

科技译报

8

1978

华中工学院科技情报资料室

科技译报

一九七八年 第八期 总第三十二期

目 录

- 船波波形分析及其应用概况..... (1)
- 波形分析: 1975年现况
..... K. W. H. Eggers (29)
- 波形分析——英国物理试验所(NPL)的经验综述
..... N. Hegben (44)
- 船型设计的实践与理论基础
..... 乾崇夫等 (50)
- 线性兴波阻力理论用于船舶设计中的几个问题
..... 武隈克义 (86)
- 由奇点分布求出非对称船型的兴波阻力
..... 山口真裕 (92)
- 由兴波阻力测算求出源分布
..... 松井政博 (102)
- 实际船型的兴波及摩擦阻力
..... Bruce H. Adee (107)

船体伴流中速度分布的计标

..... 茂里一絃 (116)

根据最小兴波阻力理论设计高速实用船型的尝试

..... 九尾孟等 (126)

兴波阻力理论方法的发尸及其在船舶水动力学中的实际应用

..... А. И. Смородин (138)

改进运轨船新船型的实用方法

..... В. М. Штумпф (151)

由波形测易确定兴波阻力

..... L. W. Ward (163)

由测易横向波斜率确定船模兴波阻力

..... L. W. Ward (193)

船波波形分析及其应用概况

绪 言

自1872年W. Froude首创船舶试验水池, 提出将船舶水阻力划分为摩擦力和以兴波阻力为主的所谓剩余阻力的假说以来, 存在两个根本性问题: 第一是不能从理论上证实他这个假说, 第二是兴波阻力与船型最为密切相关, 但单纯通过他所提出的试验方法, 不能深入了解船型与兴波阻力之间的联系。

1898年Michell及稍后Havelock建立了兴波阻力的线性理论, 一个多世纪以来, 兴波理论取得很大进展。特别是在六十年代, 提出了多种波形分析的理论及测试技术, 可以由波形直接计算波幅谱及兴波阻力。这样就可标出真正消耗在兴波上的能量, 而不是象过去所谓的剩余阻力, 其中包括一些并非兴波阻力的未知量, 使问题模糊不清。从而为兴波理论研究开辟了一个新途径, 为从理论上证实Froude假说跨出了一大步, 同时这种方法将船型与波形相联系, 深入到船型的微小改变所引起波系的组成以至单元波幅的变化, 有利于直接通过波形分析改进船型。是一种很有发展前途的研究方法。

本文只在对波形分析法的基本原理及其应用作概略说明。

1. 船波的基本概念——波形渐近分析法^{[1][2][3]}

船波是一种复杂的自然现象, 从十九世纪末Kelvin开始, 到本世纪初Havelock以及Hogner通过一些简化性的假设条件, 诸如水介质无粘性, 不可压缩; 水表面无张力; 波高与波长比很小, 也就是线性化条件; 以及不受船体伴流影响等等, 建立了它的数学表达式。通过分析可以了解船波的一些基本性质。

船波传由运动船体所给予水的部分能量至船后。但并不是船波的所有成分都参与这一活动。具体讲, 由船所产生的波在水面移动, 包括有两种波, 其形态上是完全不同的。以下式表示:

$$\zeta(x, y) = \zeta_l(x, y) + \zeta_w(x, y) \quad (1.1)$$

式中: $\zeta_l(x, y)$ = 局下扰动波

$\zeta_w(x, y)$ = 自由波系

局下扰动波仅在邻近船体处是明显的, 这种波是非振荡波, 离开船体就单调快速减低。与局下扰动波相反, 自由波系包括振荡波, 不出现在船前, 仅出现在船后伸至无限远处。

两种波都持有能量(位能与动能之和), 而局下扰动波保持与时间无关的常能量波能, 其分布集中于船体附近; 而自由波系的范围与船的移动距离成比例增加。由于在波系中波运动能量的总

和随时间的增加而增加，因此局下扰动波不传能量，仅是自由波形系在起作用。所以对于稳态兴波阻力所联系的不是整个波系而只是自由波系。

本节只限于讨论自由波系。

设扰动点沿 x 轴的负方向以速度 V 前进，其后百构成行进波与扰动点同一速度沿 x 的正方向前进。

首先假定二维波顶线如图1中 AB 沿其垂线方向以速度 c 前进。以坐标点 O 到波顶线 AB 的垂直距离为 p 。则得到熟知的二维行进波的表达式如下：

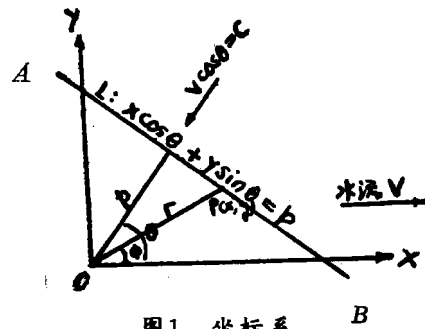
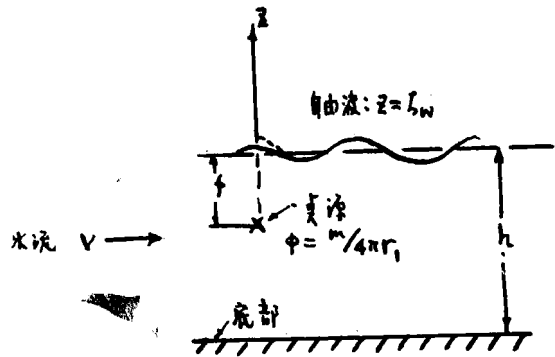


图1 坐标系

$$\xi = A \cos(kp - \omega t) \quad (1.2)$$

式中: ξ : 波高 A : 波幅

t : 传播时间

k : 波数, $k = g/c^2$ g : 重力加速度

ω : 波的元频率, $\omega = c \cdot k$

要使波形相对扰动点保持恒定,则必须存在关系式: $c = V \cdot \cos \theta$ 及 $x' \cos \theta + y \sin \theta = p$ 代入 (1.2) 式,则得:

$$\xi = A \cdot \cos \left\{ \frac{g}{V^2 \cos^2 \theta} (x' \cos \theta + y \sin \theta - V \cdot t \cos \theta) \right\} \quad (1.3)$$

