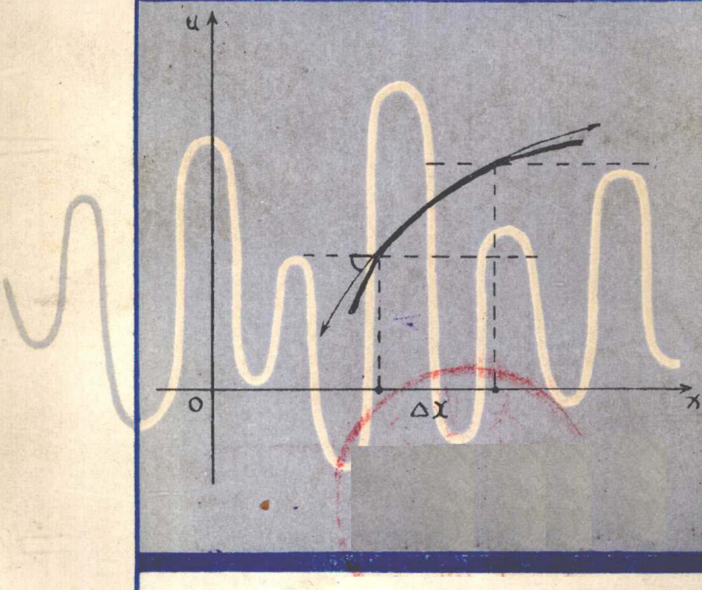
高等学校试用教材

物理学中的常用数学方法

（上册）

王继春　陈修润



武汉工业大学出版社

物理学中的常用数学方法

王继春　陈修润　编著

（上　册）

武汉工业大学出版社

一九九〇年

高等学校试用教材
物理学中的常用数学方法
（上册）
王继春　陈修润　编著
武汉工业大学出版社出版发行
武汉市洪山区珞狮路14号
各地新华书店经销
湖南省华容县印刷厂印刷
1990年7月第一版　开本：787×1092　1/32
1990年7月第一次印刷　印张：11.1875
印数：00001－10000　字数：250千字
ISBN 7—5629—0418—9/O·19　定价：4.50元

前言

该书是在多年来讲授《数学物理方法》和《群论》等课程所用讲义的基础上，积教和学两方面的经验，反复修改整理而成。是适应教学改革需要的物理学中常用数学方法的简明入门书。本书在内容选取和安排上有如下考虑：

一、注意知识更新和方法创新，淘汰了部分派生的或大学阶段少用的内容和方法，而代之于新的内容和方法：新增了近代数学的篇章，为后续课程提供有力工具；用微分形式理论做工具导出曲线坐标系中的∇^2算子；介绍虚宗量δ函数并用于解非齐次波动方程，使计算大为简化；采用夫罗比尼斯级数解法求解常微分方程，和传统级数解法相比，大大简化了计算，又易于掌握等。

二、按学科分支分块安排内容，分层次逐步深入地阐述基本理论和方法。

1、在复变函数中，以解析函数为主线贯穿整个内容，突出解析函数，简明而有深度。

2、在数理方程部分，按单变量常微分方程、特殊函数、多变量偏微分方程及解法、物理应用等顺序安排内容。层次分明，难点分散，重点突出，避免重复。就常微分方程而言，突出了斯-刘型本征值问题，以斯-刘型方程特例的方式引出了物理学中常用的几个典型的二阶变系数常微分方程及其解——特殊函数；就偏微分方程而言，突出了化偏微分方程为常微分方程和对偏微分方程直接积分求解的两大类方法。

3、在近代数学部分，安排了线性算符，矩阵分析，线

性变换、张量分析、群论基础等。这些内容为量子力学、相对论。固体理论、新材料设计等课程所必须。这是多年来，与许多同行酝酿编写数理方法（二）的一种偿试。

三、着眼于培养读者分析问题和解决问题的能力，特别注意了联系物理问题，加强了“有对称性物理问题的解”的讨论，注重综合应用，精选富有代表性和来源于实际的例题，突出如何用定解条件来解出完整的定解问题，许多典型题来源于研究生入学考试试题，注意一题多解、一法多用、一例多举，从多侧面解剖“一个麻雀”，以利读者对问题有完整认识。

