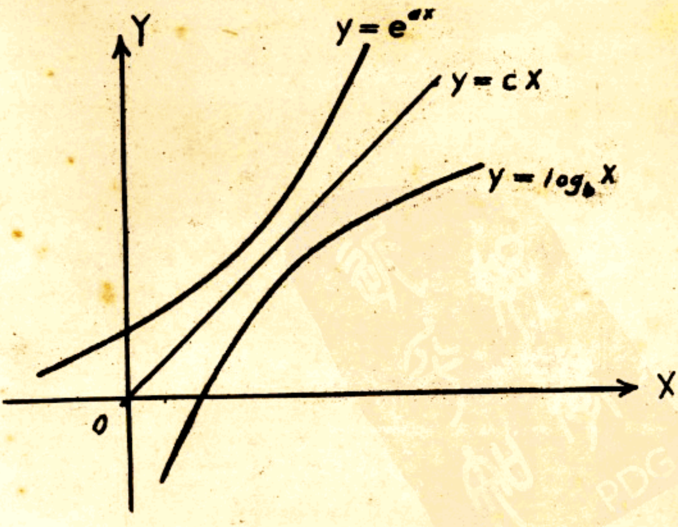
微積分問題詳解

續篇

for

FRESHMAN



曉園出版社

微積分詳解
續篇目錄

章	節	習題	頁
十五	一	15-1	1
	二	15-2	5
	三	15-3	9
	四	15-4	13
十六	一		19
	二	6-1	19
	三	6-2	23
十七	一		29
	二	17-1	29
	三	17-2	36
十八	一	18-1	42
	二	18-2	44
十九	一	19-1	53
	二	19-2	54
	三	19-3	55
	四	19-4	56
	五	19-5	58
	六	19-6	60
	七	19-7	63
二十	一	20-1	68
	二	20-2	71
	三	20-3	74
	四	20-4	76

章	節	習題	頁
	五	20-5	78
	六	20-6	82
	七	20-7	84
	八	20-8	88
二十一	一	21-1	92
	二		94
	三		94
	四	21-2	94
	五	21-3	94
		21-4	96
		21-5	97
	六	21-6	98
	七	21-7	99
	八	21-8	100
二十二	一		102
	二	22-1	102
	三		102
	四	22-2	102
	五	22-3	104
	六	22-4	105
	七	22-5	106
	八	22-6	107
	九	22-7	108
二十三	二	23-1	110
	四	23-2	111
	五	23-3	113

第十五章 向量代数與向量微積

第一節 向量的定義與记号及其加减法則

習題 15-1

1. 試說明 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 所表的意義。

解：$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$ ，若 $\vec{a} \neq \vec{0}$

故此向量亦称為单位向量

2. 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 為接連構成三角形三边的向量，问向量和 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$？

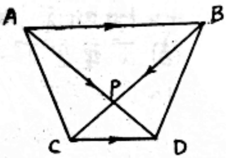
解：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

3. 設向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 接連構成平行四边形的兩边，試以 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 表此平行四边形的对角線

解：二对角線向量為 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$.

4. 設 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 為由原点 O 到 A, B, C, D 四点的四向量並設 $\vec{b}-\vec{a}=2(\vec{d}-\vec{c})$。試示明联结 A 與 D 及 B 與 C 兩直線必由其交点各分成一定比 1:3.

解：由假設 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$，令 AD 與 BC 之交点為 P，$\overrightarrow{AP}=t_1\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BP}=t_2\overrightarrow{BC}$ 則有



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.$$

故
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP} \\ &= t_1\overrightarrow{AD}-t_2\overrightarrow{BC} \\ &= t_1(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})-t_2\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ 代入上式，得

$$(2-3t_1)\overrightarrow{CD}=(t_1-t_2)\overrightarrow{BC}$$

因 $\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 不同向，故

$$2-3t_1=0 \quad , \quad t_1-t_2=0$$

解之，得 $t_1=t_2=\frac{2}{3}$．得证．

5. 設由共同的原点引出的 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 四向量，試求此四向量的終点在同一平面的充要條件．

