斯蓋二氏

解析幾何學題解

編者　楊執中

科學社印行

目　錄

第　八　章

習題（第177—178頁）……………………………………1
習題（第181頁）……………………………………15
習題（第188頁）……………………………………17
習題（第193—194頁）……………………………………23
習題（第196—197頁）……………………………………29
習題（第200頁）……………………………………32
習題（第204—205頁）……………………………………45
雜題（第205—206頁）……………………………………54

第　九　章

習題（第209—210頁）……………………………………64
習題（第211頁）……………………………………71
問題（第214—215頁）……………………………………81
習題（第216頁）……………………………………90
問題（第220—221頁）……………………………………97
問題（第223—224頁）……………………………………109
雜題（第224—225頁）……………………………………112

第　十　章

習題（第228頁）……………………………………128
習題（第230頁）……………………………………133
習題（第232—233頁）……………………………………141
習題（第234頁）……………………………………157
習題（第236—237頁）……………………………………164
問題（第239—240頁）……………………………………169
習題（第241頁）……………………………………182
習題（第243頁）……………………………………186
習題（第246頁）……………………………………194
雜題（第246—247頁）……………………………………203

第十一章

習題（第248−245）……………………………………………219
習題（第252−253頁）……………………………………………225
習題（第258−259頁）……………………………………………230
習題（第262頁）……………………………………………238
雜題（第262−263頁）……………………………………………246

第十二章

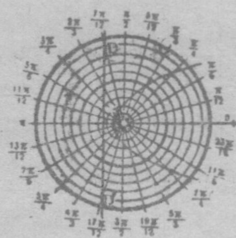
習題（第266頁）……………………………………………255
習題（第269頁）……………………………………………260
習題（第273頁）……………………………………………266
習題（第275頁）……………………………………………271
習題（第277−278頁）……………………………………………274
習題（第280頁）……………………………………………279

第　八　章

習　題 (第177—178頁)

1. 討論下列諸圓錐曲線,並各求其 e 及 p 之值. 且各作其焦點及準線.

(a) $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.



解: 因 $\theta=0$, $\rho=\infty$, 及 $\theta=\pi$, $\rho=1$;

故此圓錐截極軸於極點之左 1 單位;

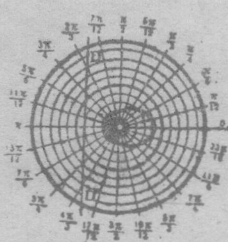
因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$. 故此圓錐曲線對於極軸爲對稱; 當 $1-\cos\theta=0$ 或 $\cos\theta=1$ 即當 $\theta=0$. ρ 等於無限. 故此曲線之兩端延至無限遠; θ 無可除掉之值.

將此方程式與 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$, 比較得

$1-\cos\theta=1-e\cos\theta$, $ep=2$.

故 $e=1$ 及 $p=2$. 因而此曲線爲拋物線. 焦點爲 $(1,0)$, 準線爲 $\rho\cos+1=0$.

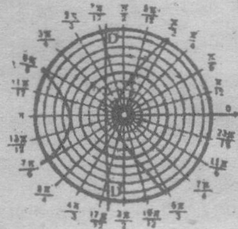
(b) $\rho=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$.



解: 因 $\theta=0$, $\rho=4$, 及 $\theta=\pi$, $\rho=\dfrac{4}{3}$; 故此曲線截極軸於極之右 4 單位及左 $\dfrac{4}{3}$ 單位之處. 因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 故此曲線對極軸爲對稱. 若 $1-\frac{1}{2}\cos\theta=0$ 或 $\cos\theta=2$; 則 ρ 變爲無限大, 此爲不可能; 故 θ 無値可使 ρ 變爲無限大, 即 θ 無可除掉之値. 將此方程式與 $p=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 比較, 得 $e=\frac{1}{2}$ 及 $p=4$.

