算學小叢書

平行線論

羅巴曲斯奇著
齊汝璜譯

商務印書館發行

算學小叢書

平行線論

羅巴曲斯奇著

齊汝璜譯

商務印書館發行

平行線論

敘言

幾何學乃建設於若干個不能證明的基礎公理上面之一種演繹的科學.歐幾里德幾何學之一組公理中,有一個公理繁雜冗長,不能一目了然.此公理卽爲"若一直線與二直線相交,而使其一側內角之和,小於二直角,則此二直線於充分延長後,必相交於內角和小於二直角之側."

後世數學者見此公理之不能自明,遂視其爲定理,而以前之定理證明之爲證明此公理,不知絞盡幾許數學者之腦汁,但終歸失敗.迨至 1830 年之頃,俄人羅巴曲斯奇(*Lobachevski*)以爲不能證明此公理,非證法之誤,實爲此公理自身的眞偽問題,遂毅然另設假設,本此假設而由定理之演繹遂成一種在理論上不自相矛盾之幾何學.此種幾何學卽爲非歐幾何學之一派.

羅氏之著作共有八種.本書爲羅氏於1840年用德文發表者,原名爲 *Geometrische untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*.書內所載率爲羅氏各種著作之摘要.本書出後各數學家對之皆有圓滿之批評.

高斯 (*Gauss*) 評之云:"著者以精練之手腕及眞正幾何

學者之精神成就此書.望世人注意之,翻閱一遍,必能使諸君有快感也."

斯路斐斯特(*Sylvester*)評云:"在四元法知代數學已脫離乘法交換定則之約束,此約束之脫離頗似羅氏幾何學之脫離歐氏之公理焉."

磑雷(*Cayley*)評云:"歐氏之第十二公理雖爲蒲雷費爾之形(*Playfair's form*),世人莫不知其仍待證明.但羅氏則絕不用此公理,而另創一種完全一致的理論,即非歐平面幾何學之體係也.又非歐立體幾何學亦有同樣之體係."

觀諸家之批評,可知羅氏著作之價值矣.再者自相對論發明後,非歐幾何學之價值日見增高.蓋相對論之學說非爲歐氏幾何學之所能通.欲讀相對論非先讀非歐幾何不可.故其價值至少與相對論之價值相等也.

是以不自揣陋,費經旬之力譯之以供獻國內學者.但才疏學淺,錯誤之處,在所難免,還望國內諸君子匡正之.

十四年五月保定齊汝璜誌

平行綫論

自歐几里德至現在,幾何學一科除解析方面外,仍然毫無進步余意其原因皆在幾何科學中之缺點.此等缺點余現已尋得.

此等缺點即爲幾何的大小基本概念之暗昧,及表示此等大小之度量方法不明瞭.但最大之缺點則爲平行綫理論中之罅隙.昔代數學家雖曾設法補救之,但皆歸失敗.

平行綫之理論駱容德(*Legendre*)雖亦曾致心研究,但其研究之方法不於嚴格方面注意,而只於旁面着想,且以補助定理強取爲必須定理,故終未得到結果.關於幾何學原理,余之第一次論文在1829年發表於加散公報(*Kasan Messenger*).後爲滿足需要,更就此科之全部余編一書,名爲幾何學新原理及平行綫論(*New Elements of Geometry, with a Complete Theory of Parallels*),並於1836, 1837, 1838三年份載於加散大學科學叢刊中(*Gelehrten Schriften der Universitaet Kasan*).此書之範圍,對於國人研究此問題,或有障礙,該問題自駱容德以來已失卻其興趣矣.但余意平行綫之理論仍值幾何學者之注意,故將研究所得之結果發表於本書.又余之意見與駱容德相反,余以爲其他之缺點(如直綫之

定義)與平行線之理論完全無有關係.

爲省卻冗繁計,僅將本書應用之重要定理述之於下,至於其證法顯易者則不纔述焉.

1. 直線在其各位置與其自身適合,卽含此直線之面旋轉時,若此直線經過該面上之二定點,則直線之位置不改變:(卽包含該直線之面若繞此直線上二點旋轉時,此直線不動).

2. 二直線不能相交於二點.

3. 若於直線之兩方充分延長之,則此直線必經過諸圍界,而分圍界爲二部分.

4. 若二直線皆垂直於第三直線,則二直線無論如何延長,終不能相交.

5. 若一直線自另一直線之一旁穿向彼旁時,則二直線必相交:(卽一直線之兩旁若皆有另一直線之點,則二直線必相交).

6. 設有二角,若一角之兩邊爲彼角之兩邊之引長線則此二角相等.本定理對於平面直線角及平面角(卽二面角)皆眞確. ([illegible])

7. 若一直線交於其他兩直線成等角,則此二直線不能相交.