这种波系存在于扰动点的四周,对上述波系叠加 V 的流速 ($x' = x + V \cdot t$),则由扰动点所产生的波系及坐标系都是固定的。来流从左到右,得出 Havelock 的基元波表达式如下:

$$\xi = A \cos \{ K_0 \cdot \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta) \}$$

式中: $K_0 = g/V^2$

整个波系包括在 x 两侧 $\pi/2$ 范围内的正弦及余弦两波系之所有基元波。可得自由波系的表达式如下:

$$\begin{aligned} \xi_w(x, y) = & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(\theta) \sin [K_0 \cdot \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)] d\theta \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C(\theta) \cos [K_0 \cdot \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)] d\theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

上式要在 x 足够大时才能成立,理由如前述。式中 $S(\theta)$, $C(\theta)$ 可称为波幅函数, $\sin(kp)$, $\cos(kp)$, ($k = K_0 \sec^2 \theta$) 可称为相位函数。分别加以讨论。

1.1 相位函数(“Kelvin效应”)

波幅函数 $S(\theta)$, $C(\theta)$ 是与船型相联系的。在与波形相联系时,往往从波幅函数来看,在某一波向角有波高值,而在实际现象中,在某一定点 $P(x, y)$ 并不一定存在这一个波向的波高,这是因为船波基元波相位之间存在一定关系,因此不仅可能而且通常有波分异相互抵消的现象。这就是一般所说的“Kelvin效应”。海洋风波就不具有这种效应,它是统计性的,其基元波相位是随机的。研究“Kelvin”效应,就需要讨论相位函数 $\sin(kp)$, $\cos(kp)$ 。剖析其一项,即可得出类似结果。已知 $\sin(kp) = \sin[K_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)]$

$$\text{令 } x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

式中 r , ϕ 统见图 1。

$$\text{则} \quad \sin(kp) = \sin[K_0 r \sec^2 \theta \cdot \cos(\phi - \theta)] \quad (1.5)$$

现在令

$$\begin{aligned} P(\phi, \theta) &= \sec^2 \theta \cos(\phi - \theta) \\ P'(\phi, \theta) &= \sec^2 \theta \cos(\phi - \theta) [2 \tan \theta + \tan(\phi - \theta)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中 $P'(\phi, \theta)$ 是 $P(\phi, \theta)$ 相对 θ 的导数,其他高次导数如 $P''(\phi, \theta)$ 等皆可求出。

由自由波系成立的条件, x 要足够大。也即是 $K_0 r$ 是很大的。一般假定 $k_0 r \geq 8$ 。如果 $K_0 r P'(\phi, \theta)$ 的数值很大,则 (1.4) 式前一分项中的正弦相位函数在相对 θ 的积分过程中在 0 轴上下波动甚速,见图 2。假定同式中波幅函数 $S(\theta)$ 的变化较为缓慢,则其作用在积分中如果不是全下也将是大下分相互抵消,在 $P(x, y)$ 点就会出现如前述其某些波向的波高消失的现象。与上述相反,如果于某个 θ_0 角, $K_0 r P'(\phi, \theta_0)$ 值极小甚至为零,也即是正弦曲线在这个小区间较为稳定; (1.4) 式的积分结果不会正负相消,而能得出一定值;也就是在点 $P(x, y)$ 呈现波向角 θ_0 的波高值。这个能得出稳定值的 θ 角,一般都接近方程式 $P'(\phi, \theta) = 0$ 的根,这就是波形渐近分析的稳定相位法的基本原理。

$$P'(\phi, \theta) = 0 \text{ 也即是 } 2 \tan \theta + \tan(\phi - \theta) = 0$$

$$\text{已开得 } 2 \tan^2 \theta - \cot \phi \tan \theta + 1 = 0$$

$$\text{其两根为 } \left. \begin{aligned} \tan \theta_1 \\ \tan \theta_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} \left[\cos \phi \pm (\cos^2 \phi - 8)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.7)$$

上式仅当 $\cos \phi > 2\sqrt{2}$ 时存在两个实根。即是 $-19^\circ 29' \leq \phi \leq 19^\circ 28'$ 。说明正规波系都容纳在原点交叉的两直线之间,每一根直线都与运动方向线成 $19^\circ 28'$ 的交角。

如果 $\cot \phi = \pm 2\sqrt{2}$ 则 $\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = \pm \sqrt{2}/2$, 即是 $\theta_1, \theta_2 = \pm 35^\circ 16'$ 。说明在沿与运动方向成 $\pm 19^\circ 28'$ 的交叉线上,两个主要波向

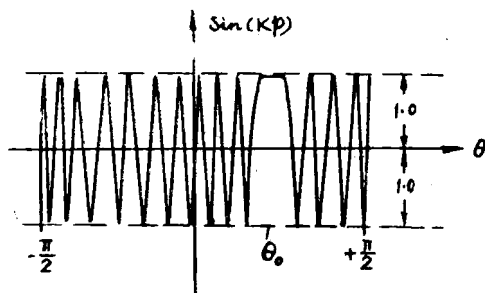


图2 $\sin(kp)$ 函数

回到图 1, 二维波峰线 AB 的方程式为

如果 $p = n\lambda = \frac{2n\pi}{k} = \frac{2n\pi}{K_0} \cos^2 \theta$

$$x = \frac{2n\pi}{K_0} \cos\theta (\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) = \frac{2n\pi}{K_0} \cos\theta (2 - \cos^2\theta)$$

按照上式就可以作出 *Kelvin* 波型图，将上式代入 (1.7) 式，也将是能满足的。

由图可以看出 *Kelvin* 波型在大体轮廓上与船波型相似,但在实际上差距是相当大的。要求出比较切合实际船波的波型,可进一步利用稳定相积分法近似求解(1.4)式。

$$I = \int_a^b \varphi(\theta) \exp[iK_r f(\theta)] d\theta$$

令 $\theta = \theta_0 + \beta$, θ_0 是在积分范围内使 $f'(\theta) = 0$ 的一个根。即是在 θ_0 处相位比较稳定。则函数 $f(\theta)$ 可按微角 β 展开如下式:

(已指出 $\theta = \theta_0 + \beta$ 时, $f'(\theta) = 0$)

近似取前两项可得

$$I = \varphi(\theta_0) \exp[iK_0 r f(\theta_0)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{i}{2} K_0 r \beta^2 f''(\theta_0)\right] d\beta$$

因为指数函数为高频变化，所以积分限可以近似扩户到 $\pm \infty$ 。由已知积分关系式，

$$\int_0^{\infty} \cos \xi^2 d\xi = \int_0^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i m^2 \xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \exp(\pm \frac{i}{4} \pi)$$

可得：

$$I = \frac{\varphi(\theta_0) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2} K_0 r f''(\theta_0)}} \exp\left\{i \left[K_0 r f(\theta_0) \pm \frac{\pi}{4}\right]\right\} \quad (1.9)$$

式中负号相应于 $f''(\theta_0)$ 为负数。

如果 $f'(\theta) = 0$ 的两个根不是很接近的，则将两个根 θ_1, θ_2 分别代入上式，所得结果相加。如果两根很接近，则 $f'''(\theta_0)$ 与 $f''(\theta_0)$ 相比较并不小，积分就应当包括这一项以提高计标精度，以下只给出结果，不加详述。若两根相重合，则 $f''(\theta) = 0$ ，上述展开式如下：

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \frac{1}{6} \beta^3 f'''(\theta_0) + \dots$$

积分式成为

$$\begin{aligned} I &= \varphi(\theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left\{ K_0 r \left[f(\theta_0) + \frac{1}{6} \beta^3 f'''(\theta_0) \right] \right\} d\beta \\ &= 2\varphi(\theta_0) \sin[K_0 r f(\theta_0)] \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{1}{6} \beta^3 K_0 r f'''(\theta_0) \right] d\beta \end{aligned}$$

由已知积分关系式

$$\int_0^{\infty} x^{-n} \cos bx dx = \frac{\pi}{2b^{1-n} \Gamma(n) \cos \frac{n\pi}{2}} \quad (b > 0, 0 < n < 1)$$

可得：

$$I = \frac{2\pi}{3\Gamma(2/3)} \varphi(\theta_0) \left[\frac{6}{K_0 r f'''(\theta_0)} \right]^{\frac{1}{3}} \sin[K_0 r f(\theta_0)] \quad (1.10)$$

式中 $\Gamma(n)$ 为Gamma函数。在尖点线外直到超过 21° 也可按上式计标。

由上述方法可得出下列四种情况下的波型。

$$\xi(x, y) = \xi(r, \phi) = \xi_1(r, \phi) + \xi_2(r, \phi)$$

$\xi_1(r, \phi)$ 代表横波系， $\xi_2(r, \phi)$ 代表散波系

(a) 在兴点线以内 $\phi < 18^\circ 30'$ 可由(1.9)式得出

$$\begin{aligned} \xi_1(r, \phi) &\sim \left(\frac{2\pi}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{2}} K_1 A(\theta_1) \sin \left[P_1 K_0 r + \gamma(\theta_1) + \frac{\pi}{4} \right] \\ \xi_2(r, \phi) &\sim \left(\frac{2\pi}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{2}} K_2 A(\theta_2) \sin \left[P_2 K_0 r + \gamma(\theta_2) - \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中: $P_a = \sec^2 \theta \cos(\phi + \theta)$ 如前述

$A(\theta) = \sqrt{S(\theta)^2 + C(\theta)^2}$ 即波幅函数

$$K_a = 1/\sqrt{f''(\theta)} = \left(\frac{1}{1 - 9\sin^2 \phi} \right)^{\frac{1}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} \theta$$

$$\gamma(\theta) = \tan^{-1} C(\theta)/S(\theta) \quad a=1, 2$$

$\theta_1, \theta_2, P_1, P_2, K_1, K_2$ 根据已知 ϕ 角由图 4 至图 6 可以确定。

(b) 在尖点线以内 $18^\circ 30' < \phi < 19^\circ 28'$ 两根很接近, 积分中包括 $f'''(\theta_0)$ 项。可得:

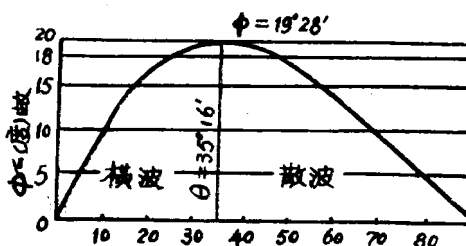


图 4 $\theta_{1,2} - \phi$

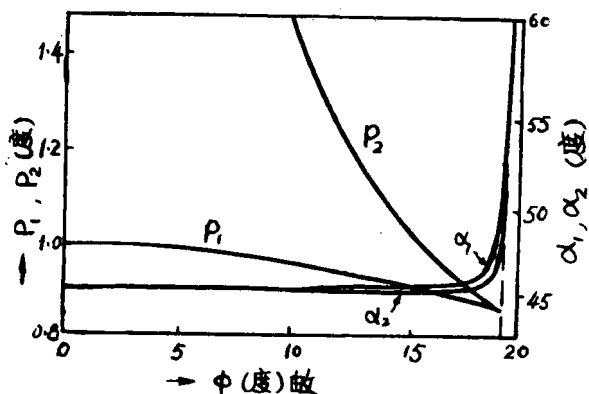


图 5 $P_{1,2} - \phi \quad \alpha_{1,2} - \phi$

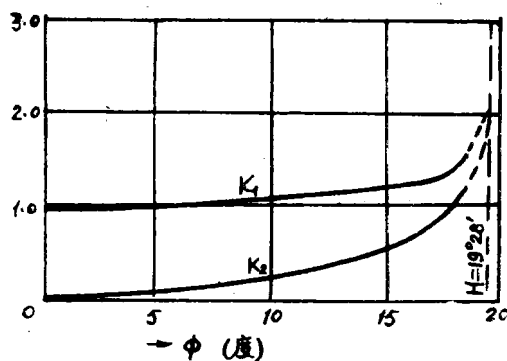


图 6 $K_{1,2} - \phi$

$$\xi_1 \sim \left(\frac{2}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{3}} H_1 A(\theta_1) I_1(\sigma_1) \sin [P_1 K_0 \gamma + \gamma(\theta_1) + \alpha_1]$$

$$\xi_2 \sim \left(\frac{2}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{3}} H_2 A(\theta_2) I_2(\sigma_2) \sin [P_2 K_0 \gamma + \gamma(\theta_2) - \alpha_2] \quad (1.12)$$