解：由原書頁4知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 終点共線之充要條件為

$$l_1\vec{a}+m_1\vec{b}+n_1\vec{c}=0,\ l_1+m_1+n_1=0,\ l_1^2+m_1^2+n_1^2\neq 0$$

故 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 終点共線的充要條件為：存在實數 l_i,m_i,n_i 所使

$$\begin{cases} l_1\vec{a}+m_1\vec{b}+n_1\vec{c}=0,\ l_1+m_1+n_1=0,\ l_1^2+m_1^2+n_1^2\neq 0 \\ l_2\vec{a}+m_2\vec{b}+n_2\vec{d}=0,\ l_2+m_2+n_2=0,\ l_2^2+m_2^2+n_2^2\neq 0 \end{cases}$$

6. 令 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為兩常向量，$\vec{c}$ 為定義於次之方程式的向量：

$$\vec{c}=(\cos t)\vec{a}+(\sin t)\vec{b}$$

问 $\vec{c}$ 於何時平行於 $\vec{a}$？又於何時平行於 $\vec{b}$？究竟 $\vec{c}$ 能平行於 $\vec{a}+\vec{b}$ 或垂直於 $\vec{a}+\vec{b}$ 否？

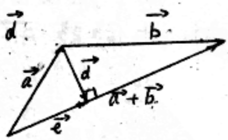
解：若 $\vec{c}\parallel\vec{a}$，则 $\sin t=0$，即 $t=n\pi,\ n\in I$．

若 $\vec{c}\parallel\vec{b}$，则 $\cos t=0$，即 $t=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in I$

若 $\vec{c}\parallel\vec{a}+\vec{b}$，则 $\sin t=\cos t$，即 $t=n\pi+\frac{\pi}{4},\ n\in I$

现讨論 $\vec{c}$ 可否垂直 $\vec{a}+\vec{b}$．

如图所示，令 $\vec{e}=t_1(\vec{a}+\vec{b})$，现求 $\vec{d}$．



因 $\vec{d}$ 垂直 $\vec{a}+\vec{b}$，故

$$|\vec{a}|^2=|\vec{e}|^2+|\vec{d}|^2=t_1^2|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2$$

$$|\vec{b}|^2=(1-t_1)^2|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2$$

两式相减，得

$$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=(2t_1-1)|\vec{a}+\vec{b}|^2，故$$

$$t_1=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2|\vec{a}+\vec{b}|^2}+\frac{1}{2}$$

故得 $\vec{e}=t_1(\vec{a}+\vec{b})$

$$\vec{d}=\vec{e}-\vec{a}=t_1(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=(t_1-1)\vec{a}+t_1\vec{b}$$

若 $\vec{c}$ 能垂直 $\vec{a}+\vec{b}$，则必与 $\vec{d}$ 同方位，故必有

$$\vec{c}=k\vec{d}，\ k 为一實數 \neq 0$$

即 $(\cos t)\vec{a}+(\sin t)\vec{b}=k(t_1-1)\vec{a}+kt_1\vec{b}$

因而 $\begin{cases}\cos t = k(t_1-1)\\ \sin t = kt_1\end{cases}$

$$\cos^2 t+\sin^2 t = k^2(t_1-1)^2+k^2t_1^2$$
$$= k^2(2t_1^2-2t_1+1)$$

方程式 $2t_1^2-2t_1+1=0$ 的判别式為 $4-8<0$，故無实数解，且 $t_1=0$ 時，$2t_1^2-2t_1+1>0$，故知

$$2t_1^2-2t_1+1>0 \text{ 恒成立}$$

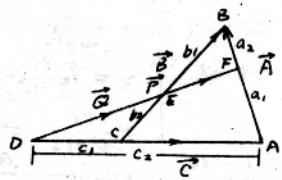
因而只要取 $k=(2t_1^2-2t_1+1)^{\frac{1}{2}}$，則

$$k^2(2t_1^2-2t_1+1)=1$$

故 t 有解，即 $\vec{c}$ 可垂直 $\vec{a}+\vec{b}$

[欲求 t，以 k, t_1 之值代入 $t=\sin^{-1}(kt_1)$]

7. 設有三点分别在 $\triangle ABC$ 的三边或三边的延長線上，則此三点共線的充要條件為此三点截分三边所成比例之積等於 1。此為著名的 Menelaus 定理。試用向量法証明之。



証：(i) 必要條件：

令 $\vec{A}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{B}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{C}=\overrightarrow{CA}$

$\vec{Q}=\overrightarrow{DE}$, $\vec{P}=\overrightarrow{DF}$

若三截点共線，則

$\vec{Q}=x\vec{P}$，即

$$\frac{c_1}{c_2-c_1}\vec{C}+\frac{b_2}{b_1+b_2}\vec{B}=x\left(\frac{c_2}{c_2-c_1}\vec{C}+\frac{a_1}{a_1+a_2}\vec{A}\right)$$

