军医大学军医专业基本教材

数　　学

第三军医大学主编

军医大学军医专业基本教材

数　　学

主编单位

第三军医大学

编写单位

第三军医大学

第四军医大学

参加汇审单位

第一军医大学　第二军医大学

第三军医大学　第四军医大学

目　　录

第一章　函　　数

第一节　变 量 与 函 数

一、常量和变量

在我们观察自然现象与技术过程时，经常遇到各种不同的量。如气体的体积、温度、克分子数、飞机的速度、等等。这些量虽各有其物理、化学意义，但按它们所取的数值来看，可简单地把它们分为变量与常量两类。

凡是在某一现象或变化过程中，能取不同数值的量叫做变量，始终保持同一数值的量叫常量。

例如，将一密闭容器内的气体加热时，若容器内的容积无变化，用仪器量得气体的温度 t、压强 P、体积 V 如表 1 — 1 所示。可见在此过程中气体的温度 t、压强 P 都是变量，而气体的体积 V 则是常量。

表 1 — 1

温度 t（℃）	0	1	2	3	……	10	……	100
压强 P（大气压）	1	1.004	1.007	1.011	……	1.037	……	1.366
体积 V（升）	2.24	2.24	2.24	2.24	……	2.24	……	2.24

应该注意，不能离开所研究的过程去讨论某一个量是变量还是常量，更不能形式地从某一个量的符号（字母）去判断它是变量还是常量。例如，上例是在等体积过程中研究气体的压强与温度的关系，因此体积是常量，温度与压强是变量；如在等温过程中研究气体的体积与压强的关系时，温度是常量，而体积与压强是变量。

有些量在所研究的过程中，变化微小，以至其变化可略去不计，也可视为常量。如在一定地点研究自由落体运动时，设物体的高度不太大，则重力加速度 g 即可视为常量。由此可见，常量不过是变量的特殊情况，常量是在一定的过程中取同一数值的变量。

从几何表示法来说，即以数轴上的点表示数量时，常量是数轴上的一个定点，而变量则是一个动点。

二、函数的概念

在一个自然现象或技术过程中遇到的各种量，都不是孤立地变化着的，而是相互间有着一定的依从关系。这种依从关系在很多情况下表现为变量间的确切的对应关系。如表 1 — 1 所列的给密闭气体加热的过程中，气体温度 t 变化时，它的压强 P 也随着变化。对 t 的每一个值，P 都有一个确定的值和它对应。这种变量间的关系叫做函数关系。

在某个变化过程中，如有两个变量 x 和 y，对于变量 x 所能取的每一个值，变量 y 都有确定的值与它相对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数。一般记为

$$y=f(x) \text{ 或 } y=y(x)$$

其中 x 称为自变量，y 也可称为因变量。

自变量 x 取某一定值 a 时，函数的对应值，即函数值，则用 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 来表示。如上例中 P 与 t 的函数关系，即可表示为 $P=f(t)$，而 $t=0$、10 时 $f(0)=1$，$f(10)=1.037$ 等等。又如求 $y=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时的函数值，则可写成

$$y|_{x=\frac{\pi}{6}}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

关于函数应说明几点：

(1) 函数 $y=f(x)$ 中的"f"，表示变量 y 与 x 的某一特定的对应关系。$f(x)$ 是一个完整的记号，不可误解为 f 与 x 相乘。至于这种对应关系是什么，完全由具体问题来决定。此外，符号是用"f"还是用其它字母是可任意的，但在同一论证过程中对不同的函数关系则必须用不同的符号，以免混淆。

(2) 函数的定义里并没有要求自变量 x 在它所能取的值内变动时，函数值 y 一定要随之而变，只要求 y 有确定的值和它对应。因此，在自变量变化时，对应的函数值可以是没有变化的，即恒取某定值。由此可知，常量 $y=C$（C 为常数）可以看成是某一变量的函数。

(3) 对于每一个具体函数，自变量所能取的值都有一定的范围。这种"一定范围"是指使函数有意义的自变量 x 取值的全体，叫做函数的定义域。由定义域内各数值通过某种对应关系所确定的函数 y 的全体数值，叫做函数的值域。例如 $y=\sin x$，其定义域为 $-\infty<x<+\infty$，其值域为 $-1\leq y\leq 1$。

只有当自变量在定义域内取值时，函数才有意义。为了方便，我们把变量的变化范围用区间记号来表示。

满足 $a\leq x\leq b$ 的实数全体，叫做闭区间，用记号 $[a, b]$ 表示；

满足 $a<x<b$ 的实数全体，叫做开区间，用记号 (a, b) 表示；

满足 $a<x\leq b$ 或 $a\leq x<b$ 的实数全体，叫做半开区间，分别用 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示。

