高等学校试用教材

自适应控制系统

（讨论稿）

下册

清华大学 韩曾晋编

全国高等学校工业自动化专业教育委员会

一九八一年五月

第四章　随机控制与随机自适应控制（二）

本章应用状态空间模型讨论随机控制系统和随机自适应控制系统的分析和设计问题，基本工具是Bellman的动态规划。

第一节从确定性最优控制问题入手，详细介绍了动态规划的基本原理和计算方法以及如何应用动态规划解决线性二次型性能指标的最优控制问题。

第二节的主要目的是阐明如何将动态规划应用到随机控制问题中去，其中着重讨论线性二次高斯问题（L、Q、G问题），因为它是迄今为止随机控制中最富有实际意义的结果，在完成L、Q、G问题的推导后，用一些控制中的实例说明其应用，在本节的最后还扼要地介绍了非线性随机控制问题。

本章从第三节开始讨论随机自适应控制问题，第三节主要介绍随机自适应控制的一些基本概念，定义和特性，从问题的提法开始，接着说明随机自适应控制与随机最优控制之间的关系，然后介绍几种基本控制策略，最后用一个简单的例子说明随机自适应控制系统设计的两个基本原则：确定等效原则和对偶控制原则。

第四节介绍随机自适应控制的一些具体算法，鉴于这个问题目前尚处于研究发展阶段，尽管已发表的算法很多，但至今尚无一个统一的，完善的处理方法，因此，本节只打算选择两个有代表性的算法，重点的加以介绍，对其他重要的算法也列出了有关文献，供读者参考。

§4-1　动态规划

五十年代末由R.Bellman提出的动态规划法是解决动态系统最优控制的重要工具，本章从最优控制的观点讨论随机

控制系统和随机的连续控制系统的分析和设计，因此也要应用这个工具。

一、问题的提法：

给定：

1. 系统方程：

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),k],\ x(0)=x_0 \qquad (4.1)$$

其中：x是n维状态向量，x_0表示给定的初始条件，u是m维控制向量，在动态规划的文献中有时也叫决策变量，$k=0,1,\cdots\cdots N$，表示离散时间，在动态规划文献中有时也称阶段变量。

$f(\cdot,\cdot,\cdot)$是n维向量泛函。所谓泛函此处是指时间函数$u(k)$、$x(k)$的函数，系统方程（即状态方程）(4.1)式描述了变量x，u，k三者之间的依赖关系。

2. 性能指数函数

$$J=\sum_{k=0}^{N}C_k[x(k),u(k),k] \qquad (4.2)$$

其中$C_k[x(k),u(k),k]$表示第k时刻的代价（第k阶段）J代表N级的总代价，称为代价函数，有时也称损失函数，目标函数等々。对于控制问题，由于J的值相对地反映了控制性能的好坏，称为性能指标函数。