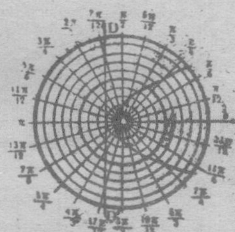
因而此曲線為橢圓．焦點為 $(-\frac{4}{3},0)$，準線為 $\rho\cos=\pm\frac{16}{3}$．

(c) $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$．



解． 因 $\theta=0,\rho=-8$ 及 $\theta=\pi,\rho=\frac{8}{3}$；故此曲線截極軸於極之左8單位與 $\frac{8}{3}$ 單位之處．因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$．故此曲線對於極軸為對稱，當 $1-2\cos\theta=0$ 或 $\cos\theta=\frac{1}{2}$；即 θ 有兩值可使 ρ 變為無限大；θ 無可除掉之值；將此式與 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 比較得 $e=2$，及 $p=4$．此曲線為雙曲線；焦點為 $(\frac{16}{3},0)$，準線為 $\rho\cos\theta-\frac{4}{3}=0$．

(d) $\rho=\dfrac{5}{2-2\cos\theta}$．

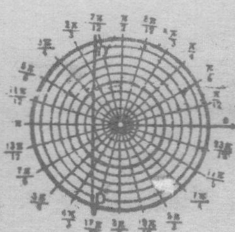


因 $\theta=0,\rho=\infty$，及 $\theta=\pi,\rho=\frac{5}{4}$；故此曲線截極軸於極之左於 $\frac{5}{4}$ 單位之處．

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$．故此曲線對於極軸為對稱．

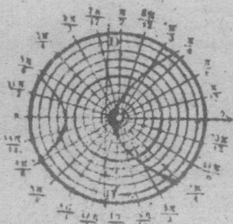
當 $2-2\cos\theta=0$，或 $\cos\theta=1$；即 θ 有一值可使此曲線變為無限大即 θ 無可除掉之值．將已知方程式書為 $\rho=\dfrac{}{1-\cos\theta}$ 之形式．而與 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 相比較得 $e=1$ 及 $p=\frac{5}{2}$．因而此曲線為拋物線，焦點 $(\frac{5}{4},0)$，準線 $\rho\cos\theta=-\frac{5}{4}$．

(e) $\rho=\dfrac{3}{3-\cos\theta}$．



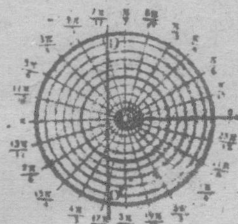
因 $\theta=0,\rho=\frac{3}{2}$，及 $\theta=\pi,\rho=\frac{3}{4}$ 故此曲線截極軸於極之左在 $\frac{3}{4}$ 右在 $\frac{3}{2}$ 單位之處．因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，故此曲線對

於極軸爲對稱．若 $3-\cos\theta=0$ 即 $\cos\theta=3$，ρ 變爲無窮大．此爲不可能，故 θ 無值可使 ρ 變爲無限大，即 θ 無可除掉之值．將此方程式與 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 比較得 $e=\frac{1}{3}$，$P=3$ 因而此曲線爲橢圓．焦點爲 $(-\frac{3}{8},0)$．及準線爲 $\rho\cos\theta=-\frac{27}{8}$．



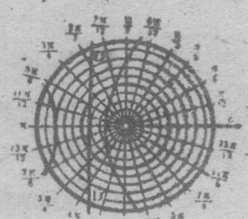
(f) $\rho=\frac{6}{2-3\cos\theta}$.

解．因 $\theta=0$，$\rho=-6$ 及 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{6}{5}$ 故此曲線截極軸於極之左於 6 及 $\frac{6}{5}$ 單位之處，又因 $\cos\theta=\cos(-\theta)$ 故此曲線對於極軸爲對稱．當 $2-3\cos\theta=0$ 即 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 可使 ρ 增至無限遠．而 θ 無可除掉之值，將此式書爲 $\rho=\frac{3}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$ 而與 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 相比較，得 $e=\frac{3}{2}$，$p=2$．此曲線爲雙曲線，焦點爲 $(\frac{18}{5},0)$ 而準線爲 $\rho\cos\theta=\frac{8}{5}$．



(g) $\rho=\frac{2}{2-\cos\theta}$.

解．因 $\theta=0$，$\rho=2$，及 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{2}{3}$．故此曲線截極軸於極之左在 $\frac{2}{3}$ 右在 2 單位之處，因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 故此曲線對於極軸爲對稱；若 $2-\cos\theta=0$ 即 $\cos\theta=2$ 使 ρ 變爲無窮大，但此爲不可能，故 ρ 不能增至無限遠，即 θ 無可除掉之值．將已知方程式此書爲 $\rho=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$ 而與 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 相比較得 $e=\frac{1}{2}$．$p=2$，故此曲線爲橢圓焦點爲 $(-\frac{2}{3},0)$ 而準線爲 $\rho\cos\theta=-\frac{8}{3}$．



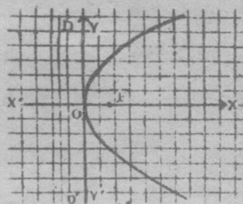
(h) $\rho=\frac{12}{3-4\cos\theta}$.

