0$ 。此时可有以下几种情况:

1. 铁芯为单连域, 铁内无载流导体。对这种情况, 磁力线从空气进入铁芯时垂直

于铁芯表面,  $\theta_1 = 0^\circ$ , 铁芯表面为一标量等磁位面。

2. 铁芯为双连域, 铁内无载流导体, 且铁芯链过的全电流值  $\sum i = 0$ , 如图 1—8 所示。这种情况和第一种情况相似, 磁力线从空气进入铁芯时垂直于铁芯表面, 铁芯表面仍为一标量等磁位面。

3. 铁芯为双连域, 铁内无载流导体, 但铁芯链过的全电流值  $\sum i \neq 0$ , 如图 1—9 所示。对这种情况, 铁芯内部和铁芯表面有切向磁场强度  $H_t$  (对圆筒形铁芯,  $H_t = \frac{\sum i}{2\pi r}$ ,  $H_t$  的大小与电流的位置无关),  $\theta_2 = 90^\circ$ , 磁力线从空气进入铁芯时, 不再垂直于铁芯表面。

4. 铁芯内有载流导体。此时  $\theta_2 = 90^\circ$ , 磁力线与铁芯表面重合。

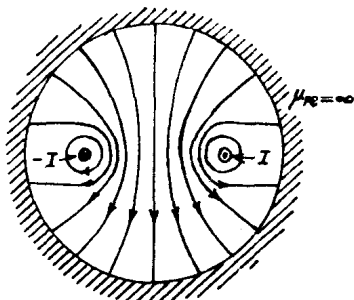


图1—3 铁芯为双连域, 铁芯链过的全电流值  $\sum i = 0$  时。

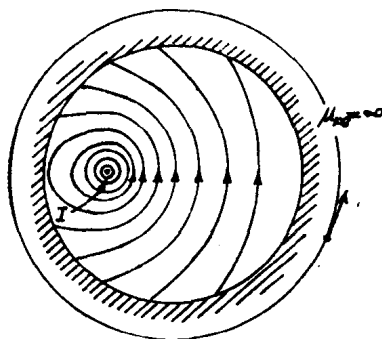


图1—9 铁芯为双连域, 铁芯链过的全电流值  $\sum i \neq 0$  时。

**交界面上电流密度为无穷大时** 在研究电机内的磁场问题时, 常把铁芯表面具有许多载流导体的情况, 简化为具有同一线负载的无限薄的电流片来处理, 若用  $AS$  表示线负载 (安/厘米), 则  $J \cdot h = AS$ 。由于电流片为无限薄, 即  $h \rightarrow 0$ , 故电流密度  $J \rightarrow \infty$ , 于是 (1—41) 式变成

$$H_{1t} - H_{2t} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ j \rightarrow \infty}} Jh = AS \quad (1-45)$$

或

$$H_1 \sin \theta_1 - H_2 \sin \theta_2 = AS \quad (1-46)$$

(1—46) 说明, 当磁力线通过电密为无穷大的电流片时, 磁场强度的切线分量将发生突变。

当然, 实际的电流片不会是无限薄, 电流密度亦不可能达到无穷大; 故实际上磁力线在通过载流层时, 磁场强度的切线分量仍为连续, 但  $H_t$  的值在逐步变化; 通过载流层后,  $H_t$  的总变化量应等于该处的线负载值。

**磁感强度的法线分量仍保持连续。**

除了上述条件之外,根据磁场图形的对称性和其他特点,还可列出其他有关的边界条件。

**用向量磁位表达时的边界条件** 当磁力线通过交界面时,向量磁位应保持连续,即

$$A_1 = A_2 \quad (1-47)$$

如果向量磁位不连续,则磁感强度  $B (B = \text{rot} A)$  将趋向无穷大,显然这是不合理的。

另外,根据(1-45)式

$$\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times A)_{t1} - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times A)_{t2} = AS \quad (1-48)$$

