内部交流

全国部分重点院校

一九八三年招考硕士

研究生试题解答

（数学部分）

哈尔滨船舶工程学院

前　言

本书内容是一九八三年度部分重点理工科院校招收硕士研究生的入学数学试题及解答。参加本书试题解答和编审校核等工作的是我室全体同志。

编写这本书的主要目的是为了提高我院数学课教学质量用的内部辅导资料，当然它也颇有助于志在报考研究生的读者。

但是，由于编印时间急促，又限于水平和分工编写，错误、不妥和语调不谐之处，必然在所难免，恳请读者批评指正。

本书在编写、出版和发行过程中，还得到院内外其他有关单位的帮助和支持，在此一并表示诚恳的谢意。

哈船院数学教研室

一九八三年六月

目　录

清 华 大 学

（一）［10分］ 计算 $\int_1^3 arctg\sqrt{x}\,dx$。

（二）［10分］ 将函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x_0=1$ 处展成幂级数，并确定其收敛范围。

（三）［10分］ 设一物体运动 $s=s(t)$ 的速度与 $s(t)-as^2(t)$ 成正比，且 $s(0)=s_0$，求函数 $s(t)$，（其中 a 为正的常数，且 $as_0\neq 1$）。

（四）［10分］ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

已知矩阵 B 与 A 满足关系式 $AB=A+B$，试求 B。

（五）［10分］ 已知向量组 α_1，α_2，…，α_s，α_{s+1} $(s\geqslant 1)$ 线性无关。向量组 β_1，β_2，…，β_s 可表为 $\beta=\alpha_i+t_i\alpha_{s+1}$ $(i=1,2,\cdots,s)$，其中 t_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 是数。试证向量组 β_1，β_2，…，β_s 线性无关。

（六）［10分］ 欲造一无盖的长方体容器，已知底部造价为每平方米 3 元，侧面造价均为每平方米 1 元。现想用36元造一个容积最大的容器，求它的尺寸。

（七）［10分］ 已知 C 是平面上任意一条简单闭曲线，问常数 a 等于何值时曲线积分

$$\oint_C \frac{x\,dx-a\,y\,dy}{x^2+y^2}=0,$$

并说明理由。

（八）[10分] 设$z = xf(u) + g(u)$，$u = \frac{y}{x}$且 $f(u)$ 及 $g(u)$是二阶可导，试计算式子

$$A = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
。

（九）[10分]矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} 与 B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

是相似矩阵。

（1）求x与y；

（2）求一个适合$T^{-1}AT = A$的正交矩阵T。

（十）[10分] 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是正的、单调减的，且

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx。$$

证明：数列σ_1，σ_2，…，σ_n，…收敛。

题 解

（一）（解） 作变换 $y = \sqrt{x}$，$2y\,dy = dx$，则

$$\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} 2y\operatorname{arctg}y\,dy$$

$$= y^2\operatorname{arctg}y\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{1+y^2}dy$$

$$= \frac{3}{4}\pi - (x - \operatorname{arctg}x)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{9}\pi + 1 - \sqrt{3}。$$

（二）（解） 当 $|x-1|<2$ 时，

$$\int_0^x f(x)\,dx = 1-\frac{1}{1+x} = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n,$$

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}。$$

当 $x=-1$ 和 $x=3$ 时，级数的一般项不趋近于零，所以发散。故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2^{1-n}}(x-1)^{n-1}$$

其收敛域为（-1，3）。

（三）（解）设 k 为比例常数。依题意有方程的定解问题

$$\begin{cases} s'(t) = k(s(t)-as^2(t)) \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

如果 $s_0=0$，则 $s(t)=0$ 是方程的解。如果 $s_0\neq 0$，则 $s(0)-as^2(0)\neq 0$。分离变量得

$$k = \frac{s'(t)}{s(t)-as^2(t)} = \frac{s'(t)}{s(t)} + \frac{as'(t)}{1-as(t)}$$

$$kt = \int_0^t \frac{ds(t)}{s(t)} - \int_0^t \frac{d(1-as(t))}{1-as(t)}$$

$$= \ln\left|\frac{s(t)(1-as_0)}{s_0(1-as(t))}\right|$$

$$s(t) = \frac{s_0e^{kt}}{s_0ae^{kt}\pm(as_0-1)}。$$

从而$s(0)=\dfrac{s_0}{s_0 a\pm(as_0-1)}=s_0$。由于$s_0\neq 0$，所以只能取负号。故解为

$$s(t)=\frac{s_0e^{kt}}{s_0ae^{kt}-(as_0-1)}。$$

（四）（解）

$$A-I=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

由于$det(A-I)=1$，所以$A-I$可逆，且

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&3\\3&2&-6\end{pmatrix}$$

由于$A=AB-B=(A-I)B$，则

$$B=(A-I)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&3\\3&2&5\end{pmatrix}。$$