3. 约束条件：

$$x\in X\subset R^n$$

$$u\in U\subset R^m$$

X，U分别表示n维状态空间R^n和m维控制空间R^m中的容许子集，x、u分别限制在容许子集X、U中。

最优化问题可以归结为：求控制变量序列$u(0)$，$u(1)$，$\cdots\cdots u(N-1)$，使得在满足系统方程和约束条件的情况下，

性能指标J达到极小值。

首先让我们用一个简单的例子说明动态规划法的一些基本思想。

最优路线问题：

假定如图4—1所示，由A到B有许多可能的路线，每条路线由不同段组成，每段路程的车费已标注在图4-1中，现在要决定一条由A到B的最优路线，使得所花的车费最少。

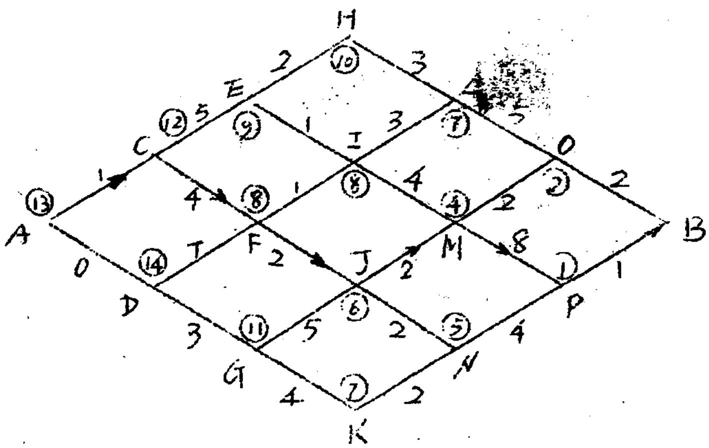

图4—1：最优路线问题

解决这个问题的一种方法称为穷举法，首先找出由A到B的所有可能的路线，然后计算每条路线要付的费用，最后逐个进行比较，决定费用最少的路线为最优路线，用这种穷举法解决最优路线的问题共需多少计算量呢？从A到B总共有20条可能的路线，每条路线要经过6段（站），所以要算出每条路所需的费用需要作5次加，20条路线就需要作100次加，要决定哪条最优还需要进行比较，即用走第一条路线所花的费用与走第二条路线所花的费用进行比较，然后将费用少的与第三条路线所花的费用比较，如此逐个进行，直到全部路线比较完毕，共需比较19次，最后才能得出结果，所以用穷举法解决这个问题所需的计算量是：100次加，19次比较。

让我们再看用动态规划法怎样解决这个问题：

假如一开始就知道由C到B和由D到B的最优路线和最小费用，那么，在A点就很容易作出最优决策，如果用I_C表示由C到B的最小费用，I_D表示由D到B的最小费用，I_C加上由A到C的费用就是由A向上走的最小费用，I_D加上由A到D的费用就是由A向下走的最小费用，将二者比较后就立刻可以作出第一个最优决策，同时也得出了由A到B的最小费用。当然，能用这种方法的前提是I_C和I_D要已知，可惜的是一开始，它们并不是已知的，不过经过以上分析，已经可以看出动态规划的一个重要思想，那就是：对于A点的最优决策来说，最重要的计算是由C到B和由D到B的最优路线和最小费用的计算，至于由C到B和由D到B的那些非最小路线和非最小费用的计算，对A点的决策来说是不需要的，这就是Bellman最优性原理的基本思想。

因此，由A到B的最小费用I_A应该是：

$$I_A = \min\begin{bmatrix} 1 + I_C \\ 0 + I_D \end{bmatrix}$$

其中：$\min\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$表示选取$x$、$y$中的小者.

尽管I_C，I_D一开始并不知道，但如果知道由E到终点的最小费用I_E和由F到终点的最小费用I_F，那么就可以用相同的方法计算I_C，那么：

$$I_C = \min\begin{bmatrix} 5 + I_E \\ 4 + I_F \end{bmatrix}$$

同理 $$I_D = \min\begin{bmatrix} 2 + I_F \\ 3 + I_G \end{bmatrix}$$

尽管I_E，I_F，I_G一开始并不知道，但只要I_H、I_I，I_J、I_K能够获得，I_E，I_F，I_G就能计算，又I_H，I_I，

I_J、I_K 依赖于 I_L，I_M，I_N，而 I_L、I_M，I_N 依赖于 I_O，I_P，因此，只要知道 I_O，I_P，就可以很快地推出其余所有点到达终点B的最小费用来，而 I_O、I_P 是距离B最近的唯一的一段路的费用，也是由O到B和由P到B的最小费用，它们是已知的，如图4-1所示：

$$I_O=2,\quad I_P=1$$

因此可以由此开始向相反的方向倒推，很快就能计算出各点到终点B的最小费用，计算步骤和结果如下：

$$\left.\begin{aligned}
&I_L=5+I_O=7\\
&I_M=\min\begin{Bmatrix}2+I_O\\8+I_P\end{Bmatrix}=4\\
&I_N=4+I_P=5
\end{aligned}\right\}\text{末2级}$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_H=3+I_L=10\\
&I_I=\min\begin{Bmatrix}3+I_L\\4+I_M\end{Bmatrix}=8\\
&I_J=\min\begin{Bmatrix}2+I_M\\2+I_N\end{Bmatrix}=6\\
&I_K=2+I_N=7
\end{aligned}\right\}\text{末3级}$$