式中: $H_a = \left[\sec^2 \theta_a \sin(\theta_a + \phi) \right]^{-\frac{1}{3}}$

$$I_a = \left[I_{a,r}(\sigma_a) + I_{a,i}(\sigma_a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_a = \tan^{-1} \left(\frac{I_{a,i}(\sigma_a)}{I_{a,r}(\sigma_a)} \right)$$

$$\sigma_a = \left(\frac{K_0 r}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\cos(\theta + \phi) + 2 \tan \theta \cdot \sec \theta \cdot \sin \phi}{\left[\cos \theta \sin(\theta + \phi) \right]^{\frac{2}{3}}}$$

$a=1, 2.$

$I_{a,}, I_{a,i} (a=1,2)$ 由下式决定

$$I_1(\sigma) = I_{1,r}(\sigma) + iI_{1,i}(\sigma) = \int_{-\infty}^{-i\infty} e^{i(\sigma w^2 + w^3)} dw$$

$$I_2(\sigma) = I_{2,r}(\sigma) + iI_{2,i}(\sigma) = \int_{-i\infty}^{\infty} e^{i(\sigma w^2 + w^3)} dw$$

式中 $I_{a,r}$ 和 $I_{a,i}$ 是 $I_a(\sigma)$ 的实部和虚部。(1.12) 式中的 α 相应于 (1.11) 式中的 $\pm\pi/4$, 其数值见图 5。

(c) 处于尖点线上。 $\phi = 19^\circ 28'$ 两根两重合的情况 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0 = 35^\circ 16'$

$$\xi_0(\phi = 19^\circ 18') \sim \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{3}} H_0 A(\theta_0) \sin[P_0 K_0 r + \gamma(\theta_0)] \quad (1.13)$$

式中: $P_0 = P(\theta_0) = 0.866$ $H_0 = H_A(\phi = 19^\circ 28', \theta = \theta_0) = 1.347$

(d) 尖点线以外 $\phi > 19^\circ 28'$ 直到超过 21° 。

$$\xi(r, \phi \geq 19^\circ 28') \sim \left(\frac{2}{K_0 r} \right)^{\frac{1}{3}} H_3 A(\theta_3) K(\tau) \sin[P_3 K_0 r + \gamma(\theta_3)] \quad (1.14)$$

式中: $\tau = 2^{\frac{1}{3}} (K_0 r)^{\frac{2}{3}} H_3 [\sin(\phi + \theta_3) + 2 \tan^2 \theta_3 \sin \phi]$

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau w + w^2)} dw$$

由以上计标方法所得出的波型就是 *Hogner* 波型。其横波系与散波系在 $\phi = 0^\circ \sim 18^\circ 30'$ 内, 相位差 $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$ 或 $1/4$ 波长。在 $\phi = 18^\circ 30' \sim 19^\circ 28'$ 内, 相位差达到 $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3}$ 或 $1/3$ 波长。而 *Kelvin* 波型横波系与散波系是等相位的。从计标式还可以看出, 在 $18^\circ 30'$ 以内的两个波系与 $1/(K_0 r)^{\frac{1}{2}}$ 成比例。这表示尖点线以外的波首先消失, 其次是尖点线夹角内的波系, 而尖点波系传轨最远。这些与实际自然现象很相吻合。

日本高市哲夫将简单数学船型的实测波形的峰谷线仿照 *Hogner* 波型描绘。这种波形与 *Hogner* 波型的比较见图 7。在这个图中使实测波形与 *Hogner* 波型横波相一致, 则波型起点不在艏垂线上而在艏垂线前 $4\% L$ 的 C 点处。由图 7 看, 理论波形的相位滞后, 实测波形的波区域扩大, 对应的 ϕ 角也扩大。相位滞后的主要原因可能是由于在波形计标上没有对船体表面的边界条件

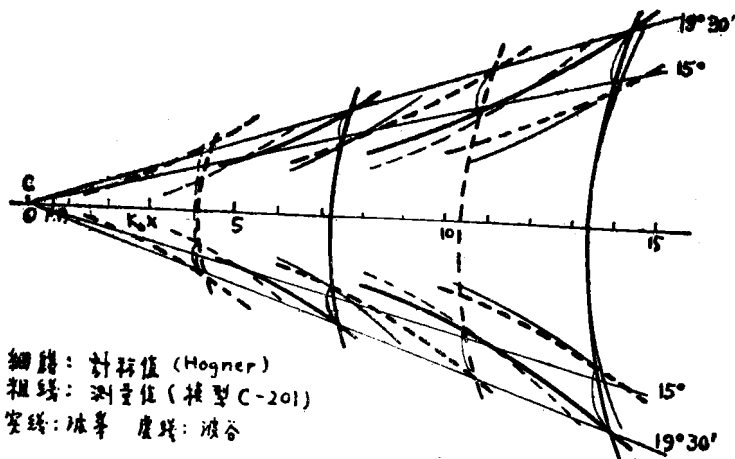


图7 实测波与Hogner波型的比较

和船体的运动进行修正。关于波形扩大的原因可能是：船体与单纯扰动点有所不同，由于船体本身具有容积，妨碍自己兴波的传播，所谓一种“屏蔽现象”可能发生。关于这个问题的理论最近已取得进展，但离最终解决尚有较大距离。上列波型近似计算各式中的 $A(\theta)$ 即波幅函数的决定及其特性在下节说明。

