点集拓扑原理与题解

（下）

梁鸿绩
庹克平 编译

天津师范学院数学系

目　　录

第零章　绪　　论

§2　　集

0.1. 证明前面说过的普遍事实，即对任何的集A，下列的每个论断都成立：

（a）$A\subseteq A$.

（b）$A=A$.

（c）$\phi\subseteq A$.

（d）当且仅当$A=\phi$时，$A\subseteq\phi$。

证明　（a）若$x\in A$，则$x\in A$，所以$A\subseteq A$。

（b）由（a）即得（b）。

（c）任何不在A内的元素x都有$x\notin\phi$，所以$\phi\subseteq A$。

（d）若$A=\phi$，由（a）$\phi\subseteq\phi$，所以$A\subseteq\phi$。

反之，若$A\subseteq\phi$，而$A\neq\phi$，则有$x\in A$。但$x\notin\phi$，这与$A\subseteq\phi$矛盾，所以$A=\phi$。

0.2. 对任意的集A，B和C，证明下列结论：

（a）若$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

（b）若$A\subset B$且$B\subset C$，则$A\subset C$。

证明　略

§3　集　的　代　数

证明下列各题，其中A、B和C都表示某一泛集U内的集。

0.3. $A\subseteq B$一般不包含$B\subseteq A$

证明　显然。

0.4. 当且仅当$A\cup B=B$时，$A\subseteq B$。

证明　若$A\cup B=B$，则对任一$x\in A$，有$x\in(A\cup B)=B$，即$x\in B$，所以$A\subseteq B$。

反之，若$A\subseteq B$，则$A\cup B\subseteq B$，由5(a)又有$B\subseteq A\cup B$，所以$A\cup B=B$。

0.5. 当且仅当$A\cap B=A$时，$A\subseteq B$。

证明　若$A\cap B=A$时，则对任一$x\in A$，有$x\in B$，所以$A\subseteq B$。

反之，若$A\subseteq B$，则对任一$x\in A$，有$x\in B$，所以$x\in A\cap B$，即$A\subseteq A\cap B$，又由5(b)知，$A\cap B\subseteq A$，故得$A\cap B=A$。

0.6. $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C=(A\cap B)-(A\cap C)$.

证明 $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C^c)=(B\cap A)\cap C^c$

$=B\cap(A\cap C^c)=B\cap(A-C)$;

$(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)-C$;

$(A\cap B)\cap C^c=(A\cap B)\cap C^c\cup(A\cap A^c)$

$=A\cap B\cap(C^c\cup A)\cap(C^c\cup A^c)$

$=B\cap[A\cap(C^c\cup A)]\cap(C\cap A)^c$

$=(A\cap B)-(A\cap C)$.

0.7. $A-B=A-(A\cap B)$.

证明 $A-B=A\cap B^c=A\cap B^c\cup(A\cap A^c)$

$=A\cap(B^c\cup A)\cap(B^c\cup A^c)$

$=A\cap(A\cap B)^c=A-(A\cap B)$.

0.8. 当且仅当$A\subseteq B^c$时，$A\cap B=\phi$。

证明 若$A\subseteq B^c$，由于$A\cap B\subseteq A\subseteq B^c$，又$A\cap B\subseteq B$，所以$A\cap B\subseteq B\cap B^c=\phi$，故$A\cap B=\phi$。

反之，若$A\cap B=\phi$，则显然$A\subseteq B^c$。

0.9. 若$A\cup B=U$且$A\cap B=\phi$，则$B=A^c$。

证明 因$A\cap B=\phi$，所以$B\subseteq A^c$，又$A^c\subseteq U=A\cup B$，故由练习0.5知:

$A^c=(A\cup B)\cap A^c=A^c\cap B$.

所以$A^c\subseteq B$，于是推得$A^c=B$。

0.10. $(A-B)^c=B\cup A^c$

证明 $(A-B)^c=(A\cap B^c)^c=A^c\cup(B^c)^c$

$=A^c\cup B$.

0.11. $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

证明 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$

$=A\cap(B^c\cup C^c)=A\cap(B\cap C)^c=A-(B\cap C)$.

0.12. $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$.

证明 $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$

$=C^c\cap(A\cup B)=(A\cup B)-C$.

0.13. $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

证明 $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$

$=[B^c\cap(A\cup B)]\cup[A^c\cap(A\cup B)]$

$=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)=(A-B)\cup(B-A)$.

0.14. $A-(A-B)=A\cap B$.

证明 $A-(A-B)=A\cap(A^c\cup B)=A\cap B$.

0.15. $A\cup(B-A)=A\cup B$.

证明 $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^c)=(A\cup B)\cap U$

$=A\cap B$.

0.16. $A\cap(B-A)=\phi$,

证明，$A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A^c) = \phi$.

0.17. 验证迪摩根法则［20，(*a*)和(*b*)］$A = \phi$的情况下也像$A \neq \phi$的情况下一样成立。

证明　若$A = \phi$，则

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right)^c = \phi^c = U = \bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha^c.$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha\right)^c = U^c = \phi = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha^c.$$

0.18. 实直线R与自身的笛卡儿乘积是实平面，若第一象限是集：

$\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x,\ y$实数$\}$.

试把这第一象限写为笛卡儿乘积。

解：用R_1表示正实轴，则

$$R_1 \times R_1 = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$$
$$= \{(x, y) \mid x \in R_1,\ y \in R_1\}.$$

0.19. 若$R^+ = \{x \mid x$实数，$x > 0\}$。$\mathfrak{A}$是R^+的所有子集的族，若

$$B = [-1, 1] = \{x \mid x\text{实数},\ -1 \leqq x \leqq 1\}.$$

试描述$\mathfrak{A} \cap B$。

解　因$\mathfrak{A} \cap B$表示族$\{A \cap B \mid A \in \mathfrak{A}\}$，其中$A$是$R^+$的任一子集，由于$[-1, 0] \notin \mathfrak{A}$，而$(0, 1] \in \mathfrak{A}$，所以$\mathfrak{A} \cap B$是$(0, 1]$的所有子集的族，因为$(0, 1]$的任一子集$C$也是$R^+$的子集，故$C \in \mathfrak{A}$，所以$\mathfrak{A} \cap B$是$\mathfrak{A}$的一个子族。

§4　欧　拉—温　示　意　图

0.20. 画欧拉——温示意图，说明下列每个情况：

(*a*) $A \subseteq B$.

