学校________ 班级________ 姓名________ 准考证号 | | | | | | | | （暂不填写）

密 ○ 封 ○ 装 ○ 订 ○ 线

密 封 线 内 不 要 答 题

海淀区高三年级第二学期期中练习

数　学（理科）

2004.4

题号	一	二	三						总分
			(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	
分数									

注意事项：1. 答卷前将学校、班级、姓名填写清楚．

2. 选择题的每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．其它小题用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

参考公式：

三角函数的和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　　$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　　$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

(1) 设全集为实数集 R，集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x\geq 3\}$，则　　（　　）

(A) $A\cup B=R$　(B) $\overline{A}\cup\overline{B}=R$　(C) $A\cap\overline{B}=\emptyset$　(D) $\overline{A\cup B}=\emptyset$

(2) 在三角形 ABC 中，若 $\sin C=2\cos A\sin B$，则此三角形必是　　（　　）

(A) 等腰三角形　(B) 正三角形　(C) 直角三角形　(D) 等腰直角三角形

(3) 曲线 C 在直角坐标系中的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\ y=2-2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）．若以原点为极点，x 轴正半轴为极轴，长度单位不变，建立极坐标系，则曲线 C 的极坐标方程是　　（　　）

(A) $\rho=2\cos\theta$　(B) $\rho=2\sin\theta$　(C) $\rho=4\cos\theta$　(D) $\rho=4\sin\theta$

(4) 若 p，$q\in R$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^n$ 存在的一个充分不必要条件是　　（　　）

(A) $q>p$　(B) $|p|=|q|$　(C) $q<p<0$　(D) $0<q<p$

(5) 已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，m 是平面 α 内的一条直线，则在平面 β 内　　（　　）

(A) 一定存在直线与直线 m 平行，也一定存在直线与直线 m 垂直

(B) 一定存在直线与直线 m 平行，但不一定存在直线与直线 m 垂直

(C) 不一定存在直线与直线 m 平行，但一定存在直线与直线 m 垂直

(D) 不一定存在直线与直线 m 平行，也不一定存在直线与直线 m 垂直

(6) 6 名运动员站在 6 条跑道上准备参加比赛，其中甲不能站在第一道也不能站在第二道，乙必须站在第五道或第六道，则不同排法种数共有　　（　　）

(A) 144　(B) 96　(C) 72　(D) 48

(7) 在平面直角坐标系内，将直线 l 向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后，得到直线 l'，l 与 l' 间的距离为 $\sqrt{13}$，则直线 l 的倾斜角为　　（　　）

(A) $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$　(B) $\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$　(C) $\pi-\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$　(D) $\pi-\mathrm{arctg}\frac{3}{2}$

(8) 已知函数 $f(x)=x^2+2x+1$，若存在实数 t，当 $x\in[1,m]$ 时，$f(x+t)\leq x$ 恒成立，则实数 m 的最大值为　　（　　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在题中横线上．

(9) 圆锥底面半径为 1，其母线与底面所成的角为 60°，则它的侧面积为________；它的体积为________．

(10) 函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{6}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为________；其图像的位于 y 轴右侧的对称轴从左到右分别为 l_1，l_2，l_3，…，则 l_3 的方程是________．

(11) 不等式 $4^x-\frac{1}{2}>0$ 的解集为________；若关于 x 的不等式 $4^x-2^x>a$ 的解集为 R（实数集），则实数 a 的取值范围是________．

(12) 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点坐标为________；若曲线 $x^2-my^2=1$ 有一条准线方程为 $x=2$，则实数 m 为________．

(13) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 21，其前 6 项和为 24，则其首项 a_1 为________；数列 $\{|a_n|\}$ 的前 9 项和等于________．

(14) 在平面直角坐标系中，横、纵坐标都是整数的点称为整点，到点 $P(-4,5)$ 的距离大于 2 且小于 3 的整点共有____个；将这些点按到原点的距离从小到大排列，分别记为点 P_1，P_2，P_3，…，则点 P_7 的坐标为________．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