四、数学推证较为详细，注意点明技巧，利于初学和自学，注意行文简明，转接自然，阶段小结及提练概括，有些要领还写成了顺口溜，以利教和学。

作者深感限于水平，书中难免有不妥、缺点和错误之处，恳请读者不吝赐正。

作　者

1990年7月

目　录

第一章　解析函数论基础……………………………（1）

§1-1　复变函数……………………………………（1）

§1-2　复变函数的连续，求导和C-R方程…………（5）

§1-3　解析函数，正交、调和与保角变换…………（12）

§1-4　解析函数的积分，柯西定理…………………（21）

§1-5　含有限个孤立奇点的解析函数的积分………（25）

§1-6　色散关系……………………………………（27）

§1-7　柯西公式，解析函数的微分性质……………（29）

第二章　解析函数的级数表示…………………………（36）

§2-1　幂级数及其阿贝尔定理………………………（36）

§2-2　解析函数的泰勒展开…………………………（41）

§2-3　含孤立奇点的解析函数的罗朗展开…………（46）

§2-4　奇点分类……………………………………（58）

§2-5　解析延拓……………………………………（62）

第三章　留数定理及其应用……………………………（65）

§3-1　留数定理……………………………………（65）

§3-2　利用留数定理计算实变函数定积分…………（76）

第四章　二阶线性常微分方程…………………………（86）

§4-1　简单的二阶线性常微分方程的回顾及解法举例……………………………………（86）

§4-2　二阶线性常微分方程的一般认识，级数解……（95）

§4-3　斯特姆-刘维方程的本征值问题………………（99）

第五章　典型二阶线性变系数常微分方程与特殊函数……………………………………（113）

§5-1　厄米特方程及其解（谐振子问题）…………（113）

§ 5 - 2　拉盖尔方程及其解（有心力场问题）………（120）
§ 5 - 3　勒让德方程及其解……………………………（127）
§ 5 - 4　缔合勒让德方程及其解………………………（143）
§ 5 - 5　贝塞尔方程及其解……………………………（151）
§ 5 - 6　贝塞尔方程的本征值问题……………………（168）
第六章　数学物理方程的导出和定解问题…………（175）
§ 6 - 1　双曲方程—振动与波动问题…………………（176）
§ 6 - 2　抛物方程—扩散问题与热传导问题…………（180）
§ 6 - 3　椭圆方程—稳定场问题………………………（181）
§ 6 - 4　定解条件………………………………………（186）
第七章　微分方程的积分解法…………………………（189）
§ 7 - 1　一维齐次波动方程的积分解法………………（189）
§ 7 - 2　二阶线性常系数齐次偏微分方程的积分解…（191）
第八章　分离变量法……………………………………（194）
§ 8 - 1　有界弦的自由振动……………………………（194）
§ 8 - 2　有界杆的导热…………………………………（208）
§ 8 - 3　二维拉普拉斯方程与非齐次边界条件………（213）
§ 8 - 4　微分形式，正交曲面坐标系…………………（217）
§ 8 - 5　亥姆霍兹（含拉普拉斯方程）方程的分离变量……………………………………………………（222）
§ 8 - 6　具有对称性的物理问题的解…………………（226）
§ 8 - 7　球函数　球面波的角向分布…………………（242）
§ 8 - 8　球贝塞尔函数　球面波的径向分布…………（247）
第九章　积分变换法……………………………………（253）
§ 9 - 1　付里叶积分变换法……………………………（253）
§ 9 - 2　付里叶变换的几个性质………………………（261）
§ 9 - 3　付里叶变换的应用：（高斯分布函数，脉冲函数，阻尼振子，无界弦，泊松方程，输运方程）……（265）
第十章　格林函数法……………………………………（286）

