大連大學豫科講義

解析幾何學

(大連大學豫科講義)

解析幾何學

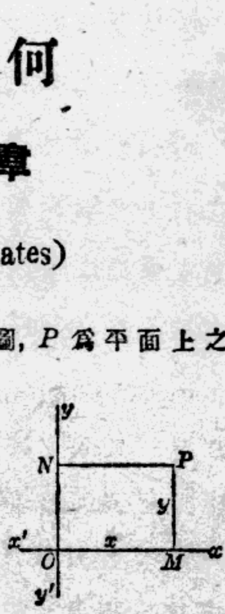
目 次

解析幾何

第一章

坐標* (Coördinates)

1. 平面上點之位置. 如圖, P 爲平面上之一點.若在此平面上引互相垂直之兩直線 $x'x$ 及 $y'y$ 相交於 O, 從 P 點引 $x'x$ 及 $y'y$ 之垂直線 PM 及 PN, 則 OM 及 MP 稱爲 P 點之坐標. OM 爲橫坐標 (abscissa), MP 爲縱坐標 (ordinate). $x'x$ 及 $y'y$ 爲坐標軸 (coördinate axes), 而橫軸 $x'x$ 常稱爲 x 軸

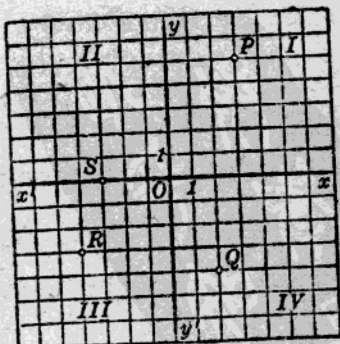


*本章所述之坐標一名笛卡兒坐標,因笛卡兒氏(Descartes)所發明,故名.又兩坐標軸互相垂直者稱爲正坐標,斜交者稱爲斜坐標.本書祇用正坐標.

(x-axis), 縱軸 $y'y$ 常稱為 y 軸 (y-axis), 又其交點為原點 (origin).

橫坐標在 $y'y$ 之右者為正, 在左者為負; 縱坐標在 $x'x$ 之上者為正, 在下者為負.

$x'x$ 與 $y'y$ 分平面為四部份, 稱為象限(quadrants); 在右上角者稱為第一象限 (first quadrant), 左上角者為第二象限 (second quadrant), 左下角者為第三象限 (third quadrant), 右下角者為第四象限 (fourth quadrant). 所以在第一象限之點之兩坐標皆為正; 在第二象限則橫坐標為負, 縱坐標為正; 在第三象限兩坐標皆為負; 在第四象限則橫坐標為正, 縱坐標為負.



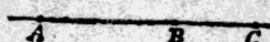
如圖, P 點之橫坐標為 3, 縱坐標為 5, 為簡便計, 記為(3,5). 在括弧內先記橫坐標, 次記縱坐標.

此(3,5)非但表示P點之坐標,以後竟以此代表P點.仿此,$(2,-4)$乃代表横坐標爲2,縱坐標爲-4之Q點,$(-4,-3)$代表R點,$(-3,0)$代表S點,$(0,0)$代表原點.

在1頁圖中,縱坐標MP等於ON,故有時以ON作爲縱坐標.

由上述知幾何學上之一點必有二實數爲其坐標;以二實數爲坐標必可決定一點.故可以代數方法或稱爲解析方法研究幾何圖形之性質,解析幾何學即用代數方法研究幾何之科學也

2. **有向線分及射影**(directed line segment and projection). 初等幾何學中之線分有大小而無方向,解析幾何學中則線分除大小外兼有方向.如圖,線分AB與線分BA大小



相等而方向相反.線分由A至B以AB表之,由B A以BA表之.若AB爲正,則BA爲負.故$AB=$ BA又在水平位置時,從左向右爲正;在鉛垂位置時,從下向上爲正.