（五）证明：设有常数a_1，…，a_s使得

$$0=a_1\beta_1+\cdots+a_s\beta_s=a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s+\left(\sum_{i=1}^{s}a_it_i\right)\alpha_{s+1}$$

由于α_1，…，α_s,α_{s+1}线性无关，则$a_1=a_2=\cdots=a_s=0$，所以β_1，…，β_s线性无关。

（六）（解） 设长、宽、高分别为x、y、z，则容器的造价为

$$3xy+2(x+y)z$$

本题等价于求函数$v(x,\ y,\ z)=xyz$在条件$3xy+2(x+y)z-36=0$之下的最大值点。首先，x、y、$z\geqslant 0$且$xyz=0$的点不可为最大值点。所以函数$v(x,\ y,\ z)$在给定的条件下的最

大值一定存在。由已知条件解出 $z=\dfrac{36-3xy}{2(x+y)}$。记

$$v(x,y)=\frac{36-3xy}{2(x+y)}xy$$

在$x>0$，$y>0$中，$v(x,y)$的最大值一定在驻点取得。令

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(36y-6xy^2)(x+y)-(36yx-3x^2y^2)}{2(x+y)^2}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(36x-6yx^2)(x+y)-(36xy-3x^2y^2)}{2(x+y)^2}=0$$

得方程组

$$\begin{cases}36x-6yx^2=36y-6xy^2 & ①\\ (36y-6xy^2)(x+y)=36xy-3x^2y^2 & ②\end{cases}$$

解方程①得 $x=y$ 或$36-6xy=0$，$x=\dfrac{6}{y}$。把 $x=y$ 代入②得

$$24-4y^2=12-y^2$$

解出$y=2$，$x=2$，$z=3$，$v(2,2,3)=12$。把 $x=\dfrac{6}{y}$代入②得恒等式，于是有 $z=\dfrac{18}{2(y+\frac{6}{y})}=\dfrac{9y}{y^2+6}$。令 $f(y)=\dfrac{54y}{y^2+6}$，则$f(y)$的最大值只能在驻点取得。令

$$0=f'(y)=\frac{54(6-y^2)}{(y^2+6)^2},$$

则 $y=\sqrt{6}$，$x=y=\sqrt{6}$，$z=\dfrac{9}{12}\sqrt{6}=\dfrac{3}{4}\sqrt{6}$，

$$v(\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ \frac{3}{4}\sqrt{6}) = \frac{9}{2}\sqrt{6} < 12$$

所以（$\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$，$\frac{3}{4}\sqrt{6}$）不是最大值点。故使得用36元所造的具有最大体积的容器的尺寸为长 2 米、宽 2 米、高 3 米。

（七）（解） 设C的内部不含原点，则由格林公式有

$$0 = \oint_C \frac{x\,dx - a y\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{a y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_D \frac{(a+1)2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\,dy$$

其中D为由C所包围的区域。取C使得在D中 $xy>0$， 则有 $a+1=0$。如果$a=-1$，当C的内部无原点时，由格林公式可得

$$\oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

如果C的内部含有原点。取C_δ为以原点为园心的园，取顺时钟为其正方向。则由格林公式得

$$0 = \oint_{C+C_\delta} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \oint_{C_\delta} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$$

其中

$$\oint_{C_\delta} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta} x\,dx + y\,dy = 0$$

这里δ为C_δ的半径。所以有$\oint_C \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = 0$ 。

（八）（解） 由于

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$$

$$=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$g\left(\frac{y}{x}\right)$是$x$、$y$的零次齐次函数，$xf\left(\frac{y}{x}\right)$是$x$，$y$的一次齐次函数，则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)g\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)=xf\left(\frac{y}{x}\right)。$$

所以

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\left(xf\left(\frac{y}{x}\right)\right)=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

（九）（解）（1）因为相似的矩阵有相同的多项式

$det(A-\lambda I)=det(B-\lambda I)$

$(\lambda+2)(\lambda-2)[(\lambda+2)(\lambda-x)-4]$

$=(\lambda-2)^2(\lambda+3)(\lambda-y)$

比较两边的多项式的零点，有$y=-2$，$x=1$。

（2）令

$$T_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

则

$$T_{14}AT_{14}^{t}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&2&0\\0&2&1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

对于 2 × 2 矩阵 $\begin{pmatrix}-2&2\\2&1\end{pmatrix}$，$\lambda=2$ 及 $\lambda=-3$ 为其特征值。

当 $\lambda=2$ 时，解方程组

$$\begin{pmatrix}-2-2&2\\2&1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$$