§10－1　δ 函数……………………………………………（286）
§10－2　稳定场方程的格林函数……………………………（298）
§10－3　虚宗量δ 函数，非齐次波动方程的解………（311）
第十一章　变分法……………………………………………（320）
§11－1　泛函、泛函的极值…………………………………（320）
§11－2　泛函极值的必要条件　欧勒方程………………（323）
§11－3　欧勒方程的应用……………………………………（326）
参考习题　………………………………………………（331）

第一章　解析函数论基础

解析函数是复变函数中有特殊意义的一类，我们将着重讨论解析函数以及带有有限个孤立奇点的解析函数，为了便于阅读和教学，在有关的地方，将扼要地叙述一下准备知识。

§1－1　复变函数

一　关于复变函数的一些准备知识。

1　**点集**——点的集合。

2　**邻域**——一个点a的领域ε是指以这一点为圆心，以ε为半径的一个开圆，即满足不等式$|z-a|<\varepsilon$的所有点z的集合。

3　（点集的）**内点**——以该点为圆心作一半径足够小的圆，使得圆内所有的点（圆内所有点称为该点的邻域）均属于这个点集，则这个点称为点集的内点。

4　**开区域**——全由内点组成的点集称为开区域，这个点集中的任何两个点都可用这个点集内的一条析线连结起来，用D标记。

5　**边界点**——点本身不属于D，但以该点作圆心，作半径任意小的圆都包含有D的点，则该点称为D的边界点。

6　**闭域**——开域与边界的并，用$\overline{D}$标记。

7　**连通域**——分单连通域和复通域，若在域内，任意闭曲线可连续变形，直至收缩为一点，或说连结任意两

点的闭曲线，由一根可连续变到另一根，则该域称为单通域。连通阶数：域内有孔时，则有界区域的边界将被分成若干个不相连接的部分，不相接边界的数目，叫做区域的连通阶数，作不相接边界间的连线（割线）可降低连通阶数，连通阶数大于 1 的区域，均称为复通域。

8　**一致连续**——（仿实变函数，换x为z）$f(z)$ 定义在闭区域$\overline{D}$中，若是对任意的$\varepsilon>0$，存在与z无关的 $\delta>0$，使得$\overline{D}$中任意两点z_1和z_2满足$|z_1-z_2|<\delta$时，便有$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$，则称$f(z)$在$\overline{D}$中一致连续。

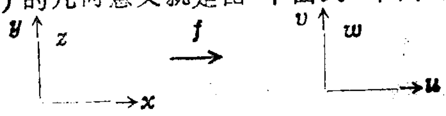
二　复变函数的定义及几何变换意义

在实变量函数中已知，所谓函数是指自变量和因变量间的对应（映射）法则，$\varphi: x\to y$，记为：$y=\varphi(x)$，其中$x\in R$，$y\in R$。仿此有复变函数的定义：

有一个确定的法则f存在，使得复数$z=x+iy$所在的区域D内的每一点z，有确定的$w=u+iv$与之对应，即f把z映为w，则称w是复数z的函数，记为：

$$w=f(z)\ 或 f: z\longrightarrow w$$

式中各量的意义是：z称为自变量，w称为因变量，映射$f: z\to w$称为函数，z所在的平面称为z平面（或x，y平面），z取值的区域称为函数的定义域，记为D。w所在的平面称为w平面（或u、v平面）。w取值的区域称为函数的值域，记为D^*，$w=f(z)$的几何意义就是由z平面到w平面的映射



从这一定义中不难明白，许多复变函数的具体形式（如

多项式、有理分式、指数函数、三角函数、双曲函数等等）可直接将实变函数中的x替换为z而得到。

一个复变函数相当于二个实变函数：有序对（x，y）有确定的有序对（u，v）与之对应：

$$w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$$

或

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,w=u(x,\ y)\\ \mathrm{Im}\,w=v(x,\ y)\end{cases}$$