$$\left.\begin{aligned}
&I_G=\min\begin{Bmatrix}2+I_H\\1+I_I\end{Bmatrix}=9\\
&I_F=\min\begin{Bmatrix}1+I_I\\2+I_J\end{Bmatrix}=8\\
&I_g=\min\begin{Bmatrix}5+I_J\\4+I_K\end{Bmatrix}=11
\end{aligned}\right\}\text{末4级}$$

$$I_C = \min\begin{pmatrix} 5+I_E \\ 4+I_F \end{pmatrix} = 12$$

$$I_D = \min\begin{pmatrix} 7+I_F \\ 3+I_G \end{pmatrix} = 14$$

末5級

$$I_A = \min\begin{pmatrix} 1+I_C \\ 0+I_D \end{pmatrix} = 13 \qquad \text{末6級}$$

这样，图4－1中所有点到达终点B所需的最小费用就都计标出来了，现将这些结果标註在图4－1中，园圈内的敫表示由该点到终点的最小费用，根据这些敫据，很容易决定各点的最优决策，由A到B的最优路线为：ACFJMPB，如图4－1中粗线所示。

让我们再看看用动态规划法解决最优路线问题共需多少计标号：

对于H，L，O，K，N，P这6个点，只能作唯一决策，无选择余地，对于其余9个点，为了决定达到终点的最小费用，每点只需作两次加和一次比較，总共需要：2×9+6＝24次加和9次比較，而穷举法却需要100次加和19次比較，由此可见，动态规划法可以大大节省计标号。

分析上例可以看出，动态规划法的实质是将一个6級决策问题化成了6个相同的单級决策问题，因此问题的求解就变得简单了。

二.最优性原理和动态规划的递推公式：

最优性原理是动态规划的基础，这个重要原理从概念上讲是很简单的，它的意思是：如果给定从A到C的最优轨线如图4－2所示，那么，从其中任意一点B到C的轨线Ⅱ必然是由B到C的最优轨线。

如图4-2所示，如果路线I—II是A到C的最优轨线，则最优性原理表明：II一定是B到C的最优轨线，这是因为：如果存在另一轨线II'是B到C的最优轨线，那么沿I—II'就只有比I—II更小的代价，然而这个论断恰好与I—II是由A到C的最优轨线的假设相矛盾，所以只可能II是B到C的最优轨线。

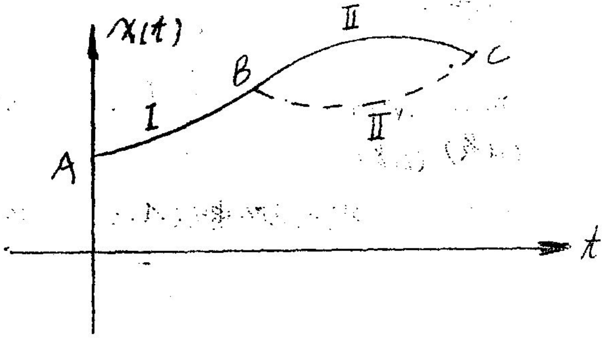

图4-2 最优性原理的说明

利用最优性原理，很容易导出动态规划的递推公式。

定义 $I[x(k),k]$ 为最小代价函数，它表示在给定的初始动态 $x(k)$ 下由 k 级到达终点（第 N 级）的最小代价，用数学公式表示就是：

$$I[x(k),k]=\min_{u(k)\cdots u(N-1)u(N)}\left\{\sum_{j=k}^{N} C[x(j),u(j),j]\right\} \qquad (4\text{-}3a)$$

其中 $u(j)$，$j=k, k+1, \cdots N$，应当属于容许控制集合 U，由于 $u(N-1)$ 已经决定了终端状态 $x(N)$，一般 $u(N)=0$，

根据最优性原理，将大括号内的求和项分解成以下两个分

$$I[x(k),k]=\min_{u(k)\cdots u(N)}\left\{C[x(k),u(k),k]+\sum_{j=k+1}^{N} C[x(j),u(j),j]\right\}$$

$$=\min_{u(k)}\ \min_{u(k+1)\cdots u(N)}\left\{C[x(k),u(k),k]+\sum_{j=k+1}^{N} C[x(j),u(j),j]\right\}$$

(4-3b)