此外，$(a, +\infty)$ 表示全体大于 a 的实数，$[a, +\infty)$ 表示全体大于或等于 a 的实数，$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数等等。

上例 $y=\sin x$，用区间记号表示，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，其值域为 $[-1, 1]$。

以后在不需要辨明所谈系何类区间的场合，我们就简单说"区间"并用圆括弧来表示。

函数的定义域由所研究的实际问题决定。或者依据具体问题的条件和实际意义，或者依据数学规定。如表 1—1 所列的 $P=f(t)$ 的函数关系中，如果实验只是在 0 ℃到 100℃之间进行的，则 t 只能取这中间的值，而不能任意把这种函数关系扩大到未经考查的范围去。再如 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$，其定义域为 $(-3, 3)$，否则将出现虚数或没有意义的情况。

再者，依赖于两个及两个以上的独立的自变量的函数，如矩形面积 S 依赖于它的长 x 和宽 y，即 $S=xy$，等等，则叫做多元函数。因之，上面所定义的函数又叫做一元函数。

三、函数的表示法

函数的符号只肯定了两个变量间存在着函数关系，没有给出函数值与自变量的值之间具体的对应关系。函数的表示法就是解决这个问题的。

（一）表格法

这种方法是把一系列的自变量的值和与它们对应的函数值列成一个表格。熟知的对数表、三角函数表等都是用的这个方法。科学技术工作中也常用这种方法，如把测量或实验所得的数据列成表格来研究，就象表 1 — 1 那样，等等。

（二）图象法

这种方法是利用坐标平面上的曲线（图象）来表示函数关系的。在中学课程中学过的，做匀速运动或匀加速运动物体经过的路程 S 与时间 t 的关系曲线等等，就是这种例子。

一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示函数。函数曲线上的任一点的坐标值即给出了自变量与函数的一组对应值，如图 1 — 1 中函数曲线上任一点 P_1 的坐标 x_1 和 y_1 即给出了 $y=f(x)$ 的一组对应值。而函数曲线上所有的点则给出了全部自变量与函数间可能有的各组对应值。

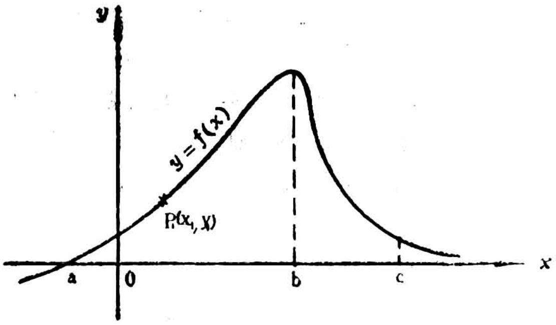


图 1 — 1

在科学技术工作中经常需要用图象来表示函数关系。这种图象有时是由实验数据得来，有时还是直接用机械方法得出的。高等数学中也经常要用到这种方法。

（三）解析法

这种方法是给出一个解析式（或叫分析表达式、公式），其中给出由一个自变量的值算出所对应的函数值所需的运算和步骤。如表 1 — 1 所列的 $P=f(t)$ 的解析式即为

$$P=1+\frac{1}{273}t \qquad (0\le t\le 100)$$

又如 $y=x^2+1$ 及 $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 即为解析表达式。通过这些表达式就能算出与自变量可能取的任一值所对应的函数值。

函数的表达式一般是根据变量间的数学、物理……关系（条件）得出的。其步骤大致是：将条件用数学式表示出来，再把这些数学式经过代数变换（如代入、化简等），或通过分析方法，得出所需的函数解析式。在物理学习中所遇到的各种公式都是物理量之间的函数解析式，它们的推导过程也就是得出函数解析式的过程。

例：有一根弹簧，原长 l_0，受拉力 F 作用后长度变为 l，已知弹簧单位长度的伸长与所受拉力成正比，求其长度 l 与所受拉力 F 间的关系式（即将 l 表示为 F 的函数）。

解：先将已知条件写成数学式，即

弹簧受拉力作用后的伸长 $=l-l_0$，

单位长度的伸长 $= \frac{l-l_0}{l_0}$，

由于单位长度的伸长与所受拉力成正比，所以有

$$\frac{l-l_0}{l_0}=KF \quad (K\text{ 为比例常数})$$

由此式经过移项，化简等步骤，即可得出所求解析式为：

$$l=l_0(1+KF)$$

关于以上三种表示法，有以下两点需加以说明。

(1) 函数的三种表示法各有其优点，因而各有其适用的场合。

表格法最便于找出对应的函数值。

图象法对函数的某些性质表现得最明显。如图 1—1 所示的函数关系中，可以从曲线直接看出函数的以下几种性质：①当自变量 x 由 a 增加到 b 时，函数 y 的值是逐渐增加的，而在区间 $[b, c]$ 内，y 是逐渐减小的。②函数在 $[a, b]$ 内增加的速度是逐渐加快的，而在 $[b, c]$ 内减少的速度是非常大的。③在 b 处函数有一极大值。④当自变量的值无限增加下去时，函数值可能是无限地减小的，且总不等于零（即曲线无限地向横轴靠近）。