写成这种形式后，更有利于我们研究这个映射的性质。

例：我们来讨论

$$w=z^2$$

所实现的映射，用平面极坐标和指数式分别表示z、w：

$$z=\rho e^{i\theta}$$

$$w=re^{i\varphi}$$

于是有：

$$w=re^{i\varphi}=\rho^2e^{i2\theta}$$

所以有： $r=\rho^2$ $\varphi=2\theta$

这就是说，在$w=z^2$映射下，z平面上的复数映到w平面上时，其模平方，其幅角加倍。z平面上的第一象限，映成w平面上的上半平面，这一映射还有更重要的性质，下面，我们对此例作进一步分析（详见§1-3，解析函数实现的变换是保角变换）

由于 $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$

即有 $u=x^2-y^2$

$v=2xy$

若我们令

$$u=x^2-y^2=C_1$$

$$v=2xy=C_2$$

于是

在z平面上是二元二次方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ 2xy = C_2 \end{cases}$$

在w平面上是二元一次方程组

$$u = C_1$$

$$v = C_2$$

从而看到：在xy平面上看，有$x^2 - y^2 = C_1$和$2xy = C_2$，这是两簇正交的双曲线簇，如图（1-1）所示。在w平面上看，有$u = C_1$和$v = C_2$，这是两簇分别与u坐标轴和v坐标轴平行的、彼此正交的两直线

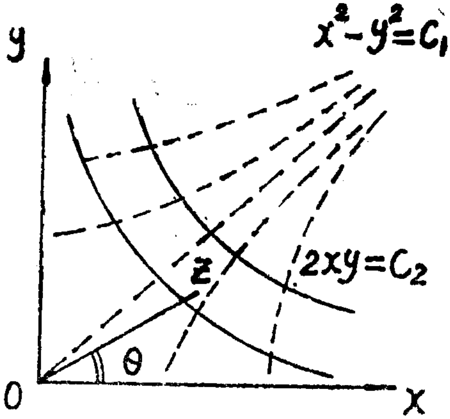


图 1-1

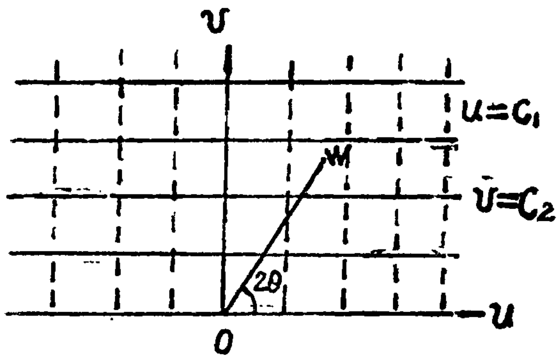


图 1-2

簇。如图1-2所示。这个分析表明，$w=z^2$把z平面上的正交双曲线簇映成w平面上的正交的直线簇，两线簇的形状发生了很大变化，但两线簇的交角没有变化，这种保持两线簇间夹角不变的映射，叫做保角映射。或称保角变换。

§1-2 复变函数的连续、求导和C-R方程

一 复变函数的连续性

设在复平面的某一区域D内，定义了一个复变量函数$w=f(z)$，如果自变量z在复数域D内以任意方式（即任意方向、任意速率）趋向于一点z_0时，函数$f(z)$都以$f(z_0)$为极限，即：

当$z\to z_0$时，$f(z)\to f(z_0)$（$w\to w_0$），则称$f(z)$在z_0点连续。

形式上，这和实变函数连续的定义类似，实变函数$f(x)$在$x=x_0$处的连续性要求x无论是从左边还是右边，或是时左时右地（这即是实数域内的任意方向）趋向于点x_0时，$f(x)$都有共同的极限值$f(x_0)$。然而，由于复数域是一平面，所以，复变函数$f(z)$的连续性就要求z沿复平面以任何方式（任意方

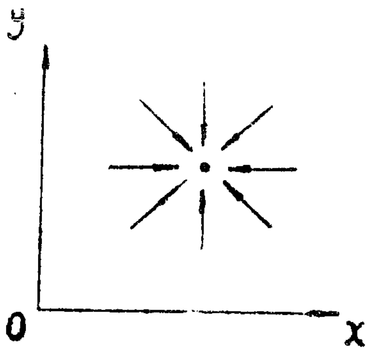


图1-

向，任意速率）趋于z_0时，$f(z)$都有共同的极限值$f(z_0)$。

当然，函数$f(z)$在$z_0=x_0+iy_0$处的连续性，也就是二元函数$u(x, y)$和$v(x, y)$在点(x_0, y_0)处的连续性。注意到这一点，对我们做具体计算很有帮助。