(*b*) $A \cap B \neq \phi$.

(*c*) $A \subset B^c$.

(*d*) $A \cap B \neq \phi$，$B \cap C \neq \phi$，$C \cap D \neq \phi$.
$D \cap A \neq \phi$，$A \cap C = \phi$，$B \cap D = \phi$.

解　(*a*)，(*b*)，(*c*)，略。

(*d*) 如下图0.1。

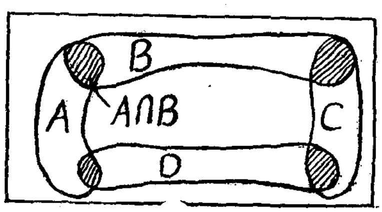

图　0.1

§5　关　　系

0.21. 在正整数的集Z^+内，设$x R y$意味着$x - y$是可以被7除（即$x - y = 7K$，其中K是整数）。证明R是一个等价关系并叙述这个等价类。

证明　因$x R y$，即$x - y = 7K$，其中K是整数，于是

(1) 对每个 $x\in Z^+$，$x-x=7\times0=0$，所以 xRx.

(2) 若 xRy，即 $x-y=7K$，K为整数，故 $y-x=-(x-y)=7(-K)$，$-K$ 亦为整数，所以也有 yRx。

(3) 若 xRy 和 yRz，即 $x-y=7K_1$，$y-z=7K_2$，K_1 和 K_2 均为整数，而

$$x-z=x-y+(y-z)=7(K_1+K_2),\ K_1+K_2\ 为整数。$$

所以有 xRz，即R是集 Z^+ 内的一个等价关系，

对任一 $x\in Z^+$，由定义

$$[x]=\{y\mid y\in Z^+,\ xRy\}.$$

即

$$[x]=\{y\mid y\in Z^+,\ x-y=7K,\ K为整数\}$$
$$=\{y\mid y\in Z^+,\ y=x-7K,\ K为整数\}.$$

亦即

$$[x]=\{x\mid x-7K_1,\ K_1为负整数\}$$
$$\cup\{x\mid x-7K_2>0,\ K_2为正整数\}.$$

0.22. 在正整数的集 Z^+ 内，设$m\leqq n$意味着m能整除n（即$n=mK$，其中$K\in Z^+$），证明“$\leqq$”是关于 Z^+ 的一个半序。

证明　因$m\leqq n$，即$n=mK$，K为某一正整数，于是

(1) 对$m\in Z^+$，由于$m=m\cdot1$，$1\in Z^+$，所以有$m\leqq m$。

(2) 对m，$n\in Z^+$，$n\leqq m$，$m\leqq n$，则$m=n$。

因为这时有$m=nK_1$，$n=mK_2$，故 $m=nK_1=(mK_2)K_1=mK_1K_2$，从而 $K_1K_2=1$，由于K_1，$K_2\in Z^+$，于是推得 $K_1=K_2=1$，即 $m=n$。

(3) 对m，n，$P\in Z^+$，$m\leqq n$，$n\leqq P$，即$n=mK_1$，$P=nK_2$，K_1与$K_2\in Z^+$，于是

$$P=(mK_1)K=mK_3,\ K_3=K_1\cdot K_2\in Z^+.$$

所以，$m\leqq P$

故“$\leqq$”是关于 Z^+ 的一个半序。

§6. 无　限　集

练　习

0.23. 证明：若A是无限的且$a\in A$，则$A-\{a\}$是无限的。

证明　因为A是无限的且$a\in A$，所以$A-\{a\}\neq\phi$。

倘若$A-\{a\}$是有限的，则存在一个正整数n，使集$Z_n=\{K\mid 0<K\leqslant n\}$与$A-\{a\}$之间有一个一对一的对应，于是得到：

$Z_{n+1}=\{K\mid 0<K\leqslant n+1\}$与$[A-\{a\}]\cup\{a\}=A$之间存在一个一对一的对应，这说明$A$不是无限的，矛盾。

0.24. 判断下述的正整数集Z^+是不可数的“证明”：按通常的方式写出每个正整数，但在它头一个数码之前用一串无限个零接排在左边，例如17就写作……00017，设集Z^+是可数的并建立起这个明显的一对一的对应：$n\longleftrightarrow\cdots\cdots000n$，例如124与……000124对应，按

通常的次序写成一个表，即：

$$\cdots\cdots 0001$$
$$\cdots\cdots 0002$$
$$\cdots\cdots 0003$$

等等。

现构造一个新数如下：在上面表内一行一行地往下找，对角线上记入的数码，若表的第n个数的第n位数码是5，令新数的第n位数是6，若表内第n个数的第n位数码异于5，则令新数的第n位数为5，这样构造的数与表内的第n个数在第n位上不相同，因此与表内所有的数都不同。从而上述的一对一的对应不是所要的对应。由此集Z^+是不可数的。

解：按题设表内第n个数是指由上而下按自然数的顺序数n行该行所对应的数，第n个数的第n位数码是指上述的第n行（对应第n个数）从右向左数n个数码而到达的第n个数码，如第11个数，在表内位于第11行，即

$$\cdots\cdots 00011.$$

第１１个数的第１１位数码即是上面从右边１开始向左（第二位是１，第三位是零）数１１个数码该数码位置上的数是零。

显然除第一个数的第一位数码是1外，其余的第n个数的第n位数（$n>1$）均是零。这是因为一个K位数（如$n=11$是二位数）的最小数值为10^{K-1}，不难验证$10^{K-1}>K$.（$K>1$）.