由于：

$$\min_{(u(k))}\ \min_{(u(k+1))\cdots u(N)}\left\{C[x(k),u(k),k]\right\}=\min_{u(k)}\left\{C[x(k),u(k),k]\right\}$$

根据最小代价函数（4.3a）的定义（4.3b）式的第二项可写成：

$$\min_{u(k)}\ \min_{u(k+1)\cdots u(N)}\left\{\sum_{j=k+1}^{N}C[x(j),u(j),j]\right\}=\min_{u(k)}\left\{I[x(k+1),k+1]\right\}$$

$$=\min_{u(k)}\left\{I[f(x(k),u(k),k),k+1]\right\}$$

将上式代入（4.3b）得 $I[x(k),k]$ 的递推公式如下

$$I[x(k),k]=\min_{u(k)}\left\{C[x(k),u(k),k]+I[x(k+1),k+1]\right\} \quad (4.4a)$$

或者写成：

$$I[x,k]=\min_{u(k)}\left\{C[x,u(k),k]+I[f(x,u(k),k),k+1]\right\}$$

其中 x 表示 k 时刻的给定状态，上式表明，只要对所有 $x(k+1)\in X$，$I[x(k+1),k+1]$ 已知，利用以上递推公式就可以决定 $I[x,k]$，对所有 $x\in X$ 和所有 k，$0\le k\le N$

递推通常由最后一级开始，对末级的最小代价应满足：

$$I[x(N),N]=\min_{u(N)}\left\{C[x(N),u(N),N]\right\}\cdots\cdots(4.4b)$$

一般情况下由于 $u(N)=0$ 所以：

$$I[x(N),N]=C[x(N),N]\cdots\cdots\cdots\cdots(4.4c)$$

公式（4.4b）或（4.4c）可以看成是递推方程（4.4a）的终端条件，递推由此开始。

$I[x(k),k]$不仅是变另k的函数，而且是时间函数$x(k)$的函数，函数的函数称为泛函，所以方程（4·4）实际是一个泛函的递推方程，称为R.Bellman方程，在一般情况下Bellman方程只能用数值方法求解，但是在某些特殊情况下，例如：当系统方程对$x(k)$，$u(k)$是线性的，性能指标函数是$x(k)$，$u(k)$的二次函数，这时Bellman方程可以获得解析解，由此还可以得到最优控制的解析表达式，后面将要对这种所谓线性、二次问题（L.Q问题）进行详细讨论。

下面将动态规划法解决实际问题的步骤归纳如下：

递推公式（4·4）将一个复杂的N级最优化问题转换成N个一级最优化问题，然后对这些一级最优化问题逐个进行求解，决定各级的最优控制，计算过程由末级开始，得到最优控制序列：$u(N)$，$u(N-1)\cdots u(0)$，再将已知的初始条件x_0和求得的$u(0)$代入系统方程（4·1），可得到$x(1)=f[x_0,u(0),0]$，再根据求得的$x(1)$，$u(1)$可决定$x(2)\cdots$，余类推，由此得到最优轨线$x(1)$，$x(2)$，$\cdots\cdots x(N)$，下面举几个数字计算的例子来说明上述计算方法。

三、计算举例：

〈例1〉：已知系统方程和性能指标为：

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

$$J=\sum_{k=0}^{2}\left[x^2(k)+u^2(k)\right]+x^2(3)$$

假定对x、u没有约束，则递推方程为：

$$I[x(k),k]=\min_{u(k)}\left\{x^2(k)+u^2(k)+I[x(k+1),k+1]\right\}$$

最后一级 $I[x(3),3]=\min\limits_{u(3)} x^2(3)$

由于$x^2(3)$与$u(3)$无关，$x(3)$已是终端状态，所以：

$u(3)=0,\quad I[x(3),3]=x^2(3)$

下面利用递推公式，根据已知 $I[x(3),3]$，求 $I[x(2),2]$：

$$I[x(2),2]=\min_{u(2)}\left\{x^2(2)+u^2(2)+[x(3),3]\right\}$$

$$=\min_{u(2)}\left\{x^2(2)+u^2(2)+x^2(3)\right\}$$

将状态方程 $x(3)=x(2)+u(2)$ 代入上式：

$$I[x(2),2]=\min_{u(2)}\left\{x^2(2)+u^2(2)+[x(2)+u(2)]\right\}$$

将大括号｛　｝内的函数对 $u(2)$ 求导数，并令其为零：

$$\frac{\partial}{\partial u(2)}\left\{x^2(2)+u^2(2)+[x(2)+u(2)]^2\right\}=2u(2)+2[x(2)+u(2)]$$