(15)（本小题满分 12 分）

已知复平面内点 A、B 对应的复数分别是 $z_1=\sin^2\theta+i$，$z_2=-\cos^2\theta+i\cos2\theta$，

其中$\theta\in(0,2\pi)$，设$\overrightarrow{AB}$对应的复数为z．

（Ⅰ）求复数 z；

（Ⅱ）若复数 z 对应的点P 在直线$y=\frac{1}{2}x$ 上，求 θ 的值．

(16)（本小题满分 15 分）

如图，四棱锥 $P—ABCD$ 的底面是正方形，

$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AD=2$，

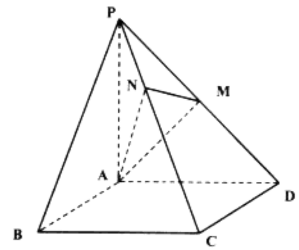
点 M、N 分别在棱PD、PC 上，

且 $PC\perp$平面 AMN．

（Ⅰ）求证：$AM\perp PD$；

（Ⅱ）求二面角 $P—AM—N$ 的大小；

（Ⅲ）求直线 CD 与平面AMN 所成角的大小．



密 ○ 封 ○ 装 ○ 订 ○ 线

密 封 线 内 不 要 答 题

(17)(本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_2=a$（a 为常数），

且 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$　　其中 $n=1, 2, 3, \cdots$.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 是等比数列，试求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式；

（Ⅱ）当 $\{b_n\}$ 是等比数列时，甲同学说：$\{a_n\}$ 一定是等比数列；

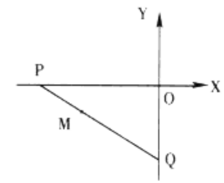
乙同学说：$\{a_n\}$ 一定不是等比数列．你认为他们的说法是否正确？为什么？

(18)(本小题满分 13 分)

在平面直角坐标系中，长度为 6 的线段 PQ 的一个端点 P 在射线 $y=0$（$x\leqslant 0$）上滑动，另一端点 Q 在射线 $x=0$（$y\leqslant 0$）上滑动，点 M 在线段 PQ 上，且 $\dfrac{PM}{MQ}=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求点 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）若点 M 的轨迹与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，求四边形 $OAMB$ 面积的最大值（其中 O 是坐标原点）.



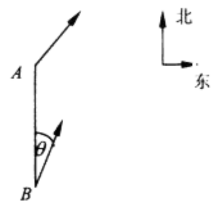
(19)（本小题满分 13 分）

甲船由 A 岛出发向北偏东 45°的方向作匀速直线航行，速度为 $15\sqrt{2}$ 浬/小时，在甲船从 A 岛出发的同时，乙船从 A 岛正南 40 浬处的 B 岛出发，朝北偏东 θ

（$\theta = arctg\ \frac{1}{2}$）的方向作匀速直线航行，速度为 $10\sqrt{5}$ 浬/小时．（如图所示）

（Ⅰ）求出发后 3 小时两船相距多少浬？

（Ⅱ）求两船出发后多长时间相距最近？最近距离为多少浬？



(20)（本小题满分 13 分）

集合 A 是由适合以下性质的函数$f(x)$构成的：

对于任意的 $x>0$，$y>0$，且$x\neq y$，都有 $f(x)+2f(y)>3f(\frac{x+2y}{3})$．

（Ⅰ）试判断$f_1(x)=\log_2 x$ 及$f_2(x)=(x+1)^2$是否在集合 A 中？说明理由；

（Ⅱ）设$f(x)\in A$，且定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(1,2)$，$f(1)>\frac{3}{2}$，写出一个满足以上条件的 $f(x)$ 的解析式；并证明你写出的函数$f(x)\in A$．

高三数学（理科）第二学期期中练习
参考答案及评分标准

2004.4

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	C	A	B	C

二、填空题（每小题 5 分，其中第一空 3 分，第二空 2 分，共 30 分）

(9)　2π;　$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　(10)　12π;　$x=13\pi$

(11)　$\{x \mid x>-\frac{1}{2}\}$; $(-\infty, -\frac{1}{4})$;　　(12)　$(\pm 2, 0)$;　$-\frac{4}{3}$

(13)　9;　41　　(14)　12;　$(-6, 4)$

三、解答题（共 80 分）

(15)（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解：$z=z_2-z_1=-\cos^2\theta-\sin^2\theta+i(\cos 2\theta-1)$ ………… 3 分

$=-1-2i\sin^2\theta$ ………… 5 分

（Ⅱ）解：点 P 的坐标为 $(-1, -2\sin^2\theta)$ ………… 6 分

由点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，得　$-2\sin^2\theta=-\frac{1}{2}$. ………… 9 分

$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{4}$　则 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$.