所以表内第n个数的第n位数（$n=1, 2\cdots\cdots$）均异于5。故构造出的新数是５５５……，这当然不是一个自然数（因任何一个自然数都是有有限位的）. 故题中推得Z^+是不可数的判断是错误的。即这样的找法并没有找到不在表内的正整数。

第一章　拓　扑　空　间

§1　邻域系和拓扑

每个例子都是一个练习题，而且例子中所作的断语都应当作为练习加以证明。

1.1.　设R是实直线，定义$(a, b)=\{x|\ a<x<b\}$且定义

$$\mathscr{U}_x=\{U|\text{对}a,\ b\in R,\ a<b,\ x\in(a,b)\subseteq U\}.$$

则$\mathscr{U}_x$是在x点的邻域系，并且按照1.2关系R形成一个拓扑，这样形成的拓扑叫做关于R的惯常拓扑。

解：验证$\mathscr{U}_x$满足1.1定义中的四个条件

（1）对每个$U\in\mathscr{U}_x$，$\because x\in(a,b)\subseteq U$，$\therefore x\in U$.

（2）对某一$U\in\mathscr{U}_x$，$V\supseteq U$，由于$x\in(a,b)\subseteq U\subseteq V$，所以$x\in(a,b)\subseteq V$，于是$V\in\mathscr{U}_x$。

（3）若U和$V\in\mathscr{U}_x$，则有$x\in(a,b)\subseteq U$，$x\in(c,d)\subseteq V$. 由于$x\in(a,b)$，$x\in(c,d)$，$\therefore x\in(a,b)\cap(c,d)$. 令$P=max\{a,c\}$，$q=min\{b,d\}$，这时$P<x<q$，于是得到

$$x\in(p,q)=[(a,b)\cap(c,d)]\subseteq U\cap V.$$

所以　　$U\cap V\in\mathscr{U}_x$。

（4）若$U\in\mathscr{U}_x$，于是有$a,b\in R$，$a<b$，使得$x\in(a,b)\subseteq U$，取$V=(a,b)$，所以$V\in\mathscr{U}_x$，当$y\in V$时，即有$y\in(a,b)\subseteq U$，故$U\in\mathscr{U}_y$.

所以$\mathscr{U}_x$是点x的邻域系，故可按照1.2形成拓扑$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\,|\,x\in R\}$.

1.2.　设$E=R\times R$，其中R是实直线，也就是E是实平面。

设x，$y\in E$，其中$x=(a,b)$，$y=(c,d)$定义

$$\rho(x,y)=[(a-c)^2+(b-d)^2]^{\frac{1}{2}}。$$

$\rho(x,y)$叫做从x到y的距离，定义

$$S_\varepsilon(x)=\{y|\ \rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

叫做以x为中心的开ε球。最后定义

$$\mathscr{U}_x=\{U\ |U\supseteq S_\varepsilon(x),\ \text{对某一个}\ \varepsilon>0\}.$$

这时，$\mathscr{U}_x$是在x点的邻域系，并按照1.2形成一个拓扑，这样形成的拓扑，叫做关于E的惯常拓扑。

解：（1）对每个$U\in\mathscr{U}_x$，有某一$\varepsilon>0$，使$S_\varepsilon(x)\subseteq U$，由于$\rho(x,x)=0<\varepsilon$，$\therefore x\in S_\varepsilon(x)$，于是得$x\in U$。

（2）对某一$U\in\mathscr{U}_x$，$V\supseteq U$，由于对某个$\varepsilon>0$，$S_\varepsilon(x)\subseteq U$，$\therefore$对此$\varepsilon>0$，$S_\varepsilon(x)\subseteq V$，故$V\in\mathscr{U}_x$.

（3）若U和$V\in\mathscr{U}_x$，则有$\varepsilon_1>0$和$\varepsilon_2>0$，使$S\varepsilon_1(x)\subseteq U$，$S\varepsilon_2(x)\subseteq V$，取$\varepsilon=min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，于是$S\varepsilon_1(x)\cap S\varepsilon_2(x)=S\varepsilon(x)$. 故$S\varepsilon(x)\subseteq U\cap V$，所以$U\cap V\in\mathscr{U}_x$.

（4）若$U\in\mathscr{U}_x$，则有$\varepsilon>0$使$S\varepsilon(x)\subseteq U$，取$V=S\varepsilon(x)$,故$V\in\mathscr{U}_x$，则当$y\in V$时，$\rho(y,x)<\varepsilon$。令$\varepsilon_0=\varepsilon-\rho(y,x)$，则$S\varepsilon_0(y)\subseteq S\varepsilon(x)\subseteq U$，这是由于对任意的$z\in S\varepsilon_0(y)$，有

$$\rho(z,x)=\rho(x,z)\leqq\rho(x,y)+\rho(y,z)<\rho(x,y)+\varepsilon_0=\varepsilon.$$

所以$z\in S\varepsilon(x)$，故得到$U\in\mathscr{U}_y$.