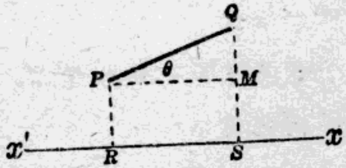
因

$$AB=-BA,$$

故 $$AB+BA=0.$$

又因 $$AB+BC=AC=-CA,$$

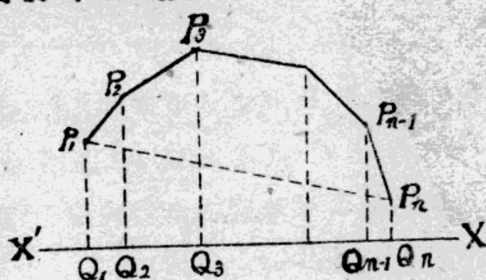
故 $$AB+BC+CA=0.$$



一有向線分 PQ 及無限直線 $x'x$. 從 P 及 Q 各引 $x'x$ 之垂線 PR 及 QS, 則 R 稱為 P 點之射影, S 為 Q 點之射影, 而 RS 為 PQ 之射影. 又 QP 之射影為 SR. 因 $RS=-SR$, 故 PQ 之射影與 QP 之射影大小相等而方向相反.

若已知 PQ 與 $x'x$ 所成之角為 θ, 則 $RS=PQ\cos\theta$.

定理: 任意折線 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots\cdots, P_{n-1}P_n$ 之射影之和等於 P_1P_n 之射影.

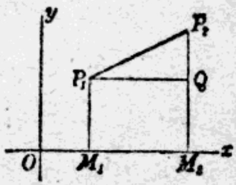


證: 如圖, P_1P_2, $P_2P_3 \cdots\cdots P_{n-1}P_n$ 之諸射影為

$Q_1Q_2, Q_2Q_3\cdots Q_{n-1}Q_n$,則$Q_1Q_2+Q_2Q_3+\cdots+Q_{n-1}Q_n=Q_1Q_n$.

系　多邊形各邊順次所成之射影之和爲零.

3　兩點間之距離　若已知兩點之坐標,則兩點間之距離可用其坐標求得之.



設P_1之坐標爲(x_1, y_1),又P_2之坐標爲(x_2, y_2). 自P_1, P_2引Ox之垂線P_1M_1, P_2M_2,又過P_1點引Ox之平行線P_1Q,則

$$P_1P_2\text{之距離}\ d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2}$$

但

$$P_1Q=M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1,$$

$$QP_2=M_2P_2-M_2Q=y_2-y_1,$$

$$\therefore\ d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\qquad\text{公式(1)}$$

P_1, P_2二點不論在任何象限中,此公式亦能應用,今舉例如下:

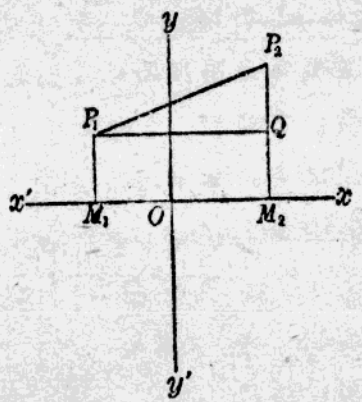
若P_1在第二象限,P_2在第一象限,則

$$P_1P_2=d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2};$$

但

$$P_1Q=M_1M_2$$

$$=M_1O+OM_2=-x_1+x_2=x_2-x_1,$$



又 $$QP_2=M_2P_2-M_2Q=M_2P_2-M_1P_1$$

$$=y_2-y_1,$$

$$\therefore\quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

例題 1. 求點 $(1,3)$ 與點 $(-5,5)$ 間之距離.

解. 設 $(1,3)$ 為 P_1, 又 $(-5,5)$ 為 P_2, 則

$$x_1=1,\ y_1=3,\ x_2=-5,\ y_2=5.$$

代入公式(1)得

$$d=\sqrt{(-5-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

習題一

1. 以 $(-10,-8)$, $(36,24)$, $(-12,20)$ 為頂點, 繪一三角形.

2. 繪諸點：$\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $\left(1, \frac{7}{6}\right)$.

3. 以 $(0, 0)$, $(0.07, 0.11)$, $(-0.03, 0.06)$, $(0.20, -0.08)$ 爲頂點，繪一四邊形.

4. 繪諸點：$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$.

5. 在 x 軸上之各點之坐標若何？在 y 軸上者如何？在過 O 且二等分第一及第三象限之直線上者如何？二等分第二及第四象限上者如何？在 y 軸右邊二格且平行於 y 軸之直線上者如何？在 x 軸下三格且平行於 x 軸之直線上者如何？

求下列二點間之距離及其在二坐標軸上之射影.