$\because \theta\in(0, 2\pi)$　$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. ………… 12 分

(16)（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）证明：$\because ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD\perp AD$.

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore PA\perp CD$.

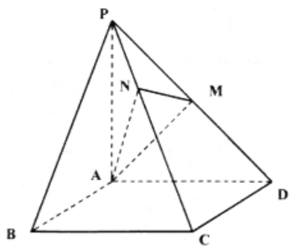
$\therefore CD\perp$ 平面 PAD ………… 3 分

$\because AM\subset$ 平面 PAD，$\therefore CD\perp AM$.

$\because PC\perp$ 平面 AMN，$\therefore PC\perp AM$.

$\therefore AM\perp$ 平面 PCD.

$\therefore AM\perp PD$. ………… 5 分



（Ⅱ）解：$\because AM\perp$ 平面 PCD（已证），

$\therefore AM\perp PM$，$AM\perp NM$.

$\therefore \angle PMN$ 为二面角 P-AM-N 的平面角． ………… 7 分

$\because PN\perp$ 平面 AMN，$\therefore PN\perp NM$.

在直角△PCD 中，$CD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，$\therefore PC=2\sqrt{3}$.

$\because PA=AD$，$AM\perp PD$，$\therefore M$ 为 PD 的中点，$PM=\frac{1}{2}PD=\sqrt{2}$

由 Rt△PMN∽Rt△PCD，得

$\therefore MN=\frac{CD\cdot PM}{PC}$.

$\therefore \cos(\angle PMN)=\frac{MN}{PM}=\frac{CD}{PC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle PMN=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 10 分

即二面角 $P-AM-N$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅲ）解：延长 NM，CD 交于点 E.

$\because PC\perp$ 平面 AMN，$\therefore NE$ 为 CE 在平面 AMN 内的射影

$\therefore \angle CEN$ 为 CD（即 CE）与平面 AMN 所成的角． ………… 12 分

$\because CD\perp PD$，$EN\perp PN$，$\therefore \angle CEN=\angle MPN$.

在 Rt△PMN 中，

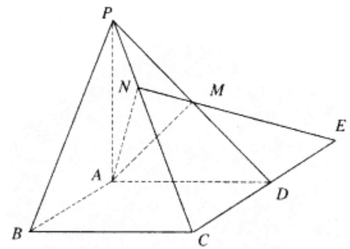
$\sin(\angle MPN)=\frac{MN}{PM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because \angle MPN\in(0, \frac{\pi}{2})$

$\therefore \angle MPN=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore CD$ 与平面 AMN 所成的角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

………… 15 分



(17)（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=1$，$a_2=a$，

$\therefore a\neq 0$，$a_n=a^{n-1}$. ………… 2 分

又 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$　则 $b_1=a_1\cdot a_2=a$，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}=a^2$

………… 5 分

即 $\{b_n\}$ 是以 a 为首项，a^2 为公比的等比数列．

$\therefore S_n=\begin{cases} n, & (a=1) \\ -n, & (a=-1) \\ \frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2}, & (a\neq\pm 1) \end{cases}$ ………… 9 分

（Ⅱ）甲、乙两个同学的说法都不正确．理由如下： ………… 10 分

解法一：设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q$ 且 $a\neq 0$

又 $a_1=1$，$a_2=a$，

a_1，a_3，a_5，…，a_{2n-1}，… 是以 1 为首项，q 为公比的等比数列，

a_2，a_4，a_6，…，a_{2n}，…是以 a 为首项，q 为公比的等比数列．

…………………………………… 11 分

即 $\{a_n\}$ 为：1，a，q，aq，q^2，aq^2，… …………………………… 12 分

当 $q=a^2$ 时，$\{a_n\}$ 是等比数列；

当 $q\neq a^2$ 时，$\{a_n\}$ 不是等比数列． …………………………… 14 分

解法二：$\{a_n\}$ 可能是等比数列，也可能不是等比数列．举例说明如下：

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q

（1）取 $a=q=1$ 时，$a_n=1$（$n\in N$），此时 $b_n=a_na_{n+1}=1$，

$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是等比数列． …………………………… 11 分

（2）取 $a=2$，$q=1$ 时，$a_n=\begin{cases}1 & (n\text{ 为奇数})\\ 2 & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$，$b_n=2$，（$n\in N$）．

所以 $\{b_n\}$ 是等比数列，而 $\{a_n\}$ 不是等比数列． …………………………… 14 分

（18）（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：设点 P、Q、M 的坐标分别是 P（x_1，0）、Q（0，y_1）、M（x，y）其中 $x_1\leqslant 0$，$y_1\leqslant 0$， 依条件可得 $x_1^2+y_1^2=36$（＊） …………………………… 2 分

又依 $\lambda=\dfrac{PM}{MQ}=\dfrac{1}{2}$，得 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1}{1+\frac{1}{2}}\\ y=\dfrac{\frac{1}{2}y_1}{1+\frac{1}{2}}\end{cases}$ …………………………… 4 分

将 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}x\\ y_1=3y\end{cases}$ 代入（＊）式，得 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ （x，$y\leqslant 0$） …………………………… 7 分

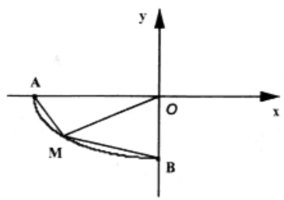
即点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$（$x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$）

（Ⅱ）解：设 M 点的坐标是

（$4\cos\alpha$，$2\sin\alpha$） 其中 $0\leqslant\alpha<2\pi$

依条件 $\begin{cases}4\cos\alpha<0\\ 2\sin\alpha<0\end{cases}$

得 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ …………………………… 9 分



$S_{四边形OAMB}=S_{\triangle OAM}+S_{\triangle OBM}$

而 $S_{\triangle OAM}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|y_M|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot|2\sin\alpha|=-4\sin\alpha$

$S_{\triangle OBM}=\dfrac{1}{2}|OB|\cdot|x_M|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot|4\cos\alpha|=-4\cos\alpha$

$\therefore S_{四边形OAMB}=-4(\sin\alpha+\cos\alpha)$ …………………………… 11 分

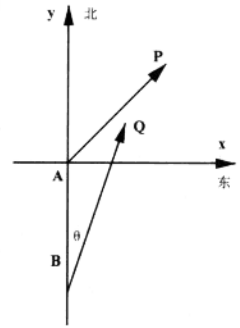
$=-4\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 4\sqrt{2}$

仅当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，四边形 $OAMB$ 的面积有最大值 $4\sqrt{2}$．

…………………………… 13 分

（19）（本小题满分 13 分）

解：以 A 为原点，BA 所在直线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系．



设在 t 时刻甲，乙两船分别在 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）．

则 $\begin{cases}x_1=15\sqrt{2}t\cos 45^\circ=15t\\ y_1=x_1=15t\end{cases}$ …………………………… 2 分

由 $\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ 可得，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$x_2=10\sqrt{5}t\sin\theta=10t$

$y_2=10\sqrt{5}t\cos\theta-40=20t-40$ …………………………… 5 分

（Ⅰ）令 $t=3$，P、Q 两点的坐标分别为

（45，45），（30，20）．

$|PQ|=\sqrt{(45-30)^2+(45-20)^2}=\sqrt{850}=5\sqrt{34}$．

即两船出发后 3 小时时，相距 $5\sqrt{34}$ 浬． …………………………… 8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）的解法过程易知：

$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(10t-15t)^2+(20t-40-15t)^2}$ …………………………… 10 分

$=\sqrt{50t^2-400t+1600}=\sqrt{50(t-4)^2+800}\geqslant 20\sqrt{2}$

$\therefore$ 当且仅当 $t=4$ 时，$|PQ|$ 的最小值为 $20\sqrt{2}$． …………………………… 13 分

即两船出发 4 小时时，相距 $20\sqrt{2}$ 浬为两船最近距离．

（20）（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）解：取 $x=1$，$y=4$ 则

$f_1(1)+2f_1(4)=\log_2 1+2\log_2 4=\log_2 16$，

$3f_1\left(\dfrac{1+2\times 4}{3}\right)=3\log_2\dfrac{9}{3}=\log_2 27>\log_2 16$

$\therefore f_1(x)+2f_1(y)<3f_1\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)$ …………………………… 3 分

$\therefore f_1(x)\notin A$

任取 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq y$，研究

$f_2(x)+2f_2(y)-3f_2\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)=(x+1)^2+2(y+1)^2-3\left(\dfrac{x+2y}{3}+1\right)^2$

$=\frac{2}{3}(x-y