解．因 $\theta=0$，$\rho=-12$ 及 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{12}{7}$；

故此曲線截極軸於極之左於12單位及$\frac{12}{7}$單位之處.

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$. 故此曲線對於極軸爲對稱. 若 $3-4\cos\theta=0$ 即 $\cos\theta=\frac{3}{4}$ 亦即 θ有二值可使 r 變爲無限大, θ無可除掉之值. 已知方程式可書如 $\rho=\frac{4}{1-\frac{4}{3}\cos\theta}$. 之式; 將此式與$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 比較, 得$e=\frac{4}{3}$, 及$p=3$. 此曲線爲雙曲線, 焦點爲$(\frac{48}{7},0)$, 準線爲$\rho\cos\theta=\frac{27}{7}$.

2. 將問題1之諸方程式化爲矩形坐標, 用165頁法則化簡之, 並討論所得之方程式. 求焦點之坐標及準線之新變數之方程式. 繪各方程式在新軸之軌跡, 焦點, 及準線. 並作圖.



(a) $\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$.

解. 代 ρ 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\cos\theta$ 以 $\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 於已知方程式中, 得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{1-\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}},\ \text{或}\ \pm\sqrt{x^2+y^2}=x+2.$$

化簡得 $\quad y^2-4x-4=0.$

設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$,

則得 $(y'+k)^2-4(x'+h)-4=0$, 或

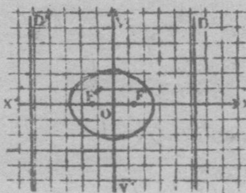
$$(1)\quad \left.\begin{array}{r} y'^2-4x'+2ky'+k^2 \\ -4h \\ -4 \end{array}\right|=0.$$

使y'之係數及常數項爲零, 得$k=0, h=-1$. 代入(1)得$y'^2=4x'$. 因焦點之坐標在舊軸爲$(0,0)$故$0=x'-1$; $0=y'+0$, 或$x'=1$; $y'=0$. 故焦點之坐標在新軸爲$(1,0)$

又因準線之方程式在舊軸爲$x=-2$.

自　$x=x'-1$　得所求之方程式爲$-2=x'-1$，或 $x'=-1$.

(b)　$\rho=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$.



解.　代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及$\cos\theta$

以$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於已知方程式中，得

$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2}{1-\frac{1}{2}\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+^2}}}$　或

$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}x+2$.

化簡　　　　$3x^2+4y^2-8x-16=0$.

設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$.

得 $3(x'+h)^2+4(y'+k)^2-8(x'+h)-16=0$，或

$$(1)\quad 3x'^2+4y'^2+\left.\begin{array}{r}6h\\-8\end{array}\right|x'+8ky'+\left.\begin{array}{r}3h^2\\+4k^2\\-8h\\-16\end{array}\right|=0.$$

使x'及y'之係數爲零得 $6h-8=0$；$8k=0$，或 $h=\frac{4}{3}$，$k=0$.

代入 (1)得 $3x'^2+4y'^2=\dfrac{64}{3}$，或除以$\dfrac{64}{3}$，得

$\dfrac{x'^2}{\frac{64}{9}}+\dfrac{y'^2}{\frac{16}{3}}=1$. 焦點之坐標在未移軸以前爲 (0,0) 故由

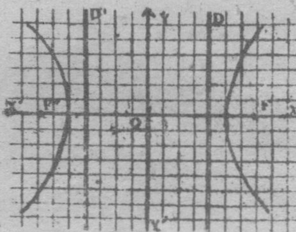
$x=x'+h$ 及 $y=y'+k$，得焦點之新坐標爲

$0=x'+\dfrac{4}{3}$，$0=y'+0$，或 $x'=-\dfrac{4}{3}$，$y=0$，即 $(-\dfrac{4}{3},0)$.

因準線方程式在舊軸爲 $x=-p=-4$，故所求之準線方程式爲

$-4=x'+\dfrac{4}{3}$，或 $x'=-\dfrac{16}{3}$.

(c) $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$.



解. 代 ρ 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\cos\theta$ 以 $\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 於已知方程式中得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{8}{1-\dfrac{2x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}},$$

或 $\pm\sqrt{x^2+y^2}=2x+8$.