8. 在直線三角形內,等邊必對等角,反之亦確.

9. 在直線三角形內,大邊必對大角.又在直角三角形

內,弦邊比其餘之每邊皆大,且弦邊之二鄰角皆爲銳角.

10. 設兩直線三角形有一邊及二角相等,或二邊及夾角相等,或二邊及大邊之對角相等,或三邊相等,則兩三角形互相合同(*Congruent*).

11. 若一直線與其不在同一平面之二直線成直角,則必垂直經過此二直線之交點,且在此二直線之平面內各直線.

12. 球及平面之交點爲圓.

13. 設一直線與互相垂直二平面之交線直交,且在二平面之一內,則此線必垂直於其餘一平面.

14. 在弧三角形內,等邊必對等角,反之亦確.

15. 設二弧三角形有二邊及夾角相等,或一邊及二鄰角相等,則兩三角形互相合同或對稱(*Symmetrical*).

此下爲其他之定理與其說明及證法.

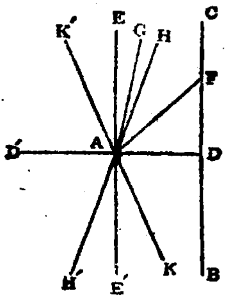
16. 由平面上一點所出發一束直線對於該平面上一已知直線可分爲二種:一種爲交線(*Cutting*),一種爲不交線(*Not-cutting*).

此二種之界線(*Boundary lines*)名爲已知直線之平行線.

由A點(第一圖)作AD垂直於BC,更作AE垂直於AD.

在EAD直角內,由A點出發一束直線或皆與DC相交,如直線AF,或有不與DC相交者,如AE.但不與DC相交之直線不能確定僅爲AE,故可設尙有其他直線於任

何延長時,亦不與DC相交.今設AG即爲不與DC相交之另一直線,則AF諸交線,及AG諸不交線之間,必有界線AH而與DC平行.在此界線之一側AG等各直線皆不與DC相交.但在其他一側之各直線,如AF等,則皆與DC相交.



第一圖

平行線HA及垂線AD之交角HAD名爲平行角(*Parallel angle*或*angle of parallelism*).今以$\Pi(p)$代之.p則爲距離AD.

若$\Pi(p)$爲直角,則垂線AE之引長線AE'即平行於DC之引長線DB.茲因AE,AD二垂線及其引長線AE',AD'於A點成四直角,故過A點之各直線或其引長線必在近於BC之二直角之一角內.是以於此情形時,除平行線EE'外,其餘諸直線於兩方充分延長時必與BC相交.

若$\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$,則於AD之他一側作角$DAK=\Pi(p)$,卽得一直線AK而與DC之延長線DB平行.故在此種假設內,平行線之方向亦有區別.

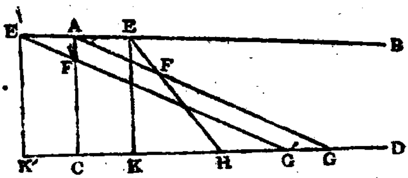
在近於BC之二直角內,其餘之諸直線或其引長線若在二平行線之交角$HAK=2\Pi(p)$內,則皆爲交線,但若在AH及AK二平行線之彼側且在此二平行線及EE'(AD之垂線)之交角$EAH=\frac{1}{2}\pi-\Pi(p)$,$E'AK=\frac{1}{2}\pi-\Pi(p)$內者,則皆爲不交線$AG$類.同理,在垂線$EE'$之彼側,平行線$AH$及$AK$之引長線$AH'$及$AK'$亦平行於$BC$,其餘之諸直線若在$K'AH'$角內則爲交線,但在$K'AE$及$H'AE'$二角內者則爲不交線.

由此觀之,在$\Pi(p)=\frac{1}{2}\pi$假設內,直線僅分爲交線及平行線.但若假設$\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$,則必有兩個平行線,一在此側,一在彼側且在此種假設內除平行線外,其餘之諸直線則分爲交線及不交線.

二種假設對於平行性有一個共公標記,卽當一直線向平行線之一側略偏斜時,則無論其斜角任何小,此直線必變爲交線.例如AH在平行於DC,則不拘HAF角任何小,AF必與DC相交.

17. 直線在其上各點保存其平行性.*

設AB(第二圖)平行於CD,更設AC垂直於CD.



第二圖

今於AB及其在AC彼側之引長線上任取二點.

設E爲垂線一側之一點,於此側AB視爲平行於CD.

由E作EK垂直於CD,並於BEK角內作EF.

以直線連結A及F,則直線AF之引長線必與CD相交於一點G(定理16).由是得三角形ACG,EF則經過此三角形.今由作法知EF不與AC相交,且與AG或EK不能相交二次(定理2),故EF必與CD相交於一點H(定理3).