$$=2x(2)+4u(2)=0$$

$$u(2)=-\frac{1}{2}x(2)$$

将这个结果代入到 $I[x(2),2]$ 的表达式中：

$$I[x(2),2]=x^2(2)+[-\frac{1}{2}x(2)]^2+[x(2)-\frac{1}{2}x(2)]^2=\frac{3}{2}x^2(2)$$

$$=\frac{3}{2}[x(1)+u(1)]^2$$

$I[x(1),1]$ 的递推方程为：

$$I[x(1),1]=\min_{u(1)}\left\{x^2(1)+u^2(1)+I[x(2),2]\right\}$$

$$=\min_{u(1)}\left\{x^2(1)+u^2(1)+\frac{3}{2}[x(1)+u(1)]^2\right\}$$

用相同的方法将上式最小化，可求得最优控制 $u(1)$，结果如下：

$$u(1)=-\frac{3}{5}x(1)$$

将 $u(1)=-\frac{3}{5}x(1)$ 代入 $I[x(1),1]$ 中，可得：

$$I[x(1),1]=x^2(1)+(\frac{-3}{5}x(1))^2+\frac{3}{2}[x(1)-\frac{3}{5}x(1)]^2=\frac{8}{5}x^2(1)$$
$$=\frac{8}{5}[x(0)+u(0)]^2$$

$$I[x(0),0]=\min_{u(0)}\left\{x^2(0)+u^2(0)+\frac{8}{5}[x(0)+u(0)]^2\right\}$$

用相同的方法将上式最小化，可求得最优控制 $u(0)$ 如下：

$$u(0)=-\frac{8}{13}x(0)$$
$$I[x(0),0]=\frac{21}{13}x^2(0)$$

将以上求得的最优控制和最小价值列如表1

表1

k	$u(k)$	$I[x(k),k]$
0	$-\frac{8}{13}x(0)$	$\frac{21}{13}x^2(0)$
1	$-\frac{3}{5}x(1)$	$\frac{8}{5}x^2(1)$
2	$-\frac{1}{2}x(2)$	$\frac{3}{2}x^2(2)$
3	0	$x^2(3)$

由表1可以看出，最优控制律具有以下特点：第一，$u(k)$ 是状态 $x(k)$ 的线性函数，因此可用状态的线性反馈来实现，第二，反馈系数不是常数。有了最优控制律如果用给定初始条件 $x(0)$ 就可求出 $x(k)$ 的最优轨线，下面给定：$x(0)=1$，求得最优控制和最优轨线如表2：

表2

k	最优控制	最优轨线
0	−0.615	1.000
1	−0.231	0.385
2	−0.077	0.154
3	0	0.077

〈例2〉

已知系统方程和性能指标为：

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

$$J=\sum_{k=0}^{4}\left[x^2(k)+u^2(k)\right]+2.5\left[x(5)-2\right]^2$$

约束条件为：

$$0\le x\le 2$$

$$-1\le u\le 1$$

为了处理约束条件，本例用数值计算的方法求解，为此首先得状态变量 x 和控制变量 u 量化成离散值，为了计算简单（仅仅为了说明方法，而不要求精度）取均匀坛量：$\Delta x=1$，$\Delta u=1$ 经过量化后，x，u 的可能取值分别为：

$$x\{0,1,2\}$$

$$u\{-1,0,+1\}$$

对各级所有可能的初始状态计算最小代价 $I[x(k),k]$ 和相应的最优控制 $u(k)$，计算仍旧从最后一级开始

当 $k=5$ 时，$I[x(5),5]=2.5[x(5)-2]^2$，对于所有可能的 $x(5)$ 对应的 $I[x(5),5]$ 的计算结果如表3

表 3

$x(5)$	$I[x(5),5]$
2	0
1	2.5
0	10

当 $k=4$ 时，$I[x(4),4]$ 的计算用以下递推公式：

$$I[x(4),4]=\min_{u(4)}\{x^2(4)+u^2(4)+I[x(5),5]\}$$

对所有的$x(4)$计标相应的$I[x(4),4]$，下面仅以$x(4)=1$的情况为例，将$I[x(4),4]$的计标步骤列成表4.