化簡得 $3x^2-y^2+32x+64=0$.

設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$.

得 $3(x'+h)^2-(y'+k)^2+32(x'+h)+64=0$, 或

$$(1)\quad 3x'^2-y'^2+\left.\begin{matrix}6h\\+32\end{matrix}\right|x'-2ky'+\left|\begin{matrix}3h^2\\-k^2\\+32h\\+64\end{matrix}\right|=0.$$

使x'及y'之係數為零, 得 $6h+32=0$, $2k=0$.

解之以求h,k得$h=-\dfrac{16}{3}$. $k=0$.

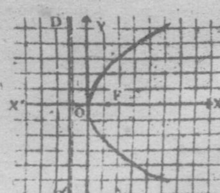
代入 (1) 得 $3x'^2-y'^2=\dfrac{64}{3}$, 或除以$\dfrac{64}{3}$, 得

$\dfrac{x'^2}{\frac{64}{9}}-\dfrac{y'^2}{\frac{64}{3}}=1$. 焦點之坐標在舊軸為$(0,0)$

故 $0=x'-\dfrac{16}{3}$, $0=y'+0$; 或 $x'=\dfrac{16}{3}$, $y'=0$.

而所求之焦點之坐標為 $\left(\dfrac{16}{3},0\right)$

準線在舊軸之方程式為 $x=-p=-4$.



由 $x=x'+h$, 得 $-4=x'-\dfrac{16}{3}$, 或

$x'=\dfrac{4}{3}$ 即為所求準線之方程式

(d) $\rho=\dfrac{5}{2-2\cos\theta}$.

解: 代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及代$\cos\theta$以$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於已知方程式中，

得$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{5}{2-\dfrac{2x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$，或$\pm\sqrt{x^2+y^2}=x+\dfrac{5}{2}$.

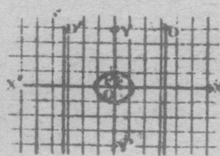
化簡得 $4y^2-20x-25=0$.

設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$.

得 $4(y'+k)^2-20(x'+h)-25=0$，或

$$(1)\quad \left.\begin{array}{r} 4y'^2+8ky'-20x'+4k^2 \\ +20h \\ -25 \end{array}\right| =0.$$

使y'之係數及常數項爲零，得 $8k=0$，及$4k^2-20h-25=0$，即得 $k=0, h=-\frac{5}{4}$. 代入(1)得 $4y'^2=20x'$，除以4得 $y'^2=5x'$. 焦點之坐標在舊軸爲$(0,0)$ ∴ $0=x'-\frac{5}{4}$; $0=y'+0$. ∴ $x'=\frac{5}{4}$, $y'=0$. 故焦點坐標在新軸爲$(\frac{5}{4},0)$，因準線方程式在舊軸爲$x=-p=-\frac{5}{2}$，由$x=x'+h$，得所求之準線之方程式爲$x=-\frac{5}{2}=x'-\frac{5}{4}$，或$x'=-\frac{5}{4}$.



(e) $\rho=\dfrac{3}{3-\cos\theta}$.

解. 代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及代$\cos\theta$以$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於已知方程式中得

$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{3}{3-\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$ 或 $\pm3\sqrt{x^2+y^2}-x=3$.

化簡得 $8x^2+9y^2-6x-9=0$.

設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$ 得

$8(x'+h)^2+9(y'+k)^2-6(x'+h)-9=0$ 或

$$(1)\quad 8x'^2+9y'^2+\left.\begin{matrix}16h\\-6\end{matrix}\right|x'+18ky'+\begin{matrix}8h^2\\+9k^2\\-6h\\-9\end{matrix}=0$$

設 x' 及 y' 之係數於零得 $16h-6=0,\ 18k=0$

解之以求 h,k 得 $h=\frac{3}{8},\ k=0.$

代入(1)式內得 $8x'^2+9y'^2=\frac{81}{8}.$

除以 $\frac{81}{8}$ 得 $\dfrac{x'^2}{\frac{81}{64}}+\dfrac{y'^2}{\frac{9}{8}}=1.$

焦點之坐標在舊軸爲(0,0)

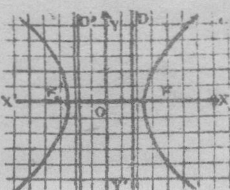
故 $0=x'+\frac{3}{8},\quad 0=y'+0\quad \therefore x'=-\frac{3}{8},\ y'=0.$

而所求焦點之坐標在新軸爲 $(-\frac{3}{8},0)$.