更設E'爲AB之引長線上一點,並設$E'K'$垂直於CD之引長線.作$E'F'$不論$AE'F'$角如何小,務必使$E'F'$與AC交於一點F'.更由A作AF,而使BAF角等於$AE'F'$角,則AF之引長線必與CD相交於一點G(定理16).

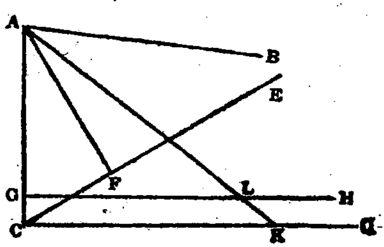
* (譯注)卽一直線若在其上一點與他線平行,則在其上各點仍與他線平行.

由是得三角形AGC，$E'F$之引長線則經過此三角形。茲因$E'F'$不能與AC相交二次，更因BAG角$=BE'G'$角，故亦不能與AG相交（定理7），是以必與CD相交於一點G'。

由是觀之，自E，E'任意二點所作之EF及$E'F'$二線與AB之斜角雖甚小時，亦必與AB之平行線CD相交也。

18. 二線系互相平行*

設AB平行於CD，更設AC垂直於CD。由C作CE線而與CD成任意銳角ECD。更由A作$C'E$之垂線AF。由是得直角三角形ACF。在該三角形內弦邊AC必大於AF（定理9）。



第三圖

作$AG=AF$。移動$EFAB$形至AF合於AG而止，則AB及FE二線之位置必爲AK及GH，且BAK角必等於

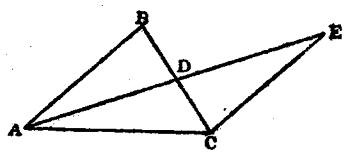
*（譯註）申言之，卽此線若平行於彼線，則彼線亦平行於此線。

FAC角.故AK必與DC相交一點K(定理16).由是得三角形AKC.在此三角形之一邊上,垂線GH與AK相交於L(定理3).故在AB線上AB與CE之交點自A之距離AL卽決定矣.

故不論ECD角任何小,CE必與AB相交,是以CD平行於AB(定理16).

19. 在直線三角形內三角之和不能大於二直角.

於三角形內ABC(第四圖)內設三角之和爲$\pi+a$,則於不等諸邊內選其最小邊BC,而平分之於D.自A點作一直線AD經過D點,並引長之至E點,而使DE等於AD.



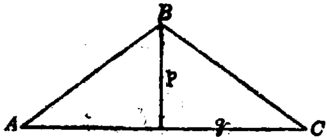
第四圖

以EC線連結EC二點.在ADB及CDE二合同三角形內,卽得ABD角$=DCE$角,BAD角$=DEC$角(定理6及10).故三角形ACE內三角之和亦等於$\pi+a$. 又由三角形ABC作ACE三角形時,ABC三角形之最小角BAC(定理9)分爲EAC及AEC二部分.故若連續應用此法,並連

續平分最小角之對邊,則最末所得三角形之三角和亦爲$\pi+\alpha$.且此三角形內有二角之絕對值可作至各小於$\frac{1}{2}\alpha$.但第三角不能大於π,故α必爲零或爲負.

20. <u>若任意直線三角形內三角之和爲二直角,則凡各三角形內三角之和皆爲二直角.</u>

設ABC三角形(第五圖)內三角之和$=\pi$,則其三角中



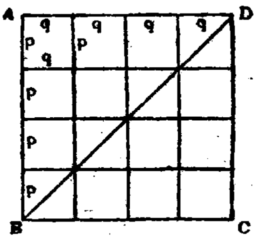
第五圖

最少必有兩個銳角.今設A及C即爲此二銳角.自第三角頂B作直線p與其對邊AC垂直,則垂線p必分所設三角形爲兩個直角三角形.茲因每個直角三角形內三角之和不能大於π,且此二直角三角形內諸角之和不能小於π,故每個直角三角形內三角之和亦爲π.

由是得一直角三角形其互相垂直之二邊則爲p及q.但由此可更作一四邊形,而使其對邊相等,且鄰邊p及q互相垂直(第六圖).

重複作此四邊形,則更得一四邊形而以np及q爲其二

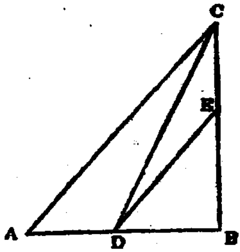
邊,最末,則得一四邊形 $ABCD$,每二鄰邊互相垂直,且 $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, 其 m 及 n 則爲任意



第六圖

整數,此四邊形被其對角線 DB 分爲互相合同之兩個直角三角形 BAD 及 BCD,在每個內其三角之和 $= \pi$.