表4

u	$f=x+u$	$I[f,k+1]$	$C(x,u)=x^2+u^2$	$C(x,u)+I[f,k+1]$	
1	2	0	2	2	✓
0	1	2.5	1	3.5	
-1	0	10	2	12	

对所有可能的$u(4)$分别计标$x(5)=f=x(4)+u(4)$，结果是表4的第二列，表4中的第三列是表3的结果，第四列可根据给定的$x(4)$，$u(4)$计标，第五列是第三列和第四列相加的结果，最后将第五列标出的各个数值进行比较，其中数值最小者就是要求的最小代价，由表4可得：$I(1,4)=2$，与此对应的最优控制：$u(1,4)=1$。（表4中带√的行）

类似地可以标出$x(4)=2$时的最小代价$I(2,4)$和最优控制$u(2,4)$，以及$x(4)=0$时的最小代价$I(0,4)$和最优控制$u(0,4)$。

对于$k=3,2,1,0$；都可重复上述计标，这样，对应于所有阶段所有状态的最小代价和最优控制全部可以计标出来，计标的全部结果用以下的网格图可以清楚地表示出来，网格图的纵坐标表示状态，横坐标表示级数，网格上各点下端的小圆圈内的数字表示该点的最小代价各点上端所标之数表示该点应加的最优控制的数值。

利用已求出的网格点，很容易得出由任意初始状态出发的最优轨线，例如由$k=0$，$x(0)=2$出发的最优轨线可以这样计标：查网格图$k=0$，$x(0)=2$时的最优控制为$u(0)=-1$

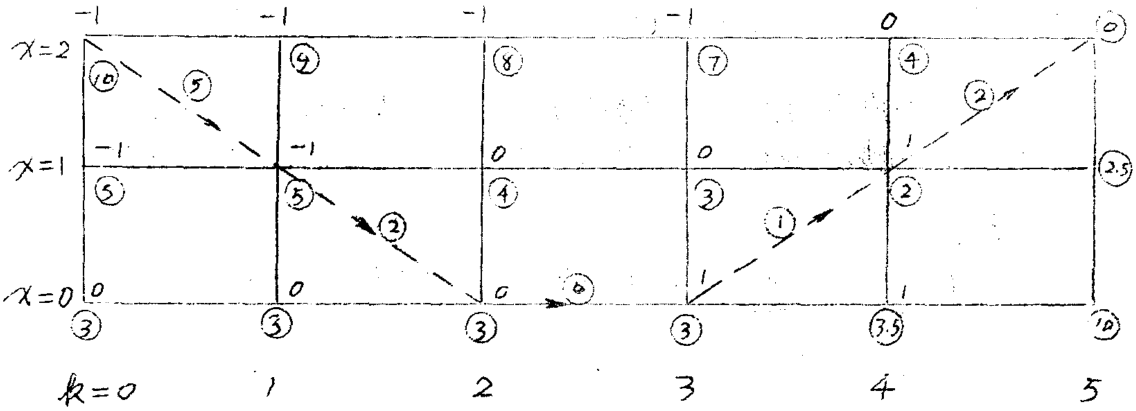

图4－3：例2网格图

所以 $k=1$ 时 $x(1)=x(0)+u(0)=2-1=1$，由网格图知此时的最优控制 $u(1)=-1$，从而又可得 $x(2)=x(1)+u(1)=1-1=0$ 余类推，各级计算结果如表5所示：

表5：

k	x	u	c（一步价值）
0	2	−1	5
1	1	−1	2
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	1	2
5	2	—	0