因準線之方程式在舊軸爲 $x=-p=-3$. 由 $x=x'+h$ 中得

$$-3=x'+\frac{3}{8}\quad \therefore x'=-\frac{27}{8}.$$

爲所求準線之方程式.



(f) $\rho=\dfrac{6}{2-3\cos\theta}.$

解. 代 ρ 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及代 $\cos\theta$ 以 $\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 於已知方程式中, 得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{6}{2-3\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}\quad 或\quad \pm2\sqrt{x^2+y^2}-3x=6.$$

化簡之得 $\qquad 5x^2-4y^2+36x+36=0.$

使 $x=x'+h,\ y=y'+k$ 得

$$5(x'+h)^2-4(y'+k)^2+36(x'+h)+36=0\ 或$$

$$(1)\quad \left.\begin{array}{r} 5x'^2-4y'^2+10h \\ 36 \end{array}\right|\left.\begin{array}{r} x'-8ky'+5h^2 \\ -4k^2 \\ +36h \\ +36 \end{array}\right| =0$$

設x'及y'之係數爲零，得 $10h+36=0,\ -8k=0$

解之以求h,k得$h=-\dfrac{18}{5},\ k=0$

代入(1) 得 $5x'^2-4y'^2=\dfrac{144}{5}$

除以$\dfrac{144}{5}$得 $\dfrac{x'^2}{\dfrac{144}{25}}-\dfrac{y'^2}{\dfrac{36}{5}}=1$

因焦點之坐標在舊軸爲(0,0)

故 $0=x'+h=x'-\dfrac{18}{5},\ 0=y'+k=y'+0$

$\therefore x'=\dfrac{18}{5},\ y'=0,$

故焦點之坐標在新軸爲 $(\dfrac{18}{5},0)$,

因準線之方程式在舊軸爲$x=-p=-2$

$-2=x'-\dfrac{18}{5}\quad \therefore x'=\dfrac{8}{5}$

爲準線在新軸之方程式.

(g) $\rho=\dfrac{2}{2-\cos\theta}$.

解. 代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及代$\cos\theta$以$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於已知方程式中得

$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2}{2-\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$或$\pm2\sqrt{x^2+y^2}-x=2$

化簡得 $3x^2+4y^2-4x-4=0$

設 $x=x'+k\quad y=y'+h$ 得

$3(x'+h)^2+4(y'+k)^2-4(x'+h)-4=0$ 或

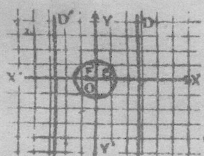
$$\text{(1)}\quad \begin{array}{r|l|l} 3x'^2+4y'^2+6h & x'+8ky'+3h^2 & =0 \\ -4 & \qquad\quad +4k^2 & \\ & \qquad\quad -4h & \\ & \qquad\quad -4 & \end{array}$$

使x'及y'之係數等於零，得$6h-4=0$，$8k=0$

解之以求及k得$h=\frac{2}{3}$, $k=0$.

代入(1)得 $3x'^2+4y^2=\dfrac{16}{3}$

除以$\dfrac{16}{3}$得 $\dfrac{x'^2}{\frac{16}{9}}+\dfrac{y'^2}{\frac{4}{3}}=1.$



因焦點坐標在舊軸爲(0,0)故

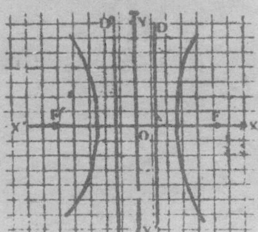
$0=x'+h=x'+\frac{2}{3}, 0=y'+h=y'+0$

$\therefore\ x'=-\frac{2}{3}$, $y'=0$ 因而焦點在新軸之坐標爲$(-\frac{2}{3},0)$

因準線之方程式在舊軸爲$x=-p=-2$ 故$-2=x'+\frac{2}{3}$

$$\therefore x'=-2-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}$$

爲所求之準線在新軸之方程式.



(h) $\rho=\dfrac{12}{3-4\cos\theta}$.