函数的解析式虽然没有以上两个优点，但它在理论研究上却有它独特的优点。解析式是给出函数关系的最方便的方法，最便于进行计算和研究，它是我们研究函数关系的最重要的工具。

虽然三种方法有不同之处，但不管那一种都能独立地给出确切的函数关系，这一点是非常值得重视的。那种认为只有解析式表示的才是函数的想法是错误的。

同一个函数的关系，有时需要两个甚至两个以上的解析式来表示它，如固态物质在溶解前后所吸收的热量与温度的函数关系就是这样，这也是需要注意的问题。

(2) 函数的解析表达式，象 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 等等，又可看做是一些方程。$y=\sqrt{1-x^2}$ 是变量 y 与 x 的一个不定方程，它有无穷组根，每一组根就是函数 y 与自变量 x 的一组对应值。

因此任何方程都可看做是某种函数关系的一个解析表达式。由于本课程中讨论的多是两个变量间的函数关系，所以今后谈到方程就是指的二元方程，有例外时再加说明。

方程的给出可以有不同的形式，如上面的例子是给做 $y=f(x)$ 或 $Z=\phi(x)$ 等形式的。但也可给做 $F(x, y)=0$ 的形式，如

$$x^2-25y^2-9=0,$$

$$Z^2-2Z+U^2=0,$$

等等。为了区别它们，将以 $y=f(x)$ 形式给出的函数关系叫做显函数，而把以 $F(x, y)=0$ 形式给出的叫做隐函数。

第二节 初 等 函 数

在自然科学技术工作中经常会遇到一些函数，它们是由以下几种最简单的基本初等函数组成的，这类函数被称为初等函数，它们是本课程研究的主要对象。

一、基本初等函数

（一）幂函数

它的解析式是 $y=x^n$，其中 n 是一个任意实数。它的定义域随 n 而不同。图 1—2 给出幂函数的几个特殊图形。

（二）指数函数

它的解析式是 $y=a^x$，其中 a 是一个不等于 1 的正数。它的定义域是整个数轴。图1—3就是指数函数的图象的大致情况。其特点是，不论 a 等于多少，图形都经过（0，1）一点；当 $a>1$ 时函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增；当 $0<a<1$ 时，函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减。

（三）对数函数

这种函数关系记为 $y=log_a x$，其中 a 为不等于 1 的正数。定义域是 $x>0$，y 与 x 的对应值可由常用对数表查出。当 $a\neq10$ 时，y 与 x 的对应值可由换底公式（式中 $lg\,x$ 表示以 10 为底的对数）

$$y=log_a x=\frac{lg\,x}{lg\,a}$$

计算得出。图 1—4 是对数函数的图形。其特点是，图形都经过（1，0）点；当 $a>1$ 时，函数在 $(0, +\infty)$ 上递增；当 $0<a<1$ 时，函数在 $(0, +\infty)$ 上递减。

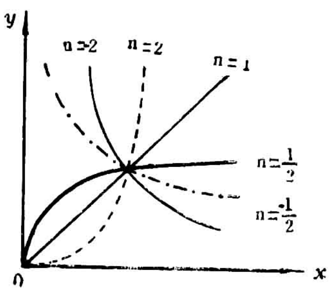


图1—2

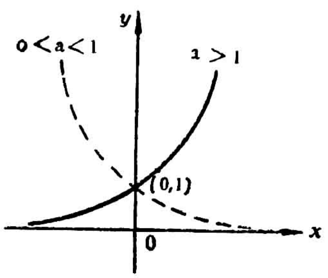


图1—3

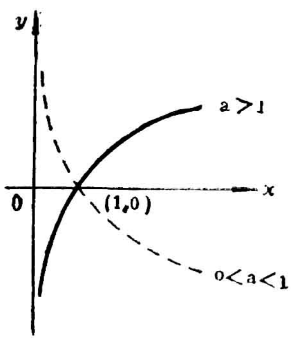


图1—4

（四）三角函数

常用的有下列六种：

$$y=sin\,x \qquad y=cos\,x \qquad y=tg\,x$$

$$y=csc\,x \qquad y=sec\,x \qquad y=ctg\,x$$

应该注意，各式中的 x，为了分析上的方便，都是以弧度做单位的。其中 $sin\,x$ 和 $cos\,x$ 的定义域都是整个数轴；而其他几种函数则要除去一些特殊点。这些函数的重要特点是，$sin\,x$ 和 $cos\,x$ 以 2π 为周期，$tg\,x$ 和 $ctg\,x$ 以 π 为周期；$sin\,x$、$tg\,x$ 和 $ctg\,x$ 的图形是关于原点对称的，$cos\,x$ 的图形是关于 y 轴对称的。图 1—5 和图 1—6，分别给出了 $sin\,x$、$cos\,x$ 及 $tg\,x$ 的图形。