6. $(-4, -4)$ 及 $(1, 3)$. 答：距離 $=\sqrt{74}$；射影爲 $5, 7$.

7. $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

答：距離 $=\sqrt{10}$；射影爲 $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3}$.

8. $(0, 0)$ 及 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 答：距離 $=a$；射影爲 $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

9. $(a+b, c+a)$ 及 $(c+a, b+c)$.

答：距離 $=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}$；射影爲 $c-b, b-a$.

10. 證明以 $(2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 5)$ 爲頂點之三角形乃一直角三角形，且求其面積. 答：10.

11. 證明以 $(5, 5)$, $(-7, 3)$, $(0, -2)$ 爲頂點之三角形乃一等腰三角形，且求其面積. 答：37.

12. 若一圓之中心爲 $(2, 5)$，且過一點 $(14, 10)$，求其半徑. 此圓過點 $(13, 12)$ 否？

13. 一圓之中心爲(5, 6), 且切於 y 軸. 此圓過(4, 1)否? 過(1, 3)否?

14. 若弦長爲 4, 此弦被一點 (5, 4) 所二等分, 又中心爲(3, 0), 求圓之半徑.　　答: $2\sqrt{6}$.

15. 直徑之兩端爲(10, −2)及(−4, −4). 此圓過(−2, 2)否?

16. 圓之中心爲(−4, 2), 又半徑爲 5. 求被一點(−2, 1)所二等分之弦之長.　　答: $4\sqrt{5}$.

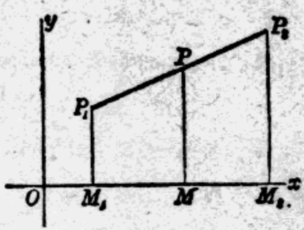
17. 求證三點(10, 4), (7, 1), (−2, −2)在一直線上.

18. 三點(3, 0), (−1, 8), (48, −90)在一直線上否?

19. 若一點 (x, y) 與一點(−5, 3)間之距離爲 5, 用方程式表之.　　答: $(x+5)^2+(y-3)^2=25$.

20. 一點與原點之距離爲 10, 又距 y 軸爲 −6. 求此點之坐標.　　答: $(-6, \pm 8)$.

4. 線分之分點及中點. 如圖, P: (x, y) 爲線分 P_1P_2 上之任意一點.



設 P_1 之坐標爲 (x_1, y_1),

P_2 爲 (x_2, y_2),

又 $P_1P : PP_2 = m : n$, 則

$$OM = OM_1 + M_1M.$$

但　　$OM = x,\ OM_1 = x_1,$

又因　　$M_1M : MM_2 = m : n,$

$$\therefore \quad M_1M : M_1M + MM_2 = m : m+n,$$

即
$$M_1M : M_1M_2 = m : m+n,$$

$$\therefore \quad M_1M = \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

$$\therefore \quad x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

同理,
$$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1),$$

簡單之,
$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}. \end{cases} \qquad \text{公式(2)}$$

又 P: (x, y) 爲 P_1P_2 之中點時, 則 $m = n$

故
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{cases} \qquad \text{公式(3)}$$

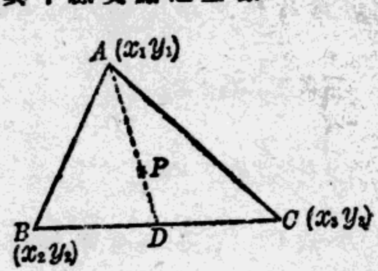
〔注意〕 公式(2), (3)亦不專限於第一象限, 卽在其他任何象限亦能通用. 嗣後從第一象限所得之公式皆能應用於其他任何象限, 不再說明矣.

例題 1. 求分 $P_1(-1,-6)$ 與 $P_2(3,0)$ 間線分使成 $m:n=-\frac{1}{4}$ 之點之坐標.

解.
$$x_1=-1,\ y_1=-6,\ x_2=3,\ y_2=0,$$
$$m:n=1:-4,$$
$$\therefore\quad x=\frac{(-4)\times(-1)+1\times3}{1-4}=-2\frac{1}{3},$$
$$y=\frac{(-4)\times(-6)+1\times0}{1-4}=-8.$$

故所求之分點為 $\left(-2\frac{1}{3},-8\right)$.