即$\mathscr{U}_x$是x点的邻域系，故可定义

$$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\mid x\in E\}.$$

1.3. 设X是由某一个序$\leqq$所确定的半序集。即（α）$x\leqq y$和$y\leqq Z$包含$x\leqq Z$。（β）$x\leqq y$和$y\leqq x$包含$x=y$。（γ）对所有的$x\in X$，$x\leqq x$。定义$S_r(x)=\{y\mid x\leqq y\}$，且定义

$$\mathscr{U}_x=\{U\mid U\supseteq S_r(x)\}.$$

则$\mathscr{U}_x$是在x点的邻域系，对X定义的这个拓扑$\mathscr{T}$（按照1.2）叫做关于X的右序拓扑，左序拓扑也能由把原来的集代以集$S_r(x)=\{y\mid y\leqq x\}$定义出来。

解：（1）对每个$U\in\mathscr{U}_x$，有$S_r(x)=\{y|x\leqq y\}\subseteq U$,而$x\leqq x$，$\therefore x\in S_r(x)$，于是$x\in U$。

（2）对某一$U\in\mathscr{U}_x$，$U\subseteq V$，由于有$x\in S_r(x)\subseteq U\subseteq V$，即$S_r(x)\subseteq V$，$\therefore V\in\mathscr{U}_x$。

（3）若$U,V\in\mathscr{U}_x$，于是有$S_r\subseteq U$，$S_r(x)\subseteq V$.$\therefore S_r(x)\subseteq U\cap V$，故$U\cap V\in\mathscr{U}_x$。

（4）若$U\in\mathscr{U}_x$，令$V=S_r(x)$，则$V\in\mathscr{U}_x$，当$y\in V$时，则$x\leqq y$. 对任意的$z\in S_r(y)=\{z|\ y\leqq z\}$,有$y\leqq z$. 由题设（$\alpha$）知$x\leqq z$，$\therefore z\in S_r(x)$，故$S_r(y)\subseteq S_r(x)$. 即$S_r(y)\subseteq U$，于是得到$U\in\mathscr{U}_y$

所以$\mathscr{U}_x$是x点的邻域系，故$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\mid x\in X\}$.

1.4. 设X是所有那些实值可积函数的集，它们的共同的定义域是区间$[0,1]$，对$f\in X$，定义

$$S\varepsilon(f)=\{g\mid g\in X,\ \int_0^1|f-g|\,dX<\varepsilon\}.$$

并且定义

$$\mathscr{U}_f=\{U\mid U\supseteq S\varepsilon(f),\ \varepsilon>0\}.$$

则$\mathscr{U}_f$是在f点的邻域系，而且由1.2这样的邻域系形成一个拓扑。

解：（1）对每个$U\in\mathscr{U}_f$都有$\varepsilon>0$使$S\varepsilon(f)\subseteq U$，由于$\rho(f,f)=\int_0^1|f-f|\,dx=0<\varepsilon$。$\therefore f\in S\varepsilon(f)\subseteq U$，即$f\in U$。

（2）若对某一$U\in\mathscr{U}_f$，$V\supseteq U$，由于有$S\varepsilon(f)\subseteq U\subseteq V$，$\therefore V\in\mathscr{U}_f$.

（3）若U和$V\in\mathscr{U}_f$，则有$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$,使$S\varepsilon_1(f)\subseteq U$，$S\varepsilon_2(f)\subseteq V$，不妨设$\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$，则$S\varepsilon_1(f)\subseteq S\varepsilon_2(f)\subseteq V$，$\therefore S\varepsilon_1(f)\subseteq U\cap V$，故$U\cap V\in\mathscr{U}_f$.

（4）若$U\in\mathscr{U}_f$，这时有$S_\varepsilon(f)\subseteq U$，取$V=S_{\frac{\varepsilon}{2}}(f)$，因$S_{\frac{\varepsilon}{2}}(f)=V\subseteq V$.

$\therefore V\in\mathscr{U}_f$，由于$S_{\varepsilon/2}(f)\subseteq S_\varepsilon(f)\subseteq U$，当$P\in V=S_{\varepsilon/2}(f)$，即

$$\rho(f,p)=\int_0^1|f-p|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对任意的$q\in S_{\frac{\varepsilon}{2}}(P)$，即$\rho(p,q)=\int_0^1|p-q|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是$\rho(f,q)\leqslant\rho(f,p)+\rho(p,q)<\varepsilon$，$\therefore q\in S_\varepsilon(f)$，故$S_{\varepsilon/2}(p)\subseteq S_\varepsilon(f)\subseteq U$，于是得到$U\in\mathscr{U}_p$.

所以$\mathscr{U}_f$是在f点的邻域系，故可定义$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_f\mid f\in X\}$.

1.5. 设X是一个集，对每个$x\in X$，设$\mathscr{U}_x=\{U\mid x\in U\}$，则$\mathscr{U}_x$是在$x$点的邻域系，这样形成的拓扑，叫做关于$X$的离散拓扑。

解：（1）对每个$U\in\mathscr{U}_x$，依$\mathscr{U}_x$的定义，$x\in U$.

（2）若对某个$U\in\mathscr{U}_x$，$V\supseteq U$，由于$x\in U\subseteq V$，$\therefore x\in V$,即$V\in\mathscr{U}_x$.

（3）若U和$V\in\mathscr{U}_x$，由于$x\in U$，$x\in V$，故$x\in U\cap V$，$\therefore U\cap V\in\mathscr{U}_x$.

（4）若$U\in\mathscr{U}_x$，令$V=\{x\}$，$\because x\in V$，于是$V\subseteq\mathscr{U}_x$。由于$\{x\}=V$只有一个元素x，而$U\in\mathscr{U}_x$，得证。

1.6. 设X是一个集，对每个$x\in X$，设$\mathscr{U}_x=\{X\}$，则$\mathscr{U}_x$是关于x的邻域系，这样形成的拓扑，叫做关于X的平凡拓扑。

解：（1）$X\in\mathscr{U}_x$，有$x\in X$.

（2）对$X\in\mathscr{U}_x$且$V\supseteq X$，则$V=X$，$\therefore V=X\in\mathscr{U}_x$.

（3）U和$V\in\mathscr{U}_x$，则$U=V=X$，故$U\cap V=X\in\mathscr{U}_x$.

（4）若$U=X\in\mathscr{U}_x$，则有$V=X\in\mathscr{U}_x$，使当$y\in X=V$时，则有$V=X\in\mathscr{U}_y$.