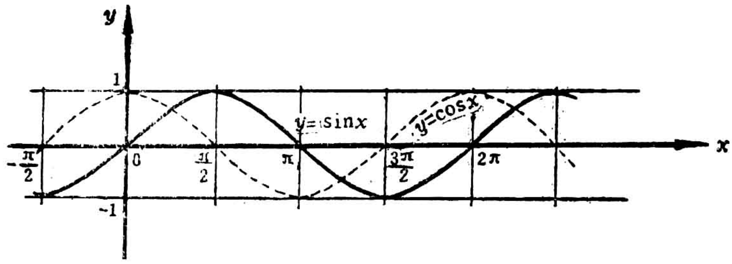


图1—5

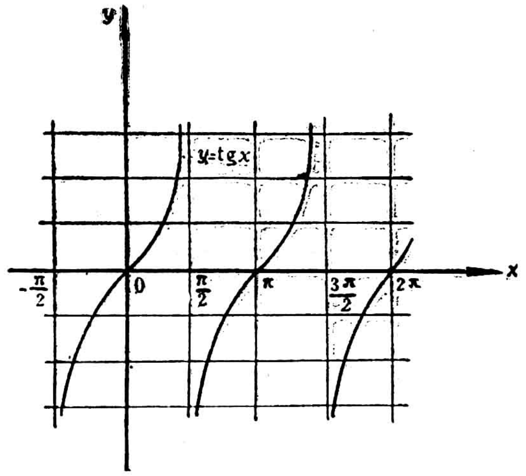


图1—6

(五)反三角函数

它们是三角函数的反函数，常见的有

$$y = arc\ sin\ x \qquad y = arc\ cos\ x$$

$$y = arc\ tg\ x \qquad y = arc\ ctg\ x$$

前两者的定义域是[－1，1]，后两个的定义域是整个数轴（$-\infty$，$+\infty$）。应该注意，各式中的 y 都是以弧度计算的。

由于反三角函数都是多值函数，所以我们引入“主值”的概念。它们的主值系指下列诸函数值：

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant arc\ sin\ x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant arc\ cos\ x \leqslant \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < arc\ tg\ x < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < arc\ ctg\ x < \pi。$$

如图1－7、1－8和1－9中实线部份所示。如在计算中只考虑函数的主值部份，它们就都成为单值函数了。（注意，这样做并不影响它们的定义域。）为了研究的方便，符号 $arc\ sin$、$arc\ cos$、$arc\ tg$ 和 $arc\ ctg$ 也只用来表示它们主值部份的函数关系。

(六)因为常量可看做是另一变量的函数，所以 $y = C$（C 为常数）也可列为基本初等函数的一种。它的图形是一条平行 x 轴，且与 x 轴相距 C 个单位的直线。

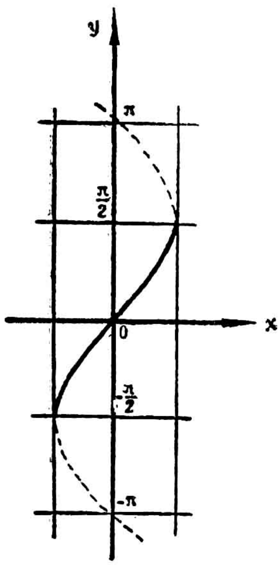


图1—7

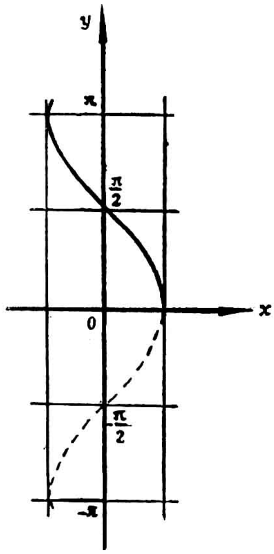


图1—8

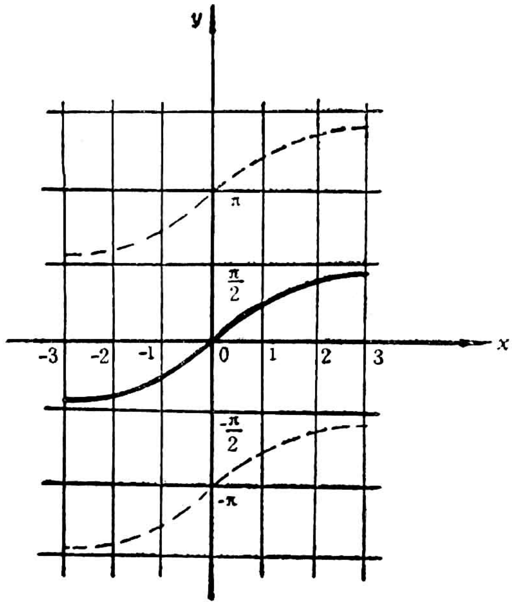


图1—9

二、简单函数

由基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）所组成的函数，称为简单函数。如函数 $y=x^2+1$ 就是一个简单函数，因为可看做是由幂函数 $u=x^2$ 和常数 $V=1$ 两个函数相加而成。