以 $\vec{B}=\vec{C}+\vec{A}$ 代入上式，得

$$\left(\frac{c_1}{c_2-c_1}+\frac{b_2}{b_1+b_2}\right)\vec{C}+\frac{b_2}{b_1+b_2}\vec{A}=x\frac{c_2}{c_2-c_1}\vec{C}+x\frac{a_1}{a_1+a_2}\vec{A}$$

故得 $\begin{cases}\dfrac{c_1}{c_2-c_1}+\dfrac{b_2}{b_1+b_2}=x\dfrac{c_2}{c_2-c_1}\\[2mm] \dfrac{b_2}{b_1+b_2}=x\dfrac{a_1}{a_1+a_2}\end{cases}$

以第二式解 x，代入第一式，得

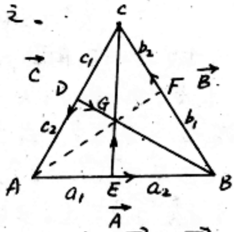
$$\frac{c_1}{c_2-c_1}+\frac{b_2}{b_1+b_2}=\frac{a_1+a_2}{a_1}\,\frac{b_2}{b_1+b_2}\,\frac{c_2}{c_2-c_1}$$

通分後化简，得 $a_1b_1c_1=a_2b_2c_2$，即 $\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=1$

(ii) 充分條件：

由假設 $\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}\frac{c_1}{c_2}=1$，倒轉(i)中各步驟，得 $\vec{Q}=x\vec{P}$ 得证。

8. 設由△ABC三頂点與其对边上的一点联结成直線，如此三直線共交於一点，则其充要條件為在各边上的点，分截各边所成比例之積等於1。此為著名的Ceva定理，试用向量法证明之。



証：(i) 必要條件：

令 $\vec{A}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{B}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{C}=\overrightarrow{CA}$

因 $\overrightarrow{AG}=x\,\overrightarrow{AF}$，故

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\vec{A}\,(=\overrightarrow{AE})+y\,\overrightarrow{EC}\,(=\overrightarrow{EG})$$
$$=x\left(\vec{A}+\frac{b_1}{b_1+b_2}\vec{B}\,(=\overrightarrow{BF})\right)$$

即 $x\left(\vec{A}+\frac{b_1}{b_1+b_2}\vec{B}\right)=\frac{a_1}{a_1+a_2}\vec{A}+y\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\vec{A}+\vec{B}\right)$

所以
$$\begin{cases} x=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+y\dfrac{a_2}{a_1+a_2} \\ x\dfrac{b_1}{b_1+b_2}=y \end{cases}$$

解得，$x=\dfrac{a_1b_1+a_1b_2}{a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2}$ ———— ①

同理，由 $\overrightarrow{AG}=x\,\overrightarrow{AF}$ 亦可得包含 c_i 但不包含 a_i 之式子如下

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AD}+y'\,\overrightarrow{DB}$$
$$=-\frac{c_2}{c_1+c_2}\vec{C}+y'\left(\frac{c_2}{c_1+c_2}\vec{C}+\vec{A}\right)$$
$$x\overrightarrow{AF}=x\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}\right)$$
$$=x\left(-\vec{C}-\frac{b_2}{b_1+b_2}\vec{B}\right)$$
$$=x\left[-\vec{C}-\frac{b_2}{b_1+b_2}(-\vec{A}-\vec{C})\right]$$

比較二等式，可得

$$\begin{cases} -\dfrac{c_2}{c_1+c_2}(1-y')=-x\left(1-\dfrac{b_2}{b_1+b_2}\right) \\ y'=x\dfrac{b_2}{b_1+b_2} \end{cases}$$

解 x，得 $x=\dfrac{b_1c_2+b_2c_2}{b_1c_1+b_1c_2+b_2c_2}$ ——— ②

由式① = 式② 化简，得 $\dfrac{a_1}{a_2}\dfrac{b_1}{b_2}\dfrac{c_1}{c_2}=1$. 得证

(ii) 充分條件：

设 AF, BD 相交於 G，倒轉(i)中各步驟，可得 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AF}$

故 AF 过 G 而三線共点.

[註：原书之题中之 −1 应為 1，例如三中線相交於一点，而边截点皆為 1:1，故 $\frac{1}{1}\frac{1}{1}\frac{1}{1}=1$ 而非 −1]

第二節 向量的数性乘積

習題 15-2

1. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

試求此两向量间的夾角.