最优轨线也可用虚划线表示在图4－3的网格图中。

总最小代价 $I[x(0),0]=5+2+1+2=10$

对于由任意其他时刻和状态出发的最优轨线可以用类似的方法求出。

通过以上两例，读者可以初步了解如何运用动态规划法来计算系统的最优控制，通过上述计算也可体会到此法的一些优点：

1)、系统方程可以是非线性的，性能指标可以是任意的。

2). 对约束条件的处理原则上不增加计算上的困难。

3)、所得的解是全局闭环最优解。

从工程应用的观点，上述优点是很吸引人的，不过动态规划法在实际应用中也存在一些问题，这主要是：当系统状态变量的维数较高，计算最优控制所需的存储量和计算量都很大，特别是存储量常常大到现代计算机所不能处理的程度，这主要是由于现有计算机中高速存储器（磁心存储器）不够用，因为在计算过程中需要存储足够 $I[x(k), k]$ 的数据，原则上讲，对于每个量化的 $x(k)$ 值，都有一个对应的 $I[x(k), k]$ 值存在计算机的高速存储器中，假定状态向量的每一个分量化成 N_i 个不同的数值，如系统是 n 维，总共就有 n 个状态分量，那么仅存储数据 $I[x(k), k]$ 就需要占用计算机高速存储器中

$$N_h = \prod_{i=1}^{n} N_i$$

个存储单元，如果再考虑到递推计算时还需要用到后级关于 $I[x(k+1), k+1]$ 的数据，则总共所需的存储单元数就等于 $2N_h$，对于一个6维的系统，如果每一个状态变量量化成10级，即 $n=6$, $N_i=10$；所需的存储单元数就等于 $2N_h = 2\times10^6$ 这个数字已经达到现代大型电子计算机高速存储容量的极限。

由此可见，对于高维数（维数超过6）的系统直接应用动态规划在计算上还存在困难，R. Bellman 称之为"维数灾"，为了克服"维数灾"出现了一些改进的计算方法，如增量动态规划法就是其中的一种，有关这方面的内容此处就不介绍了，有兴趣的读者可参阅文献[1]

以上介绍的是动态规划的基本原理和一般的计算方法，在结束本节前再讨论一个十分重要的特例，即线性系统、二次型性能指标下的最优控制问题，应用动态规划法可以获得解析解。

四. 线性、二次最优控制：

线性、二次最优控制是指系统方程是线性的，性能指标函数是二次函数，这种特殊情况下的最优控制问题，对于这种特

殊情况，在数学上比较容易处理，而工程上的许多实际问题也可以用这种性能指标来表达，因此，这种控制方案在实际中已获得了应用，下面就研究如何用动态规划法来导出最优控制律

给定：系统方程为：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k)x(k)+\Gamma(k)u(k) \\ y(k) &= H(k)x(k) \end{aligned} \tag{4.3}$$

性能指标为：

$$J=x^T(N)Q_0x(N)+\sum_{k=0}^{N-1}\left[x^T(k)Q_1x(k)+u^T(k)Q_2u(k)\right] \tag{4.4}$$

如果讨论的是调节器问题，而且认为调节器的设定为零，则J中的第一项 $x^T(N)Q_0x(N)$ 表示与终端控制误差有关的代价，第二项 $\sum_{k=0}^{N-1}x^T(k)Q_1x(k)$ 表示与过渡过程误差有关的代价，第三项 $\sum_{k=0}^{N-1}u^T(k)Q_2u(k)$ 表示与控制能量有关的代价，以上三项在性能指标中的相对重要性由三个加权阵 Q_0、Q_1、Q_2 来决定，所以 Q_0，Q_1，Q_2 的具体数值应由设计者根据工艺要求来给定，另外，Q_1、Q_2 也可以是时变的，表示不同时刻加权阵可以取不同数值，从而就能够强调过渡过程中的不同时刻各变量的相对重要性，以上就是对二次型性能指标的工程解释。

为了使最优控制在数学上具有唯一解，要求 $Q_0\geq 0$，$Q_1\geq 0$，$Q_2>0$，理由下面再说明，（符号 $Q\geq 0$ 表示 Q 为非负定阵，$Q>0$ 表示 Q 为正定阵）令：

$$I[x(k),k]=\min_{u(k)}\left\{x^T(k)Q_1x(k)+u^T(k)Q_2u(k)+I[x(k+1),k+1]\right\}$$

假定满足以上泛函递推方程的解具有以下形式：

$$I[x(k),k]=x^T(k)S(k)x(k)$$