例1：分析下面的函数是否简单函数？

1） $y=2^x(\cos x-\sin x)$

2） $y=5^x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{x+1}$

解：1）因为 $y=2^x(\cos x-\sin x)$，可看做是 $u=2^x$ 和 $V=\cos x-\sin x$ 二函数相乘而成，而 V 又是由 $\cos x$ 和 $\sin x$ 二函数相减而成，所以 $y=2^x(\cos x-\sin x)$ 是简单函数。

2）因为 $y=5^x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{x+1}$，可看做是 $u=5^x\sqrt{x}$ 和 $V=\dfrac{x^2}{x+1}$ 两函数相加而成，而 u 又是由 5^x 和 $x^{\frac{1}{2}}$ 相乘而成，V 是由 x^2 和 $x+1$ 相除而成，故 $y=5^x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{x+1}$ 为简单函数。

三、复合函数

（一）复合函数的概念

有些函数可看做是由几个函数复合而成的。比如 $y=\sin x^2$，在基本初等函数 $\sin x$ 的自变量的位置上的是 x^2，而 x^2 又是一个基本初等函数。所以这个函数可看做是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的。一般地，

定义：如有 $y=f(u)$，而 $u=\phi(x)$，则

$$y=f[\phi(x)]$$

称为自变量 x 的复合函数，u 称为中间变量。

例 2：设 $y=a^u$ 及 $u=tg\,x$，把 y 表示成 x 的函数。

解：通过简单的代入就可得到：

$$y=a^u=a^{tg\,x}。$$

复合函数不仅可以由两个函数，也可以由多个函数构成。如$y=f(u)$，$u=\phi(V)$，$V=\varphi(x)$，则

$$y=f\{\phi[\varphi(x)]\}$$

为 x 的复合函数。

（二）分解复合函数的结构

对于复合函数，读者不仅要弄清其概念，而且应能分解它的结构，即看出一个复合函数是由哪些函数复合而成的。熟练掌握这一点，对以后的学习很重要。

要判断一个函数是不是复合函数，只要把它和基本初等函数从形式上比较一下，看在自变量的位置上是不是一个单独的自变量“x”的形式就可以了。

例 3：下例函数是不是复合函数？如是，分解其复合结构。

1) $y=lg\,sin\,x$

2) $y=\sqrt{tg\,2x}$

3) $y=arc\,sin\sqrt{x^2+1}$

解：1) 首先我们看到前面有一个“lg”符号，因此将它与基本初等函数 $log_a x$ 进行比较。但在自变量位置上不是“x”的形式，而是一个函数 $sin\,x$，所以 $y=lg\,sin\,x$ 是一个复合函数。设 $u=sin\,x$，于是已知函数是由 $y=lgu$，$u=sin\,x$ 复合而成。

2) 由于$y=\sqrt{tg\,2x}=(tg2x)^{\frac{1}{2}}$是幂函数形式，因此将它与基本初等函数 $y=x^n$ 相比较。但在自变量位置上不是“x”的形式，而是一个函数 $tg\,2x$。设 $u=tg\,2x$，$V=2x$，于是已知函数是由$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=tg\,V$，$V=2x$ 复合而成的。

3) 类似1)和2)的分析，可以看到，$y=arc\,sin\sqrt{x^2+1}$是由 $y=arc\,sin\,u$，$u=\sqrt{V}$，$V=x^2+1$ 复合而成的。

四、初等函数

基本初等函数和由它们经过有限次四则运算所组成的函数，以及由这些函数经过有限次复合而成的复合函数，都叫做初等函数。如 $y=2\,sin\,(3\,x+\frac{\pi}{4})$，$y=\frac{2+3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$，$y=(2.7)^{\frac{x^2}{2}}$ 等等都是初等函数。

例 4：分析下列函数是否初等函数？

1) $y=sin(wt+\phi)$

2) $y=\cos\frac{t}{3}+\frac{sin\,4t}{\sqrt{t}}$

3) $y=(at+b)e^{-2t}$

解：1) 因为 $y=sin(wt+\phi)$ 是由 $y=sin\,u$ 和 $u=wt+\phi$ 复合而成的，$u=wt+\phi$ 是一简单函数，所以 $y=sin(wt+\phi)$ 是初等函数。