所以$\mathscr{U}_x$是关于x点的邻域系。

1.7. 设X是一个集，$\mathscr{T}$和$\mathscr{T}'$是关于X的两个拓扑，则当且仅当对每个$x\in X$及对每个$U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，都有一个$U'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，使如$U'\subseteq U$，而且反之对每个$V'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，也都有一个$V\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，使如$V\subseteq V'$，则有$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$.

证明　由1.2知：若$\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x\mid x\in X\}$，$\mathscr{T}'=\{\mathscr{U}_x'\mid x\in X\}$是关于$X$的两个拓扑，则当且仅当对每一个$x\in X$，$\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x'$时，$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。

所以这里是对每个$x\in X$，证两个邻域系（集）相等。

1）若对每个$x\in X$与每个$U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，都有一个$U'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，使如$U'\subseteq U$，则由1.1（2）知：$U\in\mathscr{U}_x'$，即$\mathscr{U}_x\subseteq\mathscr{U}_x'$.

反之，若对每个$V'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，都有一个$V\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，使如$V\subseteq V'$，于是也由1.1（2）知：$V'\in\mathscr{U}_x$，即$\mathscr{U}_x'\subseteq\mathscr{U}_x$.

所以对每个$x\in X$，有$\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x'$，故有$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$.

2）若$\mathscr{T}=\mathscr{T}'$，即对每个$x\in X$，$\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x'$，于是对每个$U\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，由1.1（4）知存在一个$V\in\mathscr{U}_x$，且$V\subseteq U$.

令$U'=V\in\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x'$；即有$U'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，使如$U'=V\subseteq U$.

对每个$V'\in\mathscr{U}_x'\in\mathscr{T}'$，由1.1（4）知存在$w'\in\mathscr{U}_x'$且$w'\subseteq V'$.

令$V=w'\in\mathscr{U}_x'=\mathscr{U}_x$，即有$V=w'\in\mathscr{U}_x\in\mathscr{T}$，使$V\subseteq V'$.

§2　拓扑空间内的开集

1.8. 在实直线上，规定o为所有如下的集的类，这些集都是某些开区间（a，b），$a<b$的并，则o形成R的惯常拓扑。

证明（1）设A为指数集，o的任一个元用O_α表示（$\alpha\in A$）于是$O_\alpha=\bigcup\limits_{\beta\in B}(a,b)_\beta$，这里$B\subseteq A$是$A$的某一子集，即$O_\alpha$是一些开区间的并（$O_\alpha\in o$）。

再令$O=\bigcup\limits_{r\in C}O_r$，这里$C\subseteq A$是$A$的某一子集，由于$O_r(\in o)$是某些开区间的并，于是$O$也是一些开区间的并，所以$O\in o$.

（2）设$O_1\in o$，$O_2\in o$，则必须有两个指数β_1，β_2，使$(a,b)_{\beta_1}\subseteq O_1$，$(a,b)_{\beta_2}\subseteq O_2$，其中$a<b$. 而$(a,b)_{\beta_1}\cap(a,b)_{\beta_2}$或是空集$\phi$，或是一个开区间。于是$O_1\cap O_2$，即两个由某些开区间的并构成的集的交，或者是一个空集ϕ，或者是一些开区间的并。若是后者，则$O_1\cap O_2\in o$，若是空集ϕ见下面（4）。

（3）显然$R=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,n)$，其中$n$为正整数，则$R$是开区间的并，所以$R\in o$。

（4）$\phi\in o$，因为由假设构成o的这些集是任意多个开区间的并，当指数集的子集$B\subseteq A$是空集ϕ时，则$\bigcup\limits_{\beta\in B}(a,b)_\beta=\phi$，所以空集也包含在内。

以上验证满足1.6定理中的四个条件，故o形成R的惯常拓扑。

因为一个开区间（a，b），（$a<b$）也是并，所以可令

$\mathscr{U}_x=\{U|$ 对$a,b\in R$，$a<b$，$x\in(a,b)\subseteq U\}$.则同于1.1题。

1.9. 在实平面上，规定o为所有如下的集的类，这些集是某些开圆的并，则o形成平面点集的惯常拓扑。

证明（1）设A为指数集，o的元（集）为O_α（$\alpha\in A$），且O_α是开区间的并，令$O=\bigcup\limits_{\beta\in B}O_\beta$.其中$B\subseteq A$是$A$的某一子集，显然$O$亦是开圆的并，所以$O\in o$。

（2）$\phi\in o$，因为题设开圆的并可取指数集B是空集。

（3）若$O_1\in o$，$O_2\in o$，当$O_1\cap O_2=\phi$时，则$O_1\cap O_2\in o$，当$O_1\cap O_2\neq\phi$，记$O_1\cap O_2=D$，对任一$x\in D$，设$O_1=S_{\varepsilon_1}(x_1)$，$O_2=S_{\varepsilon_2}(x_2)$，令$\rho(x,x_1)=d_1<\varepsilon_1$，$\rho(x,x_2)=d_2<\varepsilon_2$，取$\varepsilon=min(\varepsilon_2-d_2,\ \varepsilon_1-d_1)$. 考虑$S_\varepsilon(x)$，设$y\in S_\varepsilon(x)$,则$\rho(y,x)<\varepsilon$，于是$\rho(y,x_2)\leqslant\rho(y,x)+\rho(x,x_2)<\varepsilon+d_2\leqslant(\varepsilon_2-d_2)+d_2=\varepsilon_2$，即$y\in S_{\varepsilon_2}(x_2)$。同理$y\in S_{\varepsilon_1}(x_1)$，所以$S_\varepsilon(x)\subseteq D$，而$x$是$D$内任意的点，故$D$是开圆的并，所以$D\in o$. 显然可推得一般的$O_1\cap C_2\in o$.