例題 2. 一三角形之頂點為 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 求其中線交點之坐標.



解. 從平面幾何知 $AP=\frac{2}{3}AD$, 即 $AP:PD=2:1$. D 之坐標為 $\frac{1}{2}(x_2+x_3)$, $\frac{1}{2}(y_2+y_3)$. 故得

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

習題二

1. 自(8, −18)至(−6, −4)間之線分被分成四等分. 求各分點之坐標.

2. 自(−11, 1)至(7, −2)間之線分,延長至何處適等於原線分之二倍? 答: (25, −5).

3. 圓之中心爲(5, 5),求過圓上一點(6, −9)之直徑之其他一端之坐標.

4. 等腰三角形以(3, −9)與(6, −4)間之線分爲底; 頂點爲(−8, 1), 求其高. 答: $\frac{5}{2}\sqrt{34}$.

5. 分自(−1, 4)至(−5, −8)間之線分使成1:3, 求分點之坐標. 答: (−2, 1).

6. 分自(−3, −5)至(6, 9)間之線分使成2:5. 求分點之坐標. 答: $\left(-\frac{3}{7}, -1\right)$.

7. 分自(2, 6)至(−4, 8)間之線分使其比爲$-\frac{4}{3}$之點之坐標. 答: (−22, 14).

8. 直角三角形斜邊之中點至三頂點等距離,試證明之.

9. 矩形之三頂點爲(3, −2), (7, 6). (3, 8). 求第四頂點.

10. 用二種方法證明以(3, 4), (4, 12), (6, −2), (5, −10)爲頂點之四邊形爲一平行四邊形.

11. 平行四邊形之順次三頂點爲(5, 2), (−2, −3), (3, −4)求第四頂點

12. 若四邊形之頂點爲(6, 8), (−4, 0), (−2, −6), (4, −4), 求證對邊中點之聯結線互相二等分.

13. 若梯形之頂點爲(−8, 0), (−4, −4), (−4, 4)及(4, −4), 證明不平行之兩邊之中點之聯結線等於二底和之半.

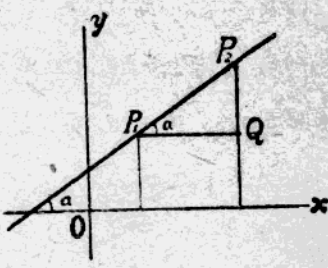
14. 求一點(16 3)分自(−5, 0)至(4, −9)間之線分之比.

答: $-\frac{3}{2}$.

15. 若一三角形三邊之中點爲(2, 1), (3, 3)及(6, 2), 求三角形三頂點之坐標.　答: (−1, 2), (5, 0), (7, 4).

5. 直線之斜角 (angle of inclination) 及斜率 (slope).

一直線與x軸相交,在交點右側之x軸部分與直線在x軸上方部分所成之正角稱爲斜角 如圖,α卽斜角.又斜角之正切稱爲斜率.斜角之範圍自0°起迄180°止.



若已知直線上兩點之坐標.則可求直線之斜率如下:

設已知 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 爲直線上之兩點,則

斜率 $m=\tan\alpha=\frac{QP_2}{P_1Q}$,

因之, $$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ 公式(4)

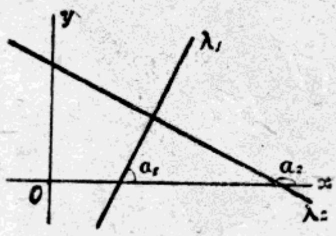
若 α 在 $0°$ 與 $90°$ 之間,則 m 爲正.

若 α 在 $90°$ 與 $180°$ 之間,則 m 爲負.

若 α 爲 0,則 $m=0$,卽直線與 x 軸平行.

若 α 爲 $90°$ 則直線與 y 軸平行.

6 平行線及垂直線. 若兩直線平行,則其斜率必相等,此顯而易見者;其逆亦眞.



若兩直線 λ_1, λ_2 互相垂直,λ_1 之斜率爲 m_1,λ_2 之斜率爲 m_2,

則 $$m_1=\tan\alpha_1,\ m_2=\tan\alpha_2.$$

但 $$\alpha_2=\alpha_1+90°,$$