2) 因为 $y=cos\frac{t}{3}+\frac{sin\,4t}{\sqrt{t}}$是由 $u=cos\frac{t}{3}$和 $V=\frac{sin\,4t}{\sqrt{t}}$相加而成的，而 $cos\frac{t}{3}$是一个

复合函数，$\frac{\sin 4t}{\sqrt{t}}$是由 $\sin 4t$ 和$\sqrt{t}$ 相除而成的，故 $y=\cos\frac{t}{3}+\frac{\sin 4t}{\sqrt{t}}$是一个初等函数。

3）因为 $y=(at+b)e^{-2t}$ 是由 $u=at+b$ 和 $V=e^{-2t}$ 相乘而成的，u 是一简单函数，V 是一复合函数，故 $y=(at+b)e^{-2t}$ 是初等函数。

习 题 一

1．什么叫常量、变量？在什么情况下一个变量称为另一变量的函数？试举例说明。

2．函数 $y=f(x)$ 的几何意义是什么？符号 $f(a)$ 及 $(a,\ f(a))$（a 为给定的数）的意义是什么？

3．大于零而小于 50 的全体整数能否用区间表示？为什么？

4．按邮局规定，外埠平信信件的邮资与信件的重量间有无函数关系？为什么？（邮局规定信件重量在 20 克以下者，邮资八分；40 克以下，20 克以上者，邮资一角六分，余类推）。

5．求下列各函数值：

(1) 设 $f(x)=2x^2-1$，　求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(a+b)$，$f(2x)$；

(2) 设 $h(x)=5$，　求 $h(-1)$，$h(2)$，$h(3)-h(-3)$。

6．求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；　(2) $y=lg(1+x)$；

(3) $y=arc\sin(x-3)$；　(4) $z=\frac{1}{x^2-x}$

7．圆的面积是不是半径的函数？若是，写出函数解析式，并指出哪个是常量、变量及定义域。

8．一半导体加热后其温度 T 和电阻 R 由实验测得有下列关系：

T（℃）	0	25	30	35	40	45	50	55	60
R（欧姆）	120	111	110	90	67	59	44	35	27

(1) R 是不是 T 的函数？为什么？

(2) 用图形表示出 R 与 T 间的关系。

9．在给青蛙的坐骨神经通电使其兴奋的实验中，测得在一定的通电时间 t 内，使神经兴奋所需的最低电压 V 的值，如图 1—10 所示。试就图示说明 V 与 T 间的大致规律。

10．在半径为 R 的球内作一个内接直圆柱体。试写出这个圆柱体的体积 V 与其高 x 的函数关系。并求这个函数的定义域。

11．从半径为 R 的圆内割去一个扇形，把剩下的部份围成一个圆锥形漏斗，求漏斗的容积 V 与割去的扇形的角 x 之间的函数关系。并求这个函数的定义域。

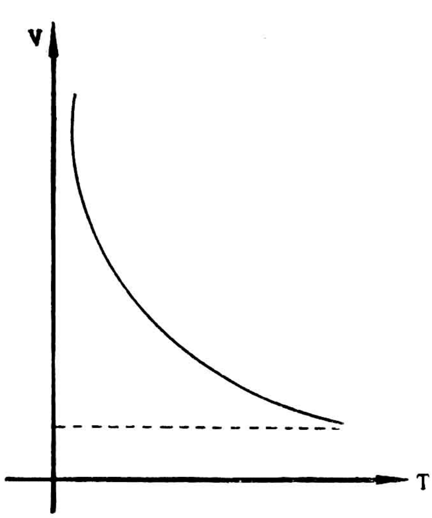


图1—10

12．基本初等函数有哪些？图形有何特点？指出定义域。

13．下列函数是否基本初等函数？为什么？

(1) $y=tg\,2x$；　(2) $y=e^{-x}$；

(3) $y=arc\sin(\frac{x}{a})$；　(4) $y=\sqrt{ax+b}$。

14．分析下列函数是否简单函数？

(1) $y=e^{t}\sin t+C$　(C为常数)