得 $x_2=2x_1$，把 $(x_1,\ x_2)$ 标准化得 $x_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

当 $\lambda=-3$ 时，解方程组

$$\begin{pmatrix}-2+3&2\\2&1+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$$

得 $x_1=-2x_2$，把 $(x_1,\ x_2)$ 标准化得 $x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$。从而 2 × 2 矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

是正交矩阵，并且有

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^{t}\begin{pmatrix}-2&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}。$$

则取 T

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

便有$TAT' = B$。

（十）证明：由于$f(x) > 0$ （$1 \leqslant x < +\infty$）并且递减，所以

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad (k \leqslant x \leqslant k+1 \quad k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,dx \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$$

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = f(k+1), \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) - \left(\int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^{n} f(x)\,dx\right) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sigma_n = \sum_{k=2}^{n}\left(f(k) - \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\right) + f(1) > 0 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

所以$\{\sigma_n\}$是一个单调递减有界的数列，从而必收敛。证毕

北 京 钢 铁 学 院

一、解下列各题：（每小题 6 分，共30分）

(1) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，求y'。

(2) 设$f'(x)$在$(0,2\pi)$内连续，求满足方程

$$f(x)+\cos x=\int f'(x)\cos x\,dx \text{的函数} f(x).$$

(3) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=?$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=?$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x^m}{\operatorname{tg}x^n}=?$　m，n为自然数。

二、(1)设$F(u,\ v)$ 是u，v的任意可微函数，a 与 b 是常数，$a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}\neq0$，求证：由方程$F(x^2-az,\ y^2-bz)=0$ 所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足微分方程：

$$ay\frac{\partial z}{\partial x}+bx\frac{\partial z}{\partial y}=2xy。\quad（7\text{ 分}）$$

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}$的收敛域及其和。（8 分）

三、设有物质实体V(它是由 $z=1$ 与$z=x^2+y^2$围成的立体)，立体上任一点（x,y,z）处的密度是 $\mu=z$，求该实体的质量。（10分）

四、有人提出，人口数 y，当其充分大时，其增长率与 y 成

正比，如果考虑到疾病等原因，则增长率还要减少一个与y^2成正比的量，试求人口数 y 与时间 t 的关系，并求 $\lim\limits_{t\to+\infty} y$。（10分）

五、给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是绝对收敛，证明下面级数也绝对收敛

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$。（7 分）

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(a_n \neq -1)$。（8 分）

六、（1）设函数$f(x)$是$[a,b]$上非负的连续函数，且在某一点 $c\in[a,b]$，$f(c)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \qquad （7 分）$$

（2）证明：

$$\int_0^1 \frac{y^{2n+2}}{1+y^2}\,dy < \int_0^1 y^{2n+2}\,dy \text{及}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{y^{2n+2}}{1+y^2}\,dy = 0，$$ 其中 n 为自然数。（6 分）

（3）设$s_n(t) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\cdots + (-1)^n t^{2n}$。证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(t)\,dt = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和。（7 分）

解　答

一、

（1） $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\,(\sqrt{1-x^2})'$

$$= \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-sgnx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0<|x|<1)$$

当 $x=-1, 0, 1$ 时导数不存在。

(2) $f(x)+\cos x = \int f'(x)\cos x\, dx$

$$f'(x)-\sin x = f'(x)\cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{1-\cos x}\, dx$$

$$f(x) = \ln(1-\cos x)+c \quad (0<x<2\pi)$$

（c 为任意常数）。

(3) 原式 $= \int \ln(\ln x)\, dx$

$$= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \ln x \cdot \frac{1}{\ln x}\, d(\ln x)$$

$$= \ln x[\ln(\ln x)-1]+c$$ （c 为任意常数）。

(4) 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3\cdot 6} = \frac{1}{3}$。

(5) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg}x^m}{x^m}\cdot x^m}{\frac{\operatorname{tg}x^n}{x^n}\cdot x^n} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x^m}{x^m}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x^n}{x^n}} \lim\limits_{x\to 0} x^{m-n}$

$$=\begin{cases} 0, & \text{当} m>n \text{时} \\ 1, & \text{当} m=n \text{时} \\ \infty, & \text{当} m<n \text{时} \end{cases}$$

二、$F(x^2-az,\ y^2-bz)=0$，记　　　　(1)

$$u=x^2-az,\qquad v=y^2-bz。$$

(1) 式两边同时对 x 求导，则

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(2x-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

由于　$a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}\neq 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\dfrac{\partial F}{\partial u}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}。$$

同理把(1)两边同时对 y 求导，可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}。$$

故　$ay\dfrac{\partial z}{\partial x}+bx\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$=\frac{ay\cdot 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}+\frac{bx\cdot 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$