解： $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+(-3)(-1)+1(-2)=7$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+1}=\sqrt{14}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1+2^2}=\sqrt{14}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$，故 $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$

2. 设 $\vec{c}$ 為与向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 正交，試証明 $\vec{c}$ 亦与 $\vec{a}+\vec{b}$ 及 $\vec{a}-\vec{b}$ 正交。

解：由假设，得 $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，故

$\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=0$

及 $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}=0$，得证.

3. 試证明半圆内接三角形為直角三角形

解：可設此半圆為单位圆（半径=1），内接三角形之三顶点為 $(1,0)$，$(-1,0)$，$(\cos\theta,\sin\theta)$，因而有二边之向量為

$\langle \cos\theta-1, \sin\theta \rangle$, $\langle \cos\theta+1, \sin\theta \rangle$。

$\langle \cos\theta-1, \sin\theta \rangle \cdot \langle \cos\theta+1, \sin\theta \rangle$

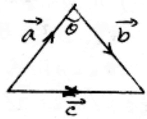
$= (\cos^2\theta-1)+\sin^2\theta$

$=0$

此两边垂直，故為直角三角形

4. 試應用数性積的定義及性質証明三角形之餘弦定律

解：令三角形之三边向量為 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，且



$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$，故

$|\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

此即餘弦定律.

5. 令 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為在 xoy 平面上依次與 x-軸夾成 α 及 β 角，試示明

$$\vec{a} = \cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}, \quad \vec{b} = \cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}$$

及 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

解：此題應假設 $\vec{a}, \vec{b}$ 皆為單位向量，且 $\vec{a}, \vec{b}$ 之起点皆為 O (= 原点)，此即所謂位置向量.

令 $a=(x_1, y_1)$，則 $x_1=|\vec{a}|\cos\alpha=\cos\alpha$，$y_1=\sin\alpha$

故 $a=(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\vec{a} = \langle\cos\alpha, \sin\alpha\rangle = \cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$

同理，$\vec{b} = \cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}$.

$\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \vec{a}\ \vec{b}$

$= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

6. 求过已知点 $(2,3,-1)$ 而與已知方向 $(3,-4,7)$ 成正交的平面方程式.

解：設 $\vec{x} = \langle x, y, z\rangle$ 為平面上之一点，則

$$(\vec{X}-\langle 2,3,-1\rangle)\cdot\langle 3,-4,7\rangle=0$$

即 $\langle x-2,\ y-3,\ z+1\rangle\cdot\langle 3,-4,7\rangle=0$

或 $3(x-2)+(-4)(y-3)+7(z+1)=0$

$$3x-4y+7z=-13$$

7. 已知同以0為終點的兩向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，試證明聯結此兩向量終點的直線段平行於 xoy 平面，並求其長度。

解：$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{i}-4\vec{j}$，無z-軸方向之分量（即 $z=0$），故與 xoy 平面平行。

$$|\vec{a}-\vec{b}|=|3\vec{i}-4\vec{j}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

8. 令 $\vec{a}=\vec{a_1}+\vec{a_2}$ 其中 $\vec{a_1}\cdot\vec{b}=0$，且 $\vec{a_2}$ 平行於 $\vec{b}$，試證明

$$\vec{a_2}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b},\quad \vec{a_1}=\vec{a}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

解：
$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{\vec{a_1}\cdot\vec{b}+\vec{a_2}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{0+|\vec{a_2}||\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$
$$=\frac{|\vec{a_2}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

此向量與 $\vec{a_2}$ 同向（因 $\vec{a_2}\parallel\vec{b}$）且其長度為

$\frac{|\vec{a_2}|}{|\vec{b}|}|\vec{b}|=|\vec{a_2}|$，故等於 $\vec{a_2}$

由上結果又可得 $\vec{a_1}=\vec{a}-\vec{a_2}=\vec{a}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

9. 試由上面例2定義的 a^α_β 及 A^α_β，證明

$$\sum_{\gamma=1}^{3}a^\alpha_\gamma A^\gamma_\beta=\delta^\alpha_\beta$$

式中 $\delta^\alpha_\beta=1$，若 $\alpha=\beta$；$\delta^\alpha_\beta=0$，若 $\alpha\neq\beta$。