(2) $y=\frac{\sin x}{x}+x^{\frac{2}{3}}lg\,x$；　(3) $y=(1+\sin x)(x-\cos x)$。

15．什么叫复合函数？下列函数是不是复合函数？如是，分解其复合结构。

(1) $y=(x^2-1)^2$；　(2) $S=tg(2t+\frac{\pi}{4})$；

(3) $y=e^{\sin^2 t}$；　(4) $u=arc\cos\sqrt{x^2-3}$；

(5) $y=lg(arc\cos\frac{1}{\sqrt{x}})$；　(6) $y=arc\,tg(tg^2x)$。

16．设 $P=ui$，$u=iR$，$i=I_{\circ}\sin(wt+\phi)$，试将 P 表为 t 的函数。

17．分解下列复合函数的结构（只分解一步）：

(1) $y=(1+x^2)^3$；　(2) $y=\sin^3x^2$；

(3) $y=lg(\sqrt[3]{tg\,x}+\sin^3x)$；　(4) $\sqrt{1+x-x^2}$；

(5) $y=arc\sin\sqrt{x^2-1}$；　(6) $y=\frac{1}{4}lg\frac{1+x}{1-x}$。

18．分析下列各初等函数的结构：

(1) $y=arc\,tg\,x+\frac{1}{3}arctg(x^3)$；

(2) $y=ln(arc\cos\frac{1}{\sqrt{x}})$；

(3) $y=x[\sin(ln\,x)-\cos(ln\,x)]$；

(4) $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$；

(5) $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}+\sqrt[3]{3+x^2}$；

(6) $y=\sqrt{1-x^2}\,ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

第二章 极 限

高等数学中基本的数学方法是极限方法。这是理解微分和积分等知识的基础。为了理解极限方法先要理解极限概念和掌握一些简单的极限运算。这就是本章的主要内容。

第一节 极限概念

在自然现象或技术过程中所遇到的种种变量，它们有各种各样的变化方式，有的是逐渐变大，有的是忽大忽小，还有的可能是越来越小等等。在这些以不同的方式变化的变量中，有一种最简单但又很重要的变量，就是无穷小量。

一、无穷小量

(一)定义：

在变化过程中绝对值无限变小的变量叫无穷小量。即是说，如果变量 x，对于不管我们先给定一个多么小的正数 ε，在它的变化过程中总有一个时刻，在这个时刻以后，变量的绝对值将永远小于 ε，即 $|x|<\varepsilon$，我们就说变量 x 是一个无穷小量。

例如，庄子天下篇上有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭"。就是说，一尺长的一根木棒，如果每天截取上一天余下的一半，那么永远也取不完。这句话给出了一个变化过程，在这过程中木棒的长度 l 是个变量。它在第一天，第二天……，第 n 天……，所取的值组成一个无穷数列

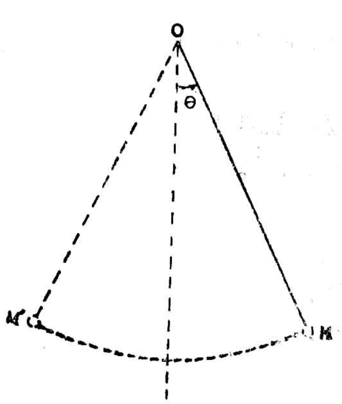
$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

可以看出，l 所取的值是在逐渐地变小的。而且不管我们事先给定一个多么小的正数 ε，比如我们指定 $\varepsilon=0.001$，在上面所说木棒 l 的变化过程中的第十天，l 的值已变成

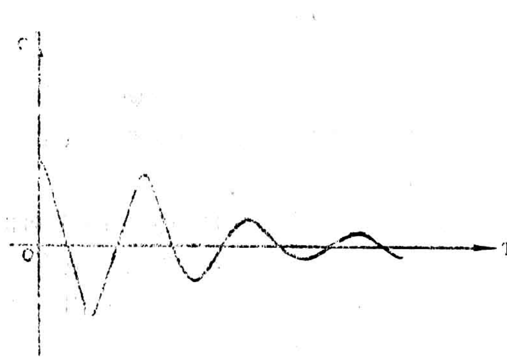
$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<0.001$$

了，而且第十天以后 l 将永远小于 0.001。由于这个 ε 是任意给定的，所以 $|l|$ 可以变得比任意小的正数还要小，而且一直变小下去，因此变量 l 的绝对值是无限变小的，它是一个无穷小量。

再例如，自由摆动着的单摆离开其铅垂位置的角度 θ（如图 2—1 (a)）是一个变量。如规定 θ 在铅直位置的右边时为正，左边时为负，则在摆动过程中 θ 所取的值时正时负，而且每次摆动 θ 都经历着从正的最大值到负的最小值中间的一切值。再者，由于摩擦力和空气阻力等原因，摆的振幅在逐渐减小着，如图 2—1 (b) 所示。



(a)



(b)

图2—1

因此不论指定一个多么小的正数 ε，随着时间的推移，总会有这样一个时刻到来，在那时刻以后 θ 的绝对值就永远小于 ε 了。所以变量 θ 是个绝对值无限变小的量，是个无穷小量。θ 与上例中变量 l 不同之处主要是 θ 的值时正时负，因此无穷小量的定义中的“绝对值”三个字是不能忽略的。