这两个式子就是用向量磁位表达时,恒定磁场的边界条件。

## 1-4 恒定磁场问题的解法

**恒定磁场的解法** 从1-2节可知,求解恒定磁场问题实质上是求解满足特定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程问题。这两个方程可用

- (1) 解析法;
- (2) 数值解法;
- (3) 实验(实测或模拟)法

来求解。对二维磁场,许多情况下还可用图解法或保角变换(共轭函数)法来求解。这些方法(实验法除外)将在以后各章中依次论及。

根据边界的具体情况,电机内的恒定磁场问题可分为无界和具有铁磁边界两类。无界问题不用考虑边界的影响,解答稍简单。在无界自由空间内,满足泊松方程的向量磁位  $A$  应为

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J}{r} dv \quad (1-49)$$

上式是一个向量式子,积分对整个空间进行。对二维磁场问题,(1-49)式简化为

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z}{r} dv \quad (1-50)$$

对具有铁磁边界的情况,除载导体所产生的磁场外,还要考虑边界磁化对原有磁场的影响。此时向量磁位的解答将分成两部份,即

$$A = A' + A'' \quad (1-51)$$

其中  $A'$  为所研究的区域  $V$  内载导体所产生的磁位,  $A''$  则为边界的影响。

**恒定磁场解答的唯一性** 如上所述,求解恒定磁场的方法很多,解出的函数形式亦可能互不相同;此外,根据经验,有时可能提出一些尝试性的解答。此时,就会提出这样的问题:所提出的解答中,那一个是真解?在电磁场理论中,这个问题称为泊松方程和拉普拉斯方程解答的“唯一性”问题。

对恒定磁场,  $B$  和  $A$  均为向量。利用向量形式的格林定理可以证明(见附录2):在所研究的区域  $V$  内,若给定载流导体的分布和电流的大小,给定  $V$  的表面  $S$  上向量

磁位的切线分量或者磁感强度的切线分量这二者之一，则区域  $V$  内任意点的磁感强度（磁场）就唯一地确定。这就是恒定磁场的唯一性定理。

唯一性定理具有重要的理论和实际意义。它告诉我们，如果有一个尝试解满足上述条件，则这个解就是唯一的真正的解。这样，唯一性定理就给恒定磁场的某些特殊解法（例如镜像法）提供了理论依据，给实际工作带来很大的方便。

## 1—5 直 流 电 感

与恒定磁场对应的电感称为直流电感。

区域  $V$  内的磁场解出后，该区域内的磁场储能  $W_m$  即可算出：

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (1-52)$$

由于磁场储能  $W_M = \frac{1}{2} Li^2$ ，于是可得直流电感  $L$  为

$$L = \frac{2W_M}{i^2} = \frac{\int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv}{i^2} \quad (1-53)$$

按照电路中的定义，电感亦等于单位电流所产生的回路磁链。若磁场为二维（图1—10），载流导体中单元面积  $ds$  处的向量磁位为  $A$ ，则在向量等磁位线  $A_0$  范围以内，单元导体所链过的磁链应为

$$(A_0 - A)l \cdot \frac{ds}{S_0}$$

式中  $l$  为导体的轴向长度， $S_0$  为导体的截面积。于是在  $A = A_0$  的范围内，与导体所链磁链相对应的电感  $L_0$  应为

$$L_0 = \frac{l}{iS_0} \int_{S_0} (A_0 - A) ds \quad (1-54)$$

式中  $i$  为导体中的电流；积分在整个面积  $S_0$  内进行。

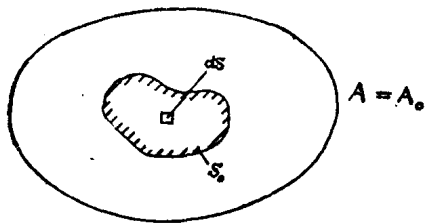


图1—10 由向量磁位来确定电感

## 1—6 小 结

恒定磁场的基本关系有三个：安培全电流定律，磁通连续性定律和介质的  $B \sim H$  关系。求解磁场问题时，常常利用其微分形式。

根据电流密度是否为零，恒定磁场分为无旋场（ $\mathbf{J} = 0$  的区域）和旋度场（ $\mathbf{J} \neq 0$  的区域）。在无旋场中，标量磁位和向量磁位同时存在，它们都满足拉普拉斯方程。在旋度场中，只存在向量磁位，此时向量磁位满足向量泊松方程。在区域  $V$  内，给定载流导体的电流和分布，以及边界面上  $\mathbf{A}$  或  $\mathbf{B}$  的切向分量值，磁场的解答就是唯一的。