解：由(8)式及(9)式，
$$x^\alpha=\sum_{\gamma=1}^{3}a^\alpha_\gamma \bar{x}^\gamma=\sum_{\gamma=1}^{3}a^\alpha_\gamma\Big(\sum_{\beta=1}^{3}A^\gamma_\beta x^\beta\Big)$$
$$=\sum_{\beta=1}^{3}\Big(\sum_{\gamma=1}^{3}a^\alpha_\gamma A^\gamma_\beta\Big)x^\beta$$

等式二邊 x 的係數必相等，故
$$\sum_{\gamma=1}^{3}a^\alpha_\gamma A^\gamma_\beta=\delta^\alpha_\beta$$

10. 若 B^1, B^2, B^3 為向量 $\vec{B}$ 的分量，即

$$\vec{B} = B^1\vec{i} + B^2\vec{j} + B^3\vec{k}$$

試示明向量 $\vec{B}$ 在轉軸後的分量變為 $(\bar{B}^1, \bar{B}^2, \bar{B}^3)$ 式中

$$\bar{B}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} a^\alpha_\beta B^\beta, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

而向量 $\vec{B} = \bar{B}^1\vec{i}' + \bar{B}^2\vec{j}' + \bar{B}^3\vec{k}'$

解： $\bar{B}^1\vec{i}' = \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^1_\beta B^\beta\right)\left(a^1_1\vec{i} + a^2_1\vec{j} + a^3_1\vec{k}\right)$

$$= \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^1_\beta a^1_1 B^\beta\right)\vec{i} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^1_\beta a^2_1 B^\beta\right)\vec{j} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^1_\beta a^3_1 B^\beta\right)\vec{k}$$

同理，$\bar{B}^2\vec{j}' = \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^2_\beta a^1_2 B^\beta\right)\vec{i} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^2_\beta a^2_2 B^\beta\right)\vec{j} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^2_\beta a^3_2 B^\beta\right)\vec{k}$

$$\bar{B}^3\vec{k}' = \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^3_\beta a^1_3 B^\beta\right)\vec{i} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^3_\beta a^2_3 B^\beta\right)\vec{j} + \left(\sum_{\beta=1}^{3} a^3_\beta a^3_3 B^\beta\right)\vec{k}$$

故 $\bar{B}^1\vec{i}' + \bar{B}^2\vec{j}' + \bar{B}^3\vec{k}'$ 之 $\vec{i}$ 軸分量為

$$\sum_{\beta=1}^{3} a^1_\beta a^1_1 B^\beta + \sum_{\beta=1}^{3} a^2_\beta a^1_2 B^\beta + \sum_{\beta=1}^{3} a^3_\beta a^1_3 B^\beta$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{3}\left(\sum_{\beta=1}^{3} a^\gamma_\beta a^1_\gamma B^\beta\right) = \sum_{\beta=1}^{3}\left(\sum_{\gamma=1}^{3} a^\gamma_\beta a^1_\gamma\right)B^\beta$$

$$= \sum_{\beta=1}^{3} \delta^1_\beta B^\beta = B^1$$

同理，其在 $\vec{j}, \vec{k}$ 之分量各為 B^2, B^3，故

$$\bar{B}^1\vec{i}' + \bar{B}^2\vec{j}' + \bar{B}^3\vec{k}' = B^1\vec{i} + B^2\vec{j} + B^3\vec{k} = \vec{B}$$，得证.

11. 试示明对於轉軸有

$$B^1C^1 + B^2C^2 + B^3C^3 = \bar{B}^1\bar{C}^1 + \bar{B}^2\bar{C}^2 + \bar{B}^3\bar{C}^3$$

即 $\sum_{\alpha=1}^{3} B^\alpha C^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{B}^\alpha \bar{C}^\alpha$，亦即數性積的數值与形式均不因轉軸而改變，或称數性積関於轉軸具有不變性。試示明之.

解： $B^1C^1 + B^2C^2 + B^3C^3 = \vec{B}\cdot\vec{C}$

$$= \left(\bar{B}^1\vec{i}' + \bar{B}^2\vec{j}' + \bar{B}^3\vec{k}'\right)\cdot\left(\bar{C}^1\vec{i}' + \bar{C}^2\vec{j}' + \bar{C}^3\vec{k}'\right) \text{ —①}$$

因 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ 為正交单位向量，故 $\vec{i}'\cdot\vec{i}' = 1$，$\vec{j}'\cdot\vec{j}' = 1$，$\vec{k}'\cdot\vec{k}' = 1$，$\vec{i}'\cdot\vec{j}' = \vec{j}'\cdot\vec{i}' = 0$，$\vec{i}'\cdot\vec{k}' = \vec{k}'\cdot\vec{i}' = 0$，$\vec{j}'\cdot\vec{k}' = \vec{k}'\cdot\vec{j}' = 0$

故①式等於 $\bar{B}^1\bar{C}^1 + \bar{B}^2\bar{C}^2 + \bar{B}^3\bar{C}^3$，得证.