（二）应注意的问题

在讨论无穷小量时，应注意到它是一个变量，它的变化趋势是：绝对值无限地变小。只有当一个变量的变化趋势符合“绝对值无限变小”的要求时，它才能被称为无穷小量。

因此任何常量，不管多么小，都不是无穷小量，如电子的电荷、质量等等。常量中只有“零”是一个例外，因为某过程中如有一个量经常取零为其值，则它总能保持小于任何小的正数。不过，这是仅有的一个例外，所以我们今后凡谈到任何无穷小量时都应识为它不是这种总等于零的量。

（三）几何表示

如果用数轴上的动点 M 表示一个无穷小量，则 M 的运动方式应该是：它与原点 O 的距离（即变量的绝对值）在无限地变小着。也就是说，对于我们指定的原点两边无论多么小的区间（$-\varepsilon$、ε），点 M 终会运动到那里面去，而且保持在内部运动。如图 2 — 2 所示。

图 2 — 2

二、无穷大量

（一）定义：

在变化过程中绝对值无限变大的量叫做无穷大量。即是说，如果变量 x，对于不管我们事先给定一个多么大的正数 N，在它的变化过程中总有一个时刻，在那时刻以后，变量的绝对值将永远大于 N，即 $|x|>N$，我们就说变量 x 是一个无穷大量。

例如有一变量 x 在某变化过程中依次所取的值组成数列

$$2,\ -2^2,\ 2^3,\ -2^4,\ \cdots\cdots,\ (-1)^{n+1}2^n,\ \cdots\cdots$$

显然 x 的绝对值是无限变大的。比如我们任意给定一个 $N=1,000,000$，可以看出 x 的第二十个值的绝对值已变成

$$|(-1)^{21}2^{20}|=1,048,576>1,000,000$$

了，而且此后永远大于 $1,000,000$。对其他任一大正数 N，也都如此。所以 x 是个无穷大量。

一般无穷大量用符号 ∞ 来表示。如果一无穷大量总取正数，就叫做正无穷大，用符号 $+\infty$ 来表示。如果一无穷大量总取负数就叫负无穷大，用 $-\infty$ 来表示。

（二）应注意的问题

无穷大量是个变量，它的变化趋势是：绝对值无限地变大。因此任何常量，无论多么大，如光的速度，一克分子气体所含的分子数等等。都不是无穷大量。

对符号 ∞，$+\infty$ 和 $-\infty$ 也应该注意，它们不是用来表示“很大很大的数”的，它们是用来表示某些变量的变化趋势的。

（三）几何表示

正无穷大（$+\infty$）如用数轴上的动点 M 来表示，则 M 是向数轴的右方（正方向）无限地远离原点 O 而运动下去的。无论指定原点右方多么远的一个 N 点，在某个时刻后 M 点总会运动到 N 的右方，而且总在 N 的右方运动下去。如图 2—3 所示。

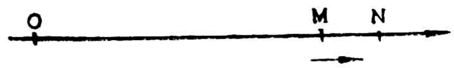


图 2—3

同样，表示负无穷大（$-\infty$）的动点 M 是向数轴左方无限地远离原点而运动下去的。

表示一般无穷大（∞）的动点 M 与上述二者不同，它可能是忽而在原点的右边，忽而又跳到原点的左边，但它与原点的距离也一样是无限地变大下去。

三、无穷大量与无穷小量间的关系

无穷大与无穷小之间有一简单的关系：

如果 x 是一个无穷大量，则 $\frac{1}{x}$ 是个无穷小量。反之，如果 x 是一个从不等于零的无穷小量，则 $\frac{1}{x}$ 是个无穷大量。

四、有极限的变量

有一类变量，就它的绝对值来说，不是无限地增大或减小，而是在变化过程中，它的值将无穷地逼近某一常量。这种变量叫做有极限的变量，而那个常量就叫做它的极限。例如，我国数学家刘徽（公元 263 年）从圆内接六边形起，依次分割成十二边形、二十四边形、……等等，然后写到："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"这就是说，当边数无限增加时，圆内接正多边形的周长（在此过程中是一个变量）将向圆周长（一个常量）无穷逼近。这里的圆内接正多边形的周长就是一个有极限地变量，它的极限就是圆的周长。

（一）定义：

如果变量 x 在它的变化过程中向某一常量 a 无穷逼近，则常量 a 叫做变量 x 的极限，或者说变量 x 以 a 为极限。这样的变量就叫做有极限的变量。记为

$$\lim x = a \quad 或 \quad x \to a$$

前者读做"x 的极限等于 a"，后者读做"x 趋向 a"。

这里"无穷逼近"系指，变量 x 所取的值与常量 a 的差（即 $x-a$）必须是一个无穷小量，或者说 $|x-a|$ 必须是无限变小的。如果用数轴上的动点 M（或 M'）表示变量 x，用定点 A 表示常量 a，如图 2—4 表示，则距离 $\overline{MA}$（或 $\overline{M'A}$）必须无限地变小。

图 2—4