解. 代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及代$\cos\theta$以$\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於已知方程式得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{12}{3-\dfrac{4x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}, \text{或}\ \pm3\sqrt{x^2+y^2}=4x+12.$$

化簡得$7x'^2-9y'^2+96x+144=0$. 使$x=x'+h$及$y=y'+h$得

$$7(x'+h)^2-9(y'+k)^2+96(x'+h)+144=0\text{或}$$

$$\text{(1)}\quad \begin{array}{r|l|l} 7x'^2-9y'^2+14h & x'-18ky'+7h^2 & =0. \\ +96 & \qquad\quad -9k^2 & \\ & \qquad\quad +96h & \\ & \qquad\quad +144 & \end{array}$$

設x'及y'之係數爲零得$14h+96=0$，　$-18k=0$.

解之以求h,k得 $h=-\frac{48}{7}, k=0$.

代入(1)得 $7x'^2-9y'^2=\frac{1296}{7}$ 或

除以$\frac{1296}{7}$，$\frac{x'^2}{\frac{1296}{49}}-\frac{y'^2}{\frac{144}{7}}=1$.

因焦點之坐標在舊軸爲(0,0)，

$\therefore\quad 0=x'+h=x'-\frac{48}{7}$，

$\quad 0=y'+k=y'+0$；

$\therefore\quad x'=\frac{48}{7}$，$y'=0$.

故焦點之坐標在新軸爲 $(\frac{48}{7},0)$.

因準線之方程式在舊軸爲$x=-p=-3$由$x=x'+h$，

得 $-3=x'-\frac{48}{7}$或$x'=\frac{27}{7}$即所求之準線之方程式

3. 設(a) $e=1$，(b) $e\gtrless1$，試改(I)爲矩形坐標，化簡之，並求其在新軸之焦點之坐標及準線之方程式.

解：(a) 當 $e=1$ (1) 變爲 $\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$.

代ρ以$\pm\sqrt{x^2+y^2}$及代$\cos\theta$以$\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$得$\sqrt{x^2+y^2}=x+p$.

化簡$y^2-2px-p^2=0$.使$x=x'+h$及$y=y'+k$.得

$$(1)\quad y'^2+2ky'-2px'+\left.\begin{array}{l}k^2\\-2ph\\-p^2\end{array}\right|=0.$$

使y'之係數及常數項爲零，得 $2k=0, k^2-2ph-p^2=0$.

$\therefore\quad k=0, h=-\frac{p}{2}$. 代入(1) 得$y'^2=2px'$.

因焦點之坐標在舊軸爲(0,0)

$\therefore\quad 0=x'-\frac{p}{2}$，$0=y'+0$. $\therefore\quad x'=\frac{p}{2}$，$y'=0$.

故所求焦點之坐標爲$(\frac{p}{2},0)$.

因準線之方程式在舊軸爲

$x=-p$, 由 $x=x'+h$, 得 $-p=x'-\frac{p}{2}$ 或 $x'=-\frac{p}{2}$

爲所求之準線之方程式.

(b) $e \gtreqless 1$. 代ρ以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 及代 $\cos\theta$ 以$\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$於 (1) 得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ep}{1-\frac{ex}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}, \text{或} \pm\sqrt{x^2+y^2}=ex+ep.$$

平方且化簡$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$

設 $x=x'+h$及$y=y'+k$. 得

$$\text{(1)} \quad (1-e^2)x'^2+y^2+\left|\begin{matrix}2(1-e^2)h\\-2e^2p\end{matrix}\right| x'+2ky'+\left|\begin{matrix}(1-e^2)h^2\\+k^2\\-2e^2ph\\-e^2p^2\end{matrix}\right|=0$$

設 x'及y'之係數爲零,得

$2k=0$, $2(1-e^2)h-2e^2p=0$. 解之,得 $k=0, h=\frac{e^2p}{1-e^2}$.

代入 (1) 得 $(1-e^2)x'^2+y'^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$,

除以$\frac{e^2p^2}{1-e^2}$, $\frac{x'^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y'^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)}}=1$.

因焦點之坐標在舊軸爲原點

由 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 得 $0=x'+\frac{e^2p}{1-e^2}$, $0=y'+0$,

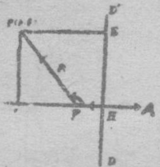
或$x'=\frac{-e^2p}{1-e^2}$, $y'=0$.

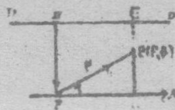
故焦點之新坐標爲 $(\frac{-e^2p}{1-e^2},0)$. 因準線之方程式在舊軸爲

$x=-p$由$x=x'+h$,得所求之準線之新方程式爲$-p=x'+\frac{e^2p}{1-e^2}$,

或 $x'=-\frac{p}{1-e^2}$.