1.2 波幅函数

兴波阻力是由波幅数 $S(\theta)$ ， $C(\theta)$ 决定的，根据 *Havelock* 公式：

$$R_w = \pi \rho V^2 \int_0^{\pi/2} [S(\theta)^2 + C(\theta)^2] \cos^3 \theta d\theta \quad (1.15)$$

式中： ρ ：水密度 V ：航速

前节已说过，波幅函数是与船型相联系的。*Havelock* 以水动力学奇点如沉，汇，偶极子等的叠加来模拟船型。在船体几何外形与相应沉强之间按线性理论有下列关系式：

$$m(x, 0, z) = \frac{V}{2\pi} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (1.16)$$

式中： $y = y(x, z)$ ：船外表势方程式

先从简单的点沉说起，一个在水中以速度 V 行进的点沉，其相应坐标系如前图 1，所生产的波幅函数为：

$$C(\theta) = \frac{4mK \cdot \sec^2 \theta \exp(-k \cdot f \sec^2 \theta)}{V} \quad (1.17)$$

$$S(\theta) = 0$$

这种情况相应的“船体”为 *Rankine* 半体，其最大横截面积 $A = 4\pi m/V$ ，沿轴向无固定长度。波幅函数 $C(\theta)$ 相对各个 $K \cdot f = g \cdot f/V^2$ 值的关系见图 8。从图中可以看出，在 $K \cdot f$ 大于 1.5 时，波幅函数主要集中在横波区域。这相应于两种情况：其一是航速较低时，其二是沉浸深度比较大时。在这两种情况下，兴波阻力主要由横波波幅决定，虽然可能观察到散波很显明。这是因为散波，特别是在大 θ 值的散波，其波长外，其波斜度比横波大，所以容易造成错觉。如果点沉沉浸深度为 f ，任何波其波长小于 $2f$ 的可以忽略不计。由此，对一般船，其吃水 d 与沿 θ 方向的基元波长 $\lambda(\theta)$ 有下列关系式：

$$d/\lambda(\theta) = -\frac{1}{2\pi} K \cdot d \cdot \sec^2 \theta.$$

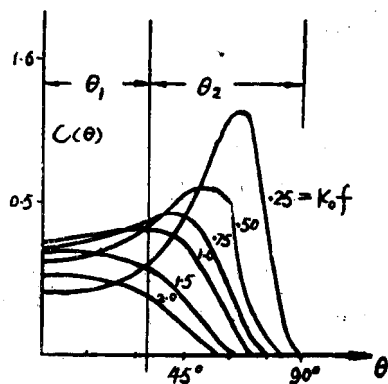


图8 在水中行进点沉相对不同 $K \cdot f$ 的波幅函数 $C(\theta)$

因此，当 $K \cdot d \sec^2 \theta$ 超过 π 时，则船底形状对于所有基元波其方向角大于 θ 者作用很小。

在 $K \cdot f$ 小于 1.5 时，也就是高 F_n 数和吃水浅时，兴波阻力由散波波幅决定。在 $K \cdot f$ 等于 1.25 时，横波与散波的作用相等。

上述这种现象是船的波幅函数基本特征之一，可以称为“速度效应”，或者更确切一点可叫做“速度吃水 $F_n = V/\sqrt{gf}$ 效应”。

上述情况还远不能代表真正的船体，船体必须具备一定长度。再举一个具备一定长度的最简单的形体——Rankine“沉汇体”，来说明波幅函数的另一个特征。

假定以等强度 m 的沉和汇分置于 $(l, 0, -f)$ 和 $(-l, 0, -f)$ 两点。可得波幅函数

$$C(\theta) = 0$$

$$S(\theta) = \frac{4K_0 m}{V} \delta(w_1, w_2) \sin(K_0 l \sec \theta) \sec^3 \theta e^{-K_0 f \sec^2 \theta} \quad (1.18)$$

式中 l 为沉汇间距离长度之半； $\delta(w_1, w_2)$ 等于2，如果所讨论的点的位置同时处于首尾两个波系之中。这种情况下的波幅函数图形为以上述沉的波幅函数 $(\times 2)$ 为包络线，但是具有许多零点处于 θ_n 而由下式所决定：

$$K_0 l \sec \theta_n = n\pi$$

n 为整数 $(n=1, 2, 3, \dots)$ ，因此在理论上有无数个零点。一个典型的于 $K_0 f = 0.5$ 和 $K_0 l = 10$ （即 $l/f = 20$ ）的波幅函数图形见图9。

这个图示相应于 $F_n = V/\sqrt{gf} = 0.224 (L = 2l)$ 。从这个图形看，仅11个零点具有实际意义。于低 F_n 就有更多的具有实际意义的零点。例如于 $K_0 l = 30$ 时就将近有15个具有实际意义的零点。

以上就是波幅函数的第二个特征“长度效应”。对于实际船来说，由于船型的复杂和水具有粘性，其波幅函数在实际上不会有零点，但是具有同样频率的波动起伏，因此在计标上分格必须细密一些。这种波动起伏也就必然反映在兴波阻力上，这也正是产生兴波阻力中所熟知的“峰”和“谷”的原因。

对一般船舶的波幅函数可写如下式：

$$C(\theta) + iS(\theta) = \frac{4K_0}{V} \sec^3 \theta H(K_0 \sec^2 \theta, \theta) \quad (1.20)$$

式中：

$$H(k, \theta) = \int_D m(x', y', z') \exp\{kz' + ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)\} dD$$

x', y', z' 为沉点分布在 x, y, z 轴上的坐标。

D 为分布面。 $H(k, \theta)$ 通称为Kochin函数。

以下说明求取波幅函数的渐近分析法。

采用如图1中的坐标系，以在垂直纵中平面 $y=0$ 上矩形区域 $x=0 \sim L, -d \leq z \leq 0$ 内连续分布沉代表船型。 L = 船长。 d = 两端的吃水。沉分布函数及其各级导数在全长内连续。 x, y, z 值以 $L/2$ 规格化。即 $\bar{x} = \frac{2x}{L}, \bar{x}' = \frac{2x'}{L}, \bar{z}' = \frac{2z'}{L}, \bar{z}' = -t \sim 0 (t \leq 2d/L)$ 。沿 x 轴的自由波系如下式：