恒定磁场的边界条件是：磁场通过界面时，磁感强度的法向分量保持连续；界面两边磁场强度切向分量之差，等于界面上的线负载值。

磁场求出后，根据磁场储能或导体的磁链，即可确定相应的直流电感。关于载流导体和磁质在磁场中所受到的电磁力，将在第 11 章里专门研究。

### 参 考 文 献

1. 电动力学 北京大学物理系编 人民教育出版社 1961
2. *J.A.Stratton Electromagnetic Theory* 1941
3. *W.K.H.Panofsky, M.Phillips Classical Electricity and Magnetism 2nd Edition*
4. *P.Moon and D.E.Spencer Field Theory for Engineers* 1961.
5. *W.R.Smythe Static and Dynamic Electricity* 1950.
6. *Van Bladel Electromagnetic Fields* 1964.
7. *R.M.Fano, L.J.Chu, R.B.Adler Electromagnetic fields, Energy, and Forces.* 1960.
8. *K.Simonyi Theoretische Elektrotechnik* 1956.
9. *Л.Р.Нейман, П.Л.Калыпаров Теоретические Основы Электротехники.*
10. *K.J.Binns, P.J.Lawrenson Analysis and Computation of Electric and Magnetic field Problems* 1963.
11. *P.Silvester Modern Electromagnetic Fields* 1968.



## 第二章 无界空间中的恒定磁场

本章研究无界自由空间中恒定磁场的解法,即不考虑边界面的影响时泊松方程和拉普拉斯方程的解法。先研究长直线电流产生的二维磁场,再研究长直圆形截面、矩形截面和具有任意形状截面的载流导体所产生的二维磁场,最后研究载流圆环和螺管线圈的磁场。

计算无界空间中的磁场,实用上有以下三种方法:

- (1) 利用安培全电流定律算出空间各点的磁感强度  $\mathbf{B}$ ;
- (2) 根据电流密度的分布确定空间各点的向量磁位  $\mathbf{A}$ ,再由  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$  算出  $\mathbf{B}$ ;
- (3) 由泊松方程和拉普拉斯方程解出向量磁位  $\mathbf{A}$ ,再算出  $\mathbf{B}$ 。

下面先从最简单的情况——长直线电流所产生的磁场开始研究。

### 2—1 长直线电流所产生的磁场

若导线的线度很长,则长直线电流所产生的磁场可作为二维空间内的磁场处理。

根据右手定则可知,长直线电流所产生的磁场为在垂直于导线平面内以导线为中心的一系列同心圆,如图 2—1 所示,下面分别用安培定律和求解泊松方程两种方法来确定长直线电流所产生的磁场。

**用安培定律求磁感强度** 长直线电流所产生的磁场仅有切向分量  $B_\theta$ ,根据安培定律,  $B_\theta$  应为

$$B_\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (2-1)$$

由于对称关系,(2—1)式亦可从安培全电流定律直接推出。因为

$$H_\theta \cdot 2\pi r = i, \quad \text{或} \quad H_\theta = \frac{i}{2\pi r}$$

$$\therefore B_\theta = \mu_0 H_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

从  $r_1$  到  $r_2$  处通过单位轴向长度 ( $\Delta z = 1$ ) 的磁通量  $\Delta\Phi$  为

$$\Delta\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B_\theta \cdot 1 \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2-2)$$

由于  $\Delta\Phi = \mu_0 (\Psi_1 - \Psi_2)$ ,  $\Psi$  为力线函数,所以

$$\Psi = -\frac{i}{2\pi} \ln r + C \quad (2-3)$$

向量磁位  $\mathbf{A}_z$  则为