（4）$R\times R=E=\bigcup\limits_{n}\{x|\rho(x,0)<n\}$，其中$n$为自然数，$x=(a,b)$，$\rho(x,0)=\sqrt{a^2+b^2}$.即$E$是开圆的并，所以$E\in o$.

以上验证满足1.6定理中的四个条件，故o形成平面点集的惯常拓扑。

1.10. 在一半序集X中，规定o为所有如下的集族，这些集是集$S_r(x)$，$x\in X$（参见练习1.3）的并，这时o形成X的右序拓扑。

证明（1）因$S_r(x)=\{y|\ x\leqq y\}$，令o中的元（集）为$O_\alpha(\alpha\in A)$，而O_α为集$S_r(x)(x\in X)$的并，再令$O=\bigcup\limits_{\alpha\in B}O_\alpha$（$B$为$A$的某一子族），故$O$仍是集$S_r(x)$的并，所以$O\in o$。

（2）$\phi\in o$，因为集$S_r(x)$（$x\in X$）的并，可以取指数集是空集。

（3）若$O_1\in o$，$O_2\in o$，对任意两个集

$$S_r(x)=\{y\mid x\leqq y\},\ S_r(z)=\{y\mid z\leqq y\}.$$

倘若$x\leqq z$（或$z\leqq x$），则$S_r(x)\cap S_r(z)=S_r(z)$，（或为$S_r(x)$），而$S_r(z)$可视为一个$S_r(z)$的并。

所以 $$S_r(x)\cap S_r(z)=S_r(z)\in o.$$

倘若x与z不能比较，则$S_r(x)$中“大于或等于x”的y与$S_r(z)$中“大于或等于z”的y，第一个能够比较的分别记为y_1与y_2，不妨设$y_1<y_2$，则$S_r(x)\cap S_r(z)=S_r(y_2)=\{y\ |y_2\leqq y\}$，显然$S_r(y_2)\in o$。

若$S_r(x)\cap S_r(z)=\phi$，则$\phi\in o$（见(2)）。

（4）$X\in o$，因对任意的$x\in X$，有$x\leqq x$，所以$S_r(x)$不是空集，故$X=\bigcup\limits_{x\in X}S_r(x)$，于是$X\in o$。

满足1.6定理中的四个条件，故o形成X的右序拓扑。

1.11，在以[0，1]为公共定义域的所有可积实值函数的集里，规定o为所有如下的集的类，这些集是形如$S_\varepsilon(f)$的集的并，其中$\varepsilon>0$，f是在[0，1]上的可积实值函数，这时o形成练习1.4的拓扑。

证明：设定义在[0，1]的所有可积实值函数的集为X，对每个$f\in X$。

$$S_\varepsilon(f)=\{g\mid g\in X,\ \int_0^1|f-g|\,dx<\varepsilon,\ \varepsilon>0\}.$$

（1）设o的元（集）为O_α，O_α为形如$S_\varepsilon(f)$的集的并，$\alpha\in A$，A为指数集，再令

$$O=\bigcup_{\alpha\in B}O_\alpha \qquad \text{其中}B\text{是}A\text{的某一子集。}$$

显然O也是形如$S_\varepsilon(f)$的集的并，所以$O\in o$。

（2）设$O_1\in o$，$O_2\in o$，考虑$O_1\cap O_2$，为此先讨论任意两个形如$S_\varepsilon(f)$的集$S_{\varepsilon_1}(f_1)$与$S_{\varepsilon_2}(f_2)$的交，若$S_{\varepsilon_1}(f_1)\cap S_{\varepsilon_2}(f_2)\neq\phi$，则有$f$使如

$$f\in S_{\varepsilon_1}(f_1)\quad \text{且}\quad f\in S_{\varepsilon_2}(f_2).$$

令

$$\int_0^1|f_1-f|\,dx=a,\qquad \int_0^1|f_2-f|\,dx=b.$$

取

$$\varepsilon=min\{|\varepsilon_1-a|,\ |\varepsilon_2-b|\}.$$

则

$$S_\varepsilon(f)=\{g\mid g\in X,\ \int_0^1|f-g|\,dx<\varepsilon\}\subseteq S_{\varepsilon_1}(f_1)\cap S_{\varepsilon_2}(f_2).$$

这是因为对任意的 $g \in S\varepsilon(f)$，可以证明：

$$g \in S\varepsilon_1(f_1) \text{且} g \in S\varepsilon_2(f_2).$$

令

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f - g| dx$$

于是

$$\rho(f_1, g) \leqslant \rho(f_1, f) + \rho(f, g) < a + \varepsilon \leqslant a + \varepsilon_1 - a = \varepsilon_1$$
$$\rho(f_2, g) \leqslant \rho(f_2, f) + \rho(f, g) < b + \varepsilon \leqslant b + \varepsilon_2 - b = \varepsilon_2$$

所以

$$g \in S\varepsilon_1(f_1) \text{且} g \in S\varepsilon_2(f_2).$$

故

$$S\varepsilon(f) \subseteq S\varepsilon_1(f_1) \cap S\varepsilon_2(f_2).$$

而 $f\ (\in S\varepsilon_1(f) \cap S\varepsilon_2(f_2))$ 是任意的，所以$S\varepsilon_1(f_1) \cap S\varepsilon_2(f_2)$是形如 $S\varepsilon(f)$的集的并，故它属于 o。从而推得$O_1 \cap O_2$ 是形如 $S\varepsilon(f)$ 的集的并。故有：