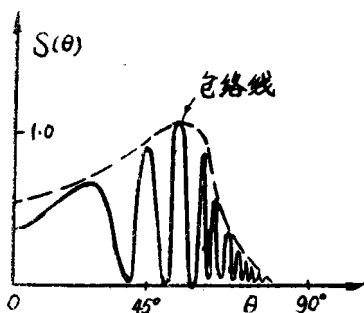


图9 Rankine沉汇体长度 $= 2l$ 的波幅函数

$$\zeta_w(x, 0, 0) = \frac{K_0 L^2}{V} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \int_0^1 \int_0^2 \overline{m}(\overline{x'}, \overline{z'}) e^{-K_0 \frac{L}{2} \overline{z'} \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ \times \cos[K_0 L/2(\overline{x} - \overline{x'}) \sec \theta] d\overline{x'} d\overline{z'} d\theta \quad (1.21)$$

将这个波系分解为艏，艉波系，可先将上式相对 $\overline{x'}$ 进行分下积分（以下省掉无因次数上一横）。

$$\int_0^2 \overline{m}(x') \cos[K_0 L/2(x - x') \sec \theta] dx' \\ = -\frac{1}{K_0 L/2 \sec \theta} \left[\overline{m}(x') \sin \left\{ K_0 L/2(x - x') \sec \theta \right\} \right]_0^2 \\ + \frac{1}{K_0 L/2 \sec \theta} \int_0^2 \overline{m}'(x') \sin[K_0 L/2(x - x') \sec \theta] dx'$$

连续分下积分，整理其结果，令 $m_F = m(0)$ ， $m_A = m(2)$ 分别代表艏，艉端沉强。 $m'_F = m'(0)$ ， $m''_F = m''(0)$ ……代表其各级导数。得出艏波系各项：

$$\left\{ \frac{m_F}{K_0 L/2 \sec \theta} - \frac{m''_F}{(K_0 L/2 \sec \theta)^3} + \frac{m^{IV}_F}{(K_0 L/2 \sec \theta)^5} \dots \right\} \sin[K_0 L/2 x \sec \theta] \\ - \left\{ \frac{m'_F}{(K_0 L/2 \sec \theta)^2} - \frac{m'''_F}{(K_0 L/2 \sec \theta)^4} + \frac{m^V_F}{(K_0 L/2 \sec \theta)^6} \dots \right\} \cos[K_0 L/2 x \sec \theta] \quad (1.22)$$

表明艏波系也包括有正弦及余弦波。在低 F_n 数的情况下由于 $K_0 L = 1/F_n^2$ 比较大，所以正弦波占主要成分，余弦波可以忽略。在高速情况下，余弦波就不可忽视。余弦波分量将使艏波系的波峰位置向前或向后移动，就看 $m'_F < 0$ （凸水线）或 $m'_F > 0$ （凹水线）而定。

在一般速度范围内（ $F \leq 0.35$ ），正弦波是主要的。从波形分析试验中也证实了这一点，只是实际波形比理论波形依船型的不同其相位向前移动3—6% L 如前节所述。

利用这一渐近分析法，求得在给定速度下，艏波系起作用的主要成分的波幅就可以决定消波球鼻的尺度了。

举一个简单的例子，假定(1.21)式中的沉汇分布关系式为 $\overline{m}(\overline{x'}, \overline{z'}) = m_1(\overline{x'}) \cdot m_2(\overline{z'})$ 。

$$m_1(\overline{x'}) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} 1 - \overline{x'}\right)$$

即水线面成余弦曲线，因此称之为余弦船型。

$$m_2(\overline{z'}) = \overline{z'} = -t \sim 0 \quad (t = 2d/L)$$

即横剖面为直壁式U形，由(1.21)式及(1.22)式可得余弦船型艏波的主要成分为：

$$\zeta_{wF}(x, 0) = \frac{a \cdot K_0 L^2}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{U(K_0 d, \theta) \sec^2 \theta}{(K_0 L \sec \theta)^2 - \pi^2} \sin\left[K_0 \frac{L}{2} x \sec \theta\right] d\theta$$

式中： $U(K_0 d, \theta) = 1 - \exp(-K_0 d \sec^2 \theta)$

其波幅函数为 $A_F(\theta) = \frac{a}{\pi} \frac{K_0 L^2 U(K_0 d, \theta) \sec^2 \theta}{(K_0 L \sec \theta)^2 - \pi^2}$

又因船体横波，可以不用偶极子的行进波系，因为这种波系为负的正弦波，恰好可与艏波相消。取偶极子矩为 M （其轴向与前进方向一致），位置在艏垂线处。沉浸深度为 $-f$ ，则其在 x 轴上的自由波系为

$$\zeta_D(x, 0) = -\frac{4MK_0^2}{V} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta \exp(-K_0 f \sec^2 \theta) \sin[K_0 L / 2x \sec \theta] d\theta \quad (1.24)$$

其波幅函数为

$$D(\theta) = \frac{4MK_0^2}{V} \sec^4 \theta e^{-K_0 f \sec^2 \theta} \quad (1.25)$$

在水中行进的偶极子模拟元球体。偶极子矩与元球体半径存在下列关系式：

$$M = \frac{1}{2} r^3 \cdot V$$

式中 r 为元球体半径，要使艏正弦波与元球体负正弦波达到完全相消，必须使两者的波幅函数相等。内中于低 θ 角时的值最为主要。因此令 $A(\theta) = D(\theta)$ 。即得：

$$\left(\frac{r}{L}\right)^3 = \frac{a}{2\pi} F_n^4 e^{f/L F_n^2} \frac{(1 - e^{-d/L F_n^2})}{1 - \pi^2 F_n^4} \quad (1.27)$$

式中： a 按 (1.16) 式取无因次式 $\overline{m} = \frac{4\pi m}{V}$

$$\overline{m}(\theta, \overline{z'}) = a = 2 \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)_{x'=0} \quad (1.28)$$