二　复变函数的导数　C-R方程

可导的定义　设$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$是定义在区域D内的单值连续函数（求导要求有确定的有限极限）。如果对于D内某一点z，Δz以任意方式趋近于零时，比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且总是逼近同一个有限的极限，我们就称$f(z)$在点z可导。这个极限叫做函数$f(z)$在z点的导数，记作

$$f'(z) \qquad \text{或} \qquad \frac{df}{dz}$$

即

$$f'(z)=\frac{df}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$$

要强调指出的是，复变函数和实变函数的导数定义，虽然形式上类似，但实质上有重大不同。特点在于，复变函数的复变量Δz沿复平面上任一曲线（任意方向，任意速率）逼近零时，要求$\Delta f/\Delta z$有共同极限。故复变函数的可导比实变函数的可导要求严格得多。那么，可导的必要条件、充要条件又是什么呢？

1　可导的必要条件、C-R方程

现在，我们讨论Δz 分别沿实轴和虚轴逼近零的两种情形，以引出可导的必要条件。

当Δz沿实轴趋近于0时有：

$\Delta y \equiv 0$ 、$\Delta z = \Delta x \to 0$，于是有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

当Δz沿虚轴趋近于0时有

$\Delta x \equiv 0$，$\Delta z = \Delta y \to 0$，于是有

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right\}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

如果函数$f(z)$在点z可导，这两个极限必须存在且相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

亦即：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

这方程就叫柯西-里曼方程，又叫C-R方程。它是复变函数可导的必要条件。有人又称它为达朗贝尔——欧拉条件。若不满足此条件，肯定不可导。例如：处处连续的函数$w=\mathrm{Re}Z=x$，其实部和虚部分别为：$u(x,y)=x$和$v(x,y)=0$，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在任一点都存在，但不满足C-R方程，所以ReZ处处连续却处处不可导，由此可见和实变函数的显著不同。事实上，当$\Delta z=\Delta x\to 0$时，有

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

而当$\Delta z=i\Delta y\to 0$时，有

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{i\Delta y}\bigg|_{\Delta x=0}=\frac{0}{i\Delta y}=0$$

两极限不相等，所以不可导。

由于柯西-里曼方程只保证了Δz分别沿实轴和虚轴趋近于0时，$\Delta f/\Delta z$趋近同一极限。自然会问，它是否保证Δz沿任意方向以任何方式趋近0时，$\Delta f/\Delta z$总有同一极限？即C-R方程是否为$f(z)$可导的充分条件呢？先看例题。

例如已知函数：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}=\dfrac{xy^2z}{x^2+y^4}, & 当z\neq 0\\ 0 & 当z=0\end{cases}$$

其实部u和虚部v分别为：

$$u(x,\ y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$v(x,\ y)=\frac{xy^3}{x^2+y^4}\quad (z\neq 0\text{时})$$

于是 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z\to 0}=\left.\frac{(x^2+y^4)\,2xy^2-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\to 0\\ y=0}}$$

$$=\left.\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\equiv 0\\ y\to 0}}=0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z\to 0}=\left.\frac{(x^2+y^4)\,3y^2x-y^3x\cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\equiv 0\\ y\to 0}}$$

$$=\left.\frac{3x^3y^2-xy^6}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\equiv 0\\ y\to 0}}=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z\to 0}=\left.\frac{(x^2+y^4)\cdot 2x^2y-x^2y^2\,4y^3}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\equiv 0\\ y\to 0}}=0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z\to 0}=\left.\frac{(x^2+y^4)y^3-xy^3\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2}\right|_{\substack{x\equiv 0\\ y\to 0}}=0$$

可见在$z=0$点满足C-R方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

而且，当z沿实轴或虚轴趋于0时，极限

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(0+z)-f(0)}{z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{xy^2z/x^2+y^4-0}{z}$$