$$O_1 \cap O_2 \in o.$$

若$O_1 \cap O_2 = \phi$　见下面（3）也属于 o。

（3）$\phi \in o$，因为由题设形如 $S\varepsilon(f)$的并可以是空类的并。

（4）$X \in o$，因对任一 $f \in X$，有

$$\rho(f, f) = 0 < \varepsilon.$$

即 $f \in S\varepsilon(f)$，亦即$S\varepsilon(f)$不空，于是

$$X = \bigcup_{f \in X} S\varepsilon(f).$$

所以$X \in o$。

1.12　在非空集X中，规定 o 为X的所有子集的族，则 o 形成X的离散拓扑。

证明　设A为指数集，X的子集记为O_α，$\alpha \in A$。

（1）o的任意多个集的并O。

$$O = \bigcup_{\alpha \in B} O_\alpha \quad (B \subseteq A).$$

显然$O \subseteq X$。即O是X的子集，所以$O \in o$。

（2）若$O_1 \in o$，$O_2 \in o$，则$O_1 \cap O_2 \neq \phi$或者$O_1 \cap O_2 = \phi$。倘若$O_1 \cap O_2 = D \neq \phi$，显然$D$是$X$的子集，所以$D \in o$，若$O_1 \cap O_2 = \phi$（见下）。

（3）$\phi \in o$，因空集按题设亦是X的子集。

（4）$X \subseteq X$，即X本身亦可视为X的子集，$X \in o$。

满足 1.6 定理中的条件，故 o 形成关于X的拓扑且是离散拓扑。因每个 $x \in X$，$\{x\}$也是X的子集，令

$$\mathscr{W}_x = \{U \mid x \in \{x\} \subseteq U\}.$$

则同于习题1.5。

1.13　在非空集X中，规定 o 为集族$\{X, \phi\}$，则 o 形成X的平凡拓扑。

证明　因 o 中只有两个集X，ϕ，于是

（1）$X \cup \phi = X \in o$，

（2） $X\cap\phi=\phi\in o$.

（3） $\phi\in o$.

（4） $X\in o$.

满足1.6定理中的四条件，故 o 形成 X 的平凡拓扑。

因对每个 $x\in X$，令 $\mathscr{U}_x=\{X\}$，则同于练习1.6。

§3 极限点和导集

1.14 在实直线上带有惯常拓扑，则 a 和 b 都是开区间（a，b）的极限点。

证明．由练习1.1知直线上的惯常拓扑为 $\mathscr{T}=\{\mathscr{U}_x|\ x\in R\}$，其中

$$\mathscr{U}_x=\{U\,|\text{对}\ a、b\in R,\ a<b,\ x\in(a,\ b)\subseteq U\}.$$

于是
$$\mathscr{U}_a=\{V\,|\text{对}\ c,\ d\in R,\ c<d,\ a\in(c,\ d)\subseteq V\}.$$

所以对每个 $V\in\mathscr{U}_a$，有 $a\in(c,\ d)\subseteq V$，即 $c<a<d$，而（a，d）$\cap$（a，b）$\neq\phi$，故 $V\cap$（a，b）都至少包含异于 a 的一点 y。即 a 是（a，b）的极限点。

同理 b 也是（a，b）的极限点。

1.15．在实平面上带有惯常拓扑，则任何形如（o，y）的点，都是集 $D=\{(x,y)|\ x>o\}$ 的极限点。

证明．用 P_y 表示点（o，y），即 $P_y=(o,\ y)$，显然以点 P_y 为中心的开 ε 球 $S_\varepsilon(P_y)$ 与 D 之交都至少含有一点（x，y），其中 $o<x<\varepsilon$，这时，$\rho((x,y),(o,y))=\sqrt{(x-o)^2+(y-y)^2}=|x|=x<\varepsilon$，故 $P_y=(o,\ y)$ 是 D 的极限点。

1.16．在关于半序集 X 的右序拓扑内，若 $x\in X$ 不是 X 的最小元（即对所有的 $y\in X$，$x\leqq y$ 的结论是不成立的），则任何 $y<x$ 都是集 $S_r(x)$ 的极限点。

证明 $\because$ $S_r(x)=\{z\,|\,x\leqq z\}$.

$S_r(y)=\{t\,|\,y\leqq t\}$.

$\mathscr{U}_y=\{V\,|\,S_r(y)\subseteq V\}$.

由于 $y<x$，$\therefore x\in S_r(y)$，于是，对每个 $V\in\mathscr{U}_y$，有 $x\in S_r(y)\subseteq V$。故 $V\cap S_r(x)$ 都包含 $x\neq y$，所以 y 是集 $S_r(x)$ 的极限点。

1.17．所有在[0，1]上可积函数的集里，用练习1.4定义的拓扑，令

$$Y=\left\{f\,\middle|\,\int_0^1 f dx\neq 0\right\}.$$

设对 $x\neq 1$，$g(x)=0$，$g(1)=1$，则 g 是 Y 的一个极限点。

事实上，对仅有有限多个 $x\in[0，1]$ 的值具有异于零的函数值的任何函数，都是 Y 的极限点。

证明．设在[0，1]上可积函数的集为 X，而在1.4定义的拓扑中。

$$\mathscr{U}_f=\{U\,|\,U\supseteq S_\varepsilon(f),\ \ \varepsilon>0\}.$$

其中

$$S_\varepsilon(f)=\left\{\varphi\,|\,\varphi\in X,\ \ \int_0^1|f-\varphi|\,dx<\varepsilon\right\}.$$

于是

$$S_{\varepsilon}(g)=\left\{\varphi \mid \varphi \in X, \quad \int_0^1 |g-\varphi|\, dx=\int_0^1 |\varphi|\, dx<\varepsilon\right\}$$

$$\mathscr{W}_g=\{V \mid V \supseteq S_{\varepsilon}(g)\}$$

注意

$$\int_0^1 g dx=\int_0^1 |o|\, dx=\int_0^1 |g-g|\, dx=o<\varepsilon$$

故

$$g(x)\in S_{\varepsilon}(g)\subseteq V.$$

又若定义在[0 , 1]上，$\varphi(x)=f(x)=\dfrac{\varepsilon}{2}$。

于是

$$\int_0^1 f dx=\int_0^1 |f|\, dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