即沉强度等于水线进水角。由 (1.27)，(1.28) 式可以看出，元球半径与载重水线进水角以及航速之间存在明确的关系式。例如，若取 $a=0.4$ ， $t=0.1$ ， $f/d=0.8$ ，在 $F_n=0.258$ 时则有 $r/L=2.7\%$ 。当然以上关系特别是元球与船体的相对位置还有待以试验方法加以修正。

以上概略说明了比较早期提出的波形渐近分析法及其应用。有助于深入了解船波的基本概念。但只是针对简单船型，计标结果也只是极近似的。日本在五十年代末采用立体测量技术进行试验比较。但这种测量方法是比较耗费复杂的。比较早期提出的还有一种船侧波形分析方法，但也难以测量准确。而且船测波形主要反映了自由波系中横波成分，同时局下扰动波起着重大作用。而对局下扰动波的计标比自由波系更复杂。真正能投入实用的波形分析法在下节中说明：

2. 波形分析法，计算与试验技术 [4][5][6][7]

在六十年代所出现的多种不同的波形测量及相应分析方法，主要有：

(1) 横切法。即沿垂直于船的运动方向，在船后一定距离测量两边或多边波形。这种方法的主要缺点是测量技术比较复杂，要用立体测量技术，或者在拖车后装置移动架，使浪高仪能沿水池横向移动；或设置多台固定浪高仪，在船模运动稳定的一般时间内测量两边（不少于两边）或多边波形。当然，在这种测量方法中，还容易受到伴流的干扰。这种方法的主要优点是对于有限池宽在数值计标中容易处理。

(2) 斜切法 即测量分析艏波尖点线至艉波尖点线间棱形区域间的波形。这种方法的优点是可以单独分析艏波系。而艏波系受到粘性影响极小, 便于研究兴波机理。缺点是测量技术也比较复杂, 要用航空测量, 或多点设置浪高仪测量。同时必须分析局下波的形响。

(3) 纵切法 即平行于船体运动方向, 沿纵向测量分析一边或多边波形。测量装置如示意图10。这种方法的优点很明显, 是所有方法中测量装置最简单的一种。因此也是采用最广, 最有发展前途的一种。缺点是浪高仪如果装置与船体过近, 则受到局下波的影响, 离船远一些, 则由于池宽有限, 如果在分析计标中不计入池壁反射波, 则测量所能截取的长度有限, 影响计标精确度。如果按 Landweber 等人所提出的方法计入池壁反射波, 则计标又极为复杂。本文主要概略介绍纵切法的分析计标并不计入池壁反射波。

(4) X Y 法 这是由 Ward (1964) 所提出的一种方法。采用和讨论这一种方法的比较少, 这种方法的特点是在如纵切法装浪高仪位置处, 装一垂直长元柱。元柱内装有传感器, 测量作用于元柱上横向力的 x , y 两水平方向分量。这两个作用力与波高成比例, 对 x , y 乘积的积分就代表通过 BC 线的能通量。这种方法的主要优点是数值计标工作最为简单, 兴波阻力计算公式如下: $R_w = \frac{\rho}{2} \cdot \xi_0^2 + \int_{BC} x \cdot y dx$ 式中 y 为纵切线 BC 与船中心线的横向距离。 ξ_0 为 AB 附近平直波的平均波幅。因此, 如果将测得的 XY 讯号直接接一模拟电路, 则在测试后可即时读出阻力值。这种方法缺点是在元柱上的作用力 X , Y 难以准确定标, 而且要与浪高仪配合使用。

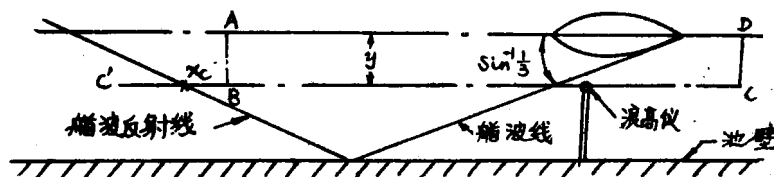


图10 纵切法测另示意图

(5) 矩阵法 沿水池向一侧按一定距离设置多点测量, 测量点位置按矩阵排列。由波高测量值采用最小二乘法计标波幅谱。测量与计标都比较复杂。其主要优点是测量计标的精确度随速度的提高而增高, 而其他方法则相反。英国试验水池较多地采用这种方法。

在上述横切法和纵切法中有测量波高 ξ 的, 也有测量波斜率的, 沿 x 轴的斜率 ξ_x , 和沿 y 轴的斜率 ξ_y 等三种不同测量分析方法。也有兼而用之的。对纵切法说, 前已说过, 如果不计入池壁反射波, 则测量所能截取的长度有限, 因此需要作截断误差修正, 相对同等的截取长度, 对波斜率 (ξ_x , ξ_y) 的测量分析中, 其截断误差在量级上比对波高 (ξ) 测量分析中要小一些, 其中以对 ξ_y 的情况为最小。因为 ξ_y 的衰减最快。但是对波斜率的测量精度一般比波高测量精度差。所以仍以采用波高测量进行分析计标的多一些。

根据西德和美国联合进行对 4 米数学船模 Inuid S-201 的试验结果来看, 由纵切法与横切法波高测量分析计标所得到的兴波阻力系数之比, 相对 4 种不同的速度, 分别为 1.02, 0.99, 1.02, 0.93。后一种相对航速较高 ($F_n = 0.319$) 由 x , y 法取得结果也基本上与两法所得结果

吻合。由上两法所得出的波幅谱在幅度上和总趋向上基本吻合。在相位上则有所错动，特别是在高波数。以上几种方法作为试验手段，在功用上基本上是相同的。

Sharma对点偶积子就三种测量分析情况，一是纵切波高测量加以截断误差修正；二是纵切波斜率测量不加修正；三是纵切波高测量不加修正，所得出的阻力系数值与理论精确值比较，以第1种方式为最优；第2种方式于截止长度较小时误差较大；而第3种方式为最差。