4. 設(a) 焦點在準線之左，(b)極軸與準線平行，試求圓錐曲線之方程式.





解. (a) 設P為曲線上之任一點，則由定義，得 $\frac{FP}{EP}=e$.

由圖(a) $FP=\rho$ 及 $EP=HF+FM=p+\rho\cos(\pi-\theta)=p-\rho\cos\theta$

代入FP及EP之值得 $\frac{\rho}{p-\rho\cos\theta}=e$； 解之以求$\rho$得

$\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$.

(b) 設P為曲線上之任一點，則由定義得 $\frac{EP}{EP}=e$.

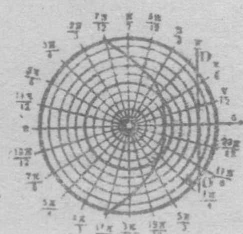
由圖(b)， $FP=\rho$， 及 $EP=HF+MP=p+\rho\sin\theta$.

代入FP及EP之值得 $\frac{\rho}{p+\rho\sin\theta}=e$.

解之以求ρ得 $\rho=\frac{ep}{1-e\sin\theta}$.

5. 繪出並討論下列諸軌跡，求出e及p，並繪各軌跡之準線.

(a) $\rho=\frac{8}{1+\cos\theta}$



解. 因 $\theta=0$ $\rho=4$，及 $\theta=\pi$ $\rho=\infty$

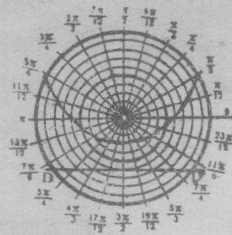
故此曲線截極軸於極之右4單位之處.

當 $1+\cos\theta=0$，或 $\cos\theta=-1$；故 θ 只有一値使ρ變為無限.

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$. 故此曲線對於極軸為對稱. θ無値可除掉. 將此方程式與 $\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$ 比較得 $e=1$， $p=8$.

故此曲線為拋物線.

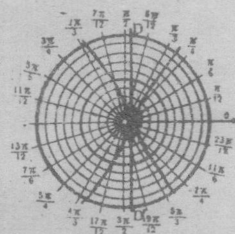
(b) $\rho=\dfrac{6}{1-\sin\theta}$.



解. 因 $\theta=0$ $p=6$ 及 $\theta=\pi$ $p=6$;故此曲線截極軸於極之左右各六單位之處,當 $1-\sin\theta=0$ 或 $\sin\theta=1$;

故 θ 在小於 2π 中只有一值使 ρ 變爲無限. θ 無可除掉之值將此方程式與 $p=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}$,比較得 $e=1$,$p=6$,故此曲線爲拋物線.

(c) $\rho=\dfrac{7}{3+10\cos\theta}$.



解. 因 $\theta=0$ $\rho=\dfrac{7}{13}$ 及 $\theta=\pi$ $\rho=-1$;

故此曲線截極軸於極之右 $\dfrac{7}{13}$ 及 1 單位之處.

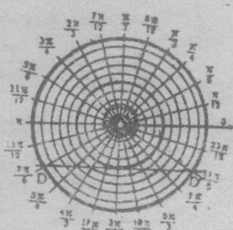
$\cos\theta=-\dfrac{3}{10}$,故 θ 可有兩值使 ρ 變爲無限.

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ 故此曲線對於極軸爲對稱. θ 無可除掉之值.

已知方程式可書爲 $\rho=\dfrac{\frac{7}{3}}{1+\frac{10}{3}\cos\theta}$ 之形式. 將此式與

$\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$ 比較得 $e=\dfrac{10}{3}$ 及 $p=\dfrac{7}{10}$. 故此曲線爲雙曲線.

(d) $\rho=\dfrac{5}{3-\sin\theta}$.



解: 因 $\theta=0,\rho=\dfrac{5}{3}$ 及 $\theta=\pi,\rho=\dfrac{5}{3}$.

故此曲線極軸於極之左右各爲 $\dfrac{5}{3}$ 單位之處

θ.無值可使 ρ 變爲無限,並無可除掉之值.

因此方程式可書爲 $\rho=\dfrac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}\sin\theta}$ 與 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}$ 比較得 $e=\dfrac{1}{3}$,