第三節 向量的矢性積与混合乘積

習題 15-3

1. 试証 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

証：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]$

$=\vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]$

$=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

2. 試証 $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$

或 $=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$

解： $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{b}-[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]\vec{a}$

$=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$

又 $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]\vec{c}-[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]\vec{d}$

$=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$

设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，令

$$\vec{d}=n\vec{a}+m\vec{b}+l\vec{c}$$

若以分量表示，则上式可写成

$$d_i=na_i+mb_i+lc_i\quad,\quad i=1,2,3$$

因 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$，亦即

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

故 n,m,l 有唯一解，即 $\vec{d}$ 可以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示.

3. 设 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，试示明

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

並试由此结果证明三角形上的正弦定律

解： $\vec{a}\times\vec{b}=(-\vec{b}-\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$

同理可得 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$

令三角形三边 a,b,c 之向量为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

因 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$，故

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin C=|\vec{b}|\times|\vec{c}|\sin A$$

式中 A 为 a 边之对角，即 b,c 之夹角，等等。由上式得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin c}$$

同理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，由以上结果，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin c}$$ 此即正弦定律

4、试证 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$

解：由2题之结果，

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\\
&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\vec{c}-(\vec{c},\vec{c},\vec{a})\vec{a}]\\
&=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\\
&=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\\
&=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2
\end{aligned}$$

5 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为不共面的三向量，试示明对于任意向量 $\vec{d}$ 可表为

$$\vec{d}=\frac{(\vec{c}\cdot\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}(\vec{a}\times\vec{b})+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}(\vec{b}\times\vec{c})+\frac{(\vec{b}\cdot\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}(\vec{c}\times\vec{a})$$

解：由假设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，故 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$。由4题得 $(\vec{a}\times\vec{b}),(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{c}\times\vec{a})$ 亦不共面。应用2题之最后结果，得

$$\vec{d}=n(\vec{a}\times\vec{b})+m(\vec{b}\times\vec{c})+l(\vec{c}\times\vec{a})$$

式中 n,m,l 为适当实数。

两边各对 $\vec{c}$ 作数性积，

$$\begin{aligned}
\vec{c}\cdot\vec{d}&=n\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})+m\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+l\vec{c}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\\
&=n(\vec{a},\vec{b},\vec{c})
\end{aligned}$$

得 $n=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$，应用同法可得 $m=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$，$l=\frac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$

6. 求证

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

証：$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$

$$=\vec{0}$$

7. 設 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 為共面的四向量，試証明

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=0$$

解 設其共面之平面為 s，因 $\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{c}\times\vec{d}$ 皆垂直 s，故 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{c}\times\vec{d}$ 平行，得証

亦可由2題求証。因共面，故2題式子之右边各数性之重積皆為0，得证

8. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$

解：应用1题，得

$$原式=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{d}\\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{d}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}=0$$

9. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{d})=-2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$

解：原式 $=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}+(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$

$$-(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\vec{d}+(\vec{c},\vec{b},\vec{d})\vec{a}-(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}$$

$$=-2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$$

10. $(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{d}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

解：式中之 $\vec{d}-\vec{d}$ 应為 $\vec{d}-\vec{b}$

$$(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{d}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=0$$

11. $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$

解：原式 $=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{d}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}=2(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$

12.试证明

$$(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec c\times\vec d)\times(\vec e\times\vec f)=(\vec a,\vec b,\vec d)(\vec c,\vec e,\vec f)-(\vec a,\vec b,\vec c)(\vec d,\vec e,\vec f)$$
$$=(\vec a,\vec b,\vec e)(\vec f,\vec c,\vec d)-(\vec a,\vec b,\vec f)(\vec e,\vec c,\vec d)$$
$$=(\vec c,\vec d,\vec a)(\vec b,\vec e,\vec f)-(\vec c,\vec d,\vec b)(\vec a,\vec e,\vec f)$$