以下讨论主要针对纵切法，波高测量，不计入池壁反射波，加以截断误差修正。

2.1 由波形分析计算波幅谱及兴波阻力

为了了解由波形分析能够计算波幅谱及兴波阻力的基本原理。有必要概略介绍在水面下某有限区域 D 内的任意沉分布（离散的或连续的）在无限水域中运动所产生的流态。采用右手直角坐标系 oxy 与船体以速度 V 沿 ox 轴的负方向恒定运动。令 o 固定在船与自由面的交点处， oxy 为自由面。 oz 向上为正即反重力加速度 g 的方向。这种流态可以速度势表达。

$$\phi(x, y, z) = - \int_D \sigma(x', y', z') G(x, y, z; x', y', z') dD \quad (2.1)$$

式中 $\sigma(x', y', z')$ 为于点 (x', y', z') 处的局下沉密度；而格林函数 $G(x, y, z; x', y', z')$ 为处于点 (x', y', z') 处的单位强度（即是流出量为 4π ）的点沉于点 (x, y, z) 处所产生的速度势。

前节所述与 ox 轴线成 θ 角方向运动的二维基元波的波高 ξ 与其速度势 ϕ_1 之间的关系，在水面 $z=0$ 上，由自由面动力学条件 $V \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, 0) + g\xi = 0$ （取线性式）所决定。由此可得其速度势为

$$\phi_1' = \text{Re}(Ae^{kz + ikp})$$

式中 A , p 如前节所述， k 为与 x 轴成 θ 角的平面波的元波数。 Re 为取实数部分。则表达式：

$$\phi_1 = \text{Re} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(k, \theta) e^{kz + ikp} dk$$

代表平面波运动的总速度势。式中 $F(k, \theta)$ 为待定波幅函数。

处于点 (x', y', z') 的单位强度点沉的速度势为 $\phi_2 = \frac{1}{r_1}$ 。式中 $r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2$ 。因为 $\frac{1}{r_1}$ 必须满足连续性方程也即是拉普拉斯方程的解。可以写成如下式：

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k(z+z')} + ik \overline{p} dk$$

式中 $\overline{p} = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta$ 。因此单位强度点沉在有自由面的流体中沿 x 轴负方向运动的总速度势为

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-(kz+z')} + ik \overline{p} dk + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} F(k, \theta) e^{kz + ikp} dk$$

即一点沉与波系速度势的叠加。这一速度势还必须满足自由面动力学和运动学条件：

$$\phi_{xx} + K_0 \phi_z = 0$$

式中 $K_0 = g/V^2$ 。将上述速度势的表达式代入自由面条件式可得：

$$F(k, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{k + K_0 \sec^2 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta} e^{kz'}$$

由此求得格林函数：

$$G(\phi) = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \operatorname{Re} \frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sec^2 \theta \exp\{k(z+z' + i\bar{p})\}}{k - K_0 \sec^2 \theta} dk d\theta \quad (2.2)$$

上式中 $r_2^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ ，变量 k, θ 可以理解为基元平波的元波数和传播方向角。为了以下分析的便利，有必要将格林函数转换为对二个新变数 w, u 的积分。这二个变数分别表示对 x, y 轴分解的元波数。

$$w = k \cos \theta \quad u = k \sin \theta \quad \frac{\partial(w, u)}{\partial(k, \theta)} = k \quad (2.3)$$

则格林函数可改写如下式：

$$G = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + R \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i w(x-x') + i u(y-y') + \sqrt{w^2 + u^2}(z+z')\}}{w^2 - \sqrt{w^2 + u^2}} dw du$$

上式除了改变了变数而外，已改写为无因次形式。即式中的长度单位为实际长度与波数 K_0 的乘积。例如 $x = \underline{K}_0 \underline{x}, \xi = \underline{K}_0 \underline{\xi}, R_w = \underline{R}_w K_0^2 / \rho V^2$ 等。字下附一划者为实际数量，无划的为无因

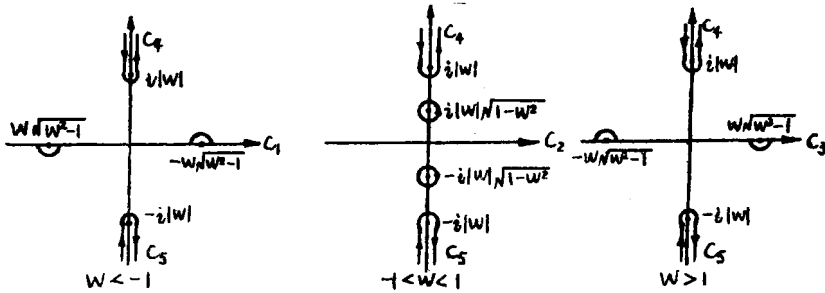


图11 在复 w —平面的围线

次量。为以下将进行的 *Fourier* 变换的要求，对 (2.4) 式以 w 为实数，对 u 积分，以得出以 x 表示的 *Fourier* 积分形式。(2.4) 式中有两个支点，两个极点，视 w 的变化区间的不同，采用适当图线如下图11，其极点位置亦相应有所不同。沿虚轴自支点 $\pm i|w|$ 至 ∞ 有割线以消除被积函数中平方根的多义性。于 $(y-y') > 0$ ，则沿回路 C_4 ，于 $(y-y') < 0$ ，则沿回路 C_5 ，采用函数积分法，首先将 (2—4) 式的分母对 u 微分，将所得值代入极点中即得：

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_w^{\infty} \frac{\exp\{i w(x-x') - u(y-y') + i \sqrt{u^2 - w^2}(z+z')\}}{\sqrt{u^2 - w^2} + i w^2} du \\ & - \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{4w}{\sqrt{1-w^2}} \exp\{i w(x-x') - w \sqrt{1-w^2} |y-y'| + w^2(z+z')\} dw \\ & + I_m \int_1^{\infty} \frac{4w}{\sqrt{w^2-1}} \exp\{i w(x-x') + i w \sqrt{w^2-1} |y-y'| + w^2(z+z')\} dw \quad (2.5) \end{aligned}$$