設直角三角形 ABC (第七圖)之二垂直邊爲 $AB = np$, $BC = mq$. 若使此三角形之直角合於已知之另一個(直角)三角形 BDE 之直角,則因 n 及 m 二數可作至任意大,故能使 BDE 三角形含於 ABC 三角形內.



第七圖

作 DC 線則得三個直角三角形,每相連之二個必有一公邊.

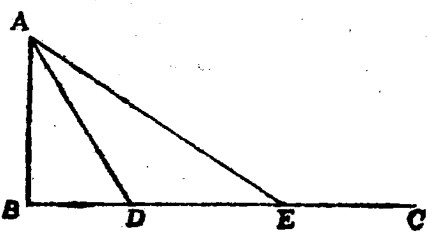
三角形 ABC 爲 ACD 及 DCB 兩三角形連合而成.茲因此兩三角形之每個內三角之和不能大於 π, 且因 ABC 三角形之三角和等於 π, 故於 ACD 及 DCB 兩三角形之每個內其諸角之和必亦等於 π.

同理,三角形 BDC 含有 DEC 及 DBE 兩三角形.故 DBE 內三角之和亦等於 π. 茲因每個三角形皆可分爲兩個直角三角形,故普遍言之此定理對於各三角形皆眞確.

由此可知僅能得二種假設:卽凡直線三角形內三角之和皆等於 π 或皆小於 π.

21. 由一已知點求能作一直線與一已知直線成任意小角.

由已知點 A(第八圖)作 AB 垂線於已知直線 BC. 在 BC 線上任取一點 D. 連結 AD, 更作 $DE=AD$, 連結 AE.

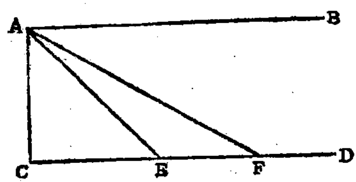


第八圖

在 ABD 直角三角形內,設 ADB 角 $=\alpha$,則於等腰三角形 ADE 內, AED 角卽等於 $\frac{\alpha}{2}$ 或小於 $\frac{\alpha}{2}$(定理8及20).連續應用此法,則最末所得之 AEB 角卽小於所設之任何角.

22. <u>設一直線之二垂線互相平行則直線三角形內三角之和卽等於二直角.</u>

設 AB 及 CD 二直線(第九圖)互相平行且皆垂直於 AC.



第九圖

由 A 至 E,F 二點作 AE 及 AF 二線. E 及 F 爲在 CD 線上所取之二點,又二點自 C 點之距離則設 $FC>EC$.

設 ACE 直角三角形內三角之和爲 $\pi-\alpha$, AEF 三角形內三角之和爲 $\pi-\beta$,則 ACF 三角形內三角之和卽爲 $\pi-\alpha-\beta$,其 α 及 β 則皆不能爲負.

更設 BAF 角 $=a$, AFC 角 $=b$,則 $\alpha+\beta=a-b$.今旋轉 AF 線,而使其離垂線 AC 漸遠,則 AF 及平行線 AB 之交角可作至任意小.同理, b 亦至任意小.故 α 及 β 二角除 $\alpha=0$,

$\beta=0$ 外再無他値.

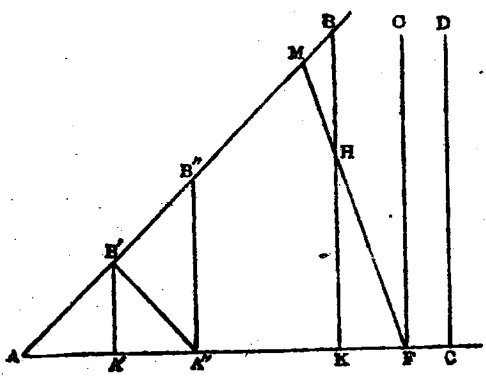
由此可知,凡直線三角形內三角之和或爲 π 或 $<\pi$. 若爲 π, 則同時對於各線 p 其 $\Pi(p)=\frac{1}{2}\pi$. 又若 $<\pi$, 則同時 $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$

第一假設爲通常幾何學及平面三角學之基礎.

第二假設可以同樣應用,且由此種假設所得之結果亦無矛盾不合者.根據此種假設可另創一種新幾何科學,此種新幾何余名之爲虛幻幾何學(*Imaginary Geometry*).玆於以下述明此種幾何內直線三角形及球面三角形之邊及其角相關之方程式.

23. 對於每個已知角 a 卽有一線 p 而使 $\Pi(p)=a$

設 AB 及 AC(第十圖)爲二直線,並於交點 A 成一銳角 a.



第十圖