解：原式 $=(\vec a\times\vec b)\cdot[\vec c\cdot(\vec e\times\vec f)\vec d-\vec d\cdot(\vec e\times\vec f)\vec c]$

$=[(\vec a\times\vec b)\cdot\vec d][\vec c\cdot(\vec e\times\vec f)]-[(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c][\vec d\cdot(\vec e\times\vec f)]$

$=(\vec a,\vec b,\vec d)(\vec c,\vec e,\vec f)-(\vec a,\vec b,\vec c)(\vec d,\vec e,\vec f)$

原式 $=(\vec a\times\vec b)\cdot[(\vec c,\vec d,\vec f)\vec e-(\vec c,\vec d,\vec e)\vec f]$

$=(\vec a,\vec b,\vec e)(\vec f,\vec c,\vec d)-(\vec a,\vec b,\vec f)(\vec e,\vec c,\vec d)$

原式 $=(\vec c\times\vec d)\times(\vec e\times\vec f)\cdot(\vec a\times\vec b)$

$=(\vec c\times\vec d)\cdot(\vec e\times\vec f)\times(\vec a\times\vec b)$

$=(\vec c\times\vec d)\cdot[(\vec e,\vec f,\vec b)\vec a-(\vec e,\vec f,\vec a)\vec b]$

$=(\vec c,\vec d,\vec a)(\vec b,\vec e,\vec f)-(\vec c,\vec d,\vec b)(\vec a,\vec e,\vec f)$

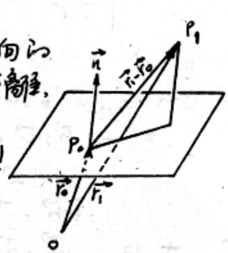
13.试求由平面 $(\vec r-\vec r_0)\cdot n=0$ 至位置向量為 $\vec r_1$ 之点 P_1 的距離

解：設 P_0 為平面上之一点，则

$\overrightarrow{P_0P_1}=\vec r_1-\vec r_0$，此向量在 $\vec n$ 方向的分量的長度即為 P_1 点至平面的距離，

即

$$d=\left|(\vec r_1-\vec r_0)\cdot\frac{\vec n}{|\vec n|}\right|=\frac{|(\vec r_1-\vec r_0)\cdot\vec n|}{|\vec n|}$$



14.若 $\vec r$ 表一動点的位置向量，则 $\vec r\times\vec a=\vec b$ 表一直線的充要條件為 $\vec a\cdot\vec b=0$，試证明之.

解：(i) 必要條件：若 $\vec r\times\vec a=\vec b$，则

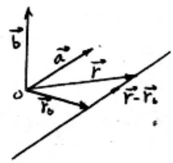
$\vec a\cdot\vec b=\vec a\cdot(\vec r\times\vec a)=0$

(ii) 充份條件：若 $\vec a\cdot\vec b=0$，取 $\vec r_0=\frac{1}{|a|^2}(\vec a\times\vec b)$，则

$\vec r_0\times\vec a=\frac{1}{|a|^2}(\vec a\times\vec b)\times\vec a=\frac{1}{|a|^2}[(\vec a\cdot\vec a)\vec b-(\vec b\cdot\vec a)\vec a]$

$=\vec b$

故方程式 $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}$ 至少有一解。令 $\vec{r}$ 為滿足此方程式之任一向量，



$$(\vec{r}-\vec{r_0})\times\vec{a}=\vec{r}\times\vec{a}-\vec{r_0}\times\vec{a}=\vec{b}-\vec{b}=0$$

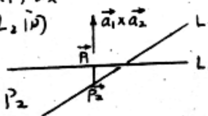
故 $\vec{r}-\vec{r_0}$ 與 $\vec{a}$ 平行，即 $\vec{r}-\vec{r_0}=t\vec{a}$

$$\vec{r}=\vec{r_0}+(\vec{r}-\vec{r_0})=\vec{r_0}+t\vec{a},$$

故 $\vec{r}$ 表一直線上之點

15. 設 $\vec{a_1}$ 及 $\vec{a_2}$ 為兩獨立的向量，並設 $\vec{a_1}\cdot\vec{b_1}=0$，$\vec{a_2}\cdot\vec{b_2}=0$，試證介於 $\vec{r}\times\vec{a_1}=\vec{b_1}$ 及 $\vec{r}\times\vec{a_2}=\vec{b_2}$ 兩直線間的距離 $d=\dfrac{|\vec{a_1}\cdot\vec{b_2}+\vec{a_2}\cdot\vec{b_1}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}$

證：稱此二直線為 L_1，L_2。$\vec{a_1}\times\vec{a_2}$ 垂直 $\vec{a_1}$，故垂直 L_1，同理 $\vec{a_1}\times\vec{a_2}$ 亦垂直 L_2。L_1，L_2 間之距離即為各包含 L_1，L_2 且與 $\vec{a_1}\times\vec{a_2}$ 垂直之二平面 S_1，S_2 間之距離。令 P_1，P_2 分別為 L_1，L_2 上之點，則 L_1，L_2 之距離等於 P_1 與 S_2 間之距離。應用13題之結果，並設 $\vec{P_1}$，$\vec{P_2}$ 為 P_1，P_2 點之位置向量，得



$$d=\frac{|(\vec{P_1}-\vec{P_2})\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}=\frac{|\vec{P_1}\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})-\vec{P_2}\cdot(\vec{a_1}\times\vec{a_2})|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}$$

$$=\frac{|(\vec{P_1}\times\vec{a_1})\cdot\vec{a_2}+(\vec{P_2}\times\vec{a_2})\cdot\vec{a_1}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}=\frac{|\vec{b_1}\cdot\vec{a_2}+\vec{b_2}\cdot\vec{a_1}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}$$

$$=\frac{|\vec{a_1}\cdot\vec{b_2}+\vec{a_2}\cdot\vec{b_1}|}{|\vec{a_1}\times\vec{a_2}|}$$

第四節 向量函數的微分及積分

習題 15-4

1. 試證 (5)—(9) 各公式

證：令 $\vec{u}=\langle u_1(t),u_2(t),u_3(t)\rangle$，$\vec{v}=\langle v_1(t),v_2(t),v_3(t)\rangle$，$\vec{w}=\langle w_1(t),w_2(t)$,

公式(5)：
$$\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{d}{dt}\langle u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3\rangle$$
$$=\left\langle \frac{d}{dt}(u_1+v_1),\frac{d}{dt}(u_2+v_2),\frac{d}{dt}(u_3+v_3)\right\rangle$$
$$=\left\langle \frac{du_1}{dt}+\frac{dv_1}{dt},\frac{du_2}{dt}+\frac{dv_2}{dt},\frac{du_3}{dt}+\frac{dv_3}{dt}\right\rangle$$
$$=\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}$$

公式(6)：$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{v}) = \frac{d}{dt}\langle \lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3\rangle$

$$= \langle \frac{d\lambda}{dt}v_1 + \lambda\frac{dv_1}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}v_2 + \lambda\frac{dv_2}{dt}, \frac{d\lambda}{dt}v_3 + \lambda\frac{dv_3}{dt}\rangle$$

$$= \frac{d\lambda}{dt}\langle v_1, v_2, v_3\rangle + \lambda\langle \frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{dv_3}{dt}\rangle$$

$$= \frac{d\lambda}{dt}\vec{v} + \lambda\frac{d\vec{v}}{dt}$$

公式(7)：$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha v_\alpha)$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}(\frac{du_\alpha}{dt}v_\alpha + u_\alpha\frac{dv_\alpha}{dt})$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{du_\alpha}{dt}v_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{3}u_\alpha\frac{dv_\alpha}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

公式(8)：$\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v} + \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

公式(9)：应用公式(7)，(8)，

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) + \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{w})$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\times\vec{w} + \vec{u}\cdot(\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{w} + \vec{v}\times\frac{d\vec{w}}{dt})$$

$$= \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\times\vec{w} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v}\times\frac{d\vec{w}}{dt}$$

2. 於下列各式中，設 $\vec{r}$ 為以t為參變數的向量函數，其他量或表數量亦或表常量，试分别求各式的導數.

(1) $r^2\vec{r} + \vec{a}\cdot\vec{r}\,\vec{b}$

解：$\frac{d}{dt}(r^2\vec{r} + \vec{a}\cdot\vec{r}\,\vec{b})$

$$= (2r\frac{dr}{dt})\vec{r} + r^2\frac{d\vec{r}}{dt} + (\vec{a}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt})\vec{b}$$

(2) $r^3\vec{r} + \vec{a}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$

解：$\frac{d}{dt}(r^3\vec{r} + \vec{a}\times\frac{d\vec{r}}{dt})$

$$= (3r^2\frac{dr}{dt})\vec{r} + r^3\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{a}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$