所以

$$\varphi(x)=f(x)\in S_{\varepsilon}(g),\ \text{且}\ f\in Y$$

故对每个$V\in\mathscr{W}_g$，有 $f\in S_{\varepsilon}(g)\subseteq V$，且$f\neq g$因之得到$g$是$Y$的一个极限点。

对在[0 , 1]上仅有有限个点异于零的任何函数$P(x)$，由于$\int_0^1 P dx=0$，和上面的g一样，于是函数$P(x)$也是Y的一个极限点。

1.18。设X是具有离散拓扑的非空集，设$A\subseteq X$及$x\in X$，则x不是A的极限点。

证明。由练习1.5知：对每个$x\in X$

$$\mathscr{U}_x=\{U \mid x\in U\}.$$

显然$\{x\}\in\mathscr{U}_x$，对$A\subseteq X$，则$A\cap\{x\}$不含有任何异于x点的点。所以x不是A的极限点。

1.19。设X是至少有两个元素的集，并设X有平凡拓扑，$A\subseteq X$和$x\in X$，则除非$A=\phi$或$A=\{x\}$，在其他情况，x都是A的极限点。

证明。因X有平凡拓扑，故$\mathscr{U}_x=\{X\}$，对每个$U\in\mathscr{U}_x=\{X\}$，即$U=X$

当$A=\phi$或$A=\{x\}$。则显然$U\cap A$不含有任何异于x的点，所以x不是A的极限点。

当$A\neq\phi$且$A\neq\{x\}$，由X至少有两个元素，设$y\in X$，且$y\in A$。则$U=X\cap A$都含有$y\neq x$，所以此时x是A的极限点。

1.20。在实数直线上，带有惯常拓扑，设$A=(a,\ b)$。则$A'=[a,\ b]$。

设　$B=\{x \mid 0<x\leqq 1\ \text{或}\ x=2\}$

则　$B'=[0,\ 1]$.

证明。由练习1.14知a与b是开区间的极限点，当$x\in(a,b)$时，显然x是(a,b)的极限点，对任何$y\notin[a,b]$时，无论是$y<a$，或$y>b$，显然不是极限点，所以$A'=[a,b]$。

$B'=[0,1]$显然

1.21. 在实平面内带有惯常拓扑，设 $D=\{(x,y)\mid x>0\}$，则 $D'=\{(x,y)\mid x\geqq 0\}$。

设　$E=\{(x,y)\mid x$ 及 y 都是整数$\}$,

则　$E'=\phi$.

证明. 由练习1.15知，形如 $(0,y)$ 的点，都是 $D=\{(x,y)\mid x>0\}$ 的极限点，又 D 内的每一点 (x,y) $(x>0)$，显然都是 D 的极限点，而其他的点 (x,y)（其中 $x<0$）显然不是 D 的极限点，所以

$$D'=\{(x,y)\mid x\geqq 0\}.$$

对任一点 $a=(x,y)\in E$，则以 a 为中心的开 $\varepsilon\left(=\frac{1}{2}\right)$ 球:

$$S_{\varepsilon=\frac{1}{2}}(a)=\left\{b\mid \rho(a,b)<\varepsilon=\frac{1}{2}\right\}$$

内，不含有异于 a 的 E 的其他任何点，故 a 不是 E 的极限点，即 E 中任何点都不是 E 的极限点。

对不在 E 中的任一点 $b=(x',y')$，则 x' 与 y' 中至少有一个不是整数，例如 x' 不是整数而 y' 是整数，令 $[x']$ 表示不超过 x' 的最大整数，取 $\varepsilon=min\{|x'-[x']|,[x']+1-x'\}$，若 x' 与 y' 都不是整数，取

$\varepsilon=min\{|x'-[x']|,|y'-[y']|,[x']+1-x',[y']+1-y'\}$ 于是以 b 为中心的开 ε 球

$$S_\varepsilon(b)=\{c\mid \rho(b,c)<\varepsilon\}$$

内不含有 E 中的任何点，所以 b 不是 E 的极限点，故 $E'=\phi$。

1.22. 设 X 是半序集具有右序拓扑，并设 $A=\{x\}$，则 $A'=\{y\mid y<x\}$。

证明. 由练习1.16知：对任何 $y<x$ 都是 $S_r(x)=\{z\mid x\leqq z\}$ 的极限点，即 y 的每个邻域 $V\in\mathscr{U}_y$ 都包含 $x\neq y$。从而 y 是集 $\{x\}$ 的极限点。而 x 的每个邻域 U 都不包含 $\{x\}$ 的异于 x 的点，因 $\{x\}$ 不含任何异于 x 的点，所以 x 本身不是 $A=\{x\}$ 的极限点。

对任何 $z>x$，由于

$$S_r(z)=\{P\mid z\leqq P\},\ \mathscr{U}_z=\{V\mid V\geqslant S_r(z)\}.$$

故有 $V=S_r(z)\in\mathscr{U}_z$ 不含有 A 的点 x，即 $V\cap A=\phi$。

所以 $z\ (>x)$ 不是 A 的极限点。

于是推得　　$A'=\{y\mid y<x\}$.

1.23. 在任何拓扑空间内 $\phi'=\phi$。

证明. 因任何拓扑空间内任一点的任何邻域，均不含有 ϕ 中的点（$\because\phi$ 内无点），所以任何点都不是 ϕ 的极限点。

故　　$\phi'=\phi$.

1.24. 在任何拓扑空间内，若 $A\subseteq B$，则 $A'\subseteq B'$。

证明. 若 A 有一个极限点 $x\notin B'$，即 x 不是 B 的极限点，于是存在一个邻域 $U\in\mathscr{U}_x$，使 U 内不含 B 内任何异于 x 的点，而 $A\subseteq B$，所以 U 内不含有 A 内任何异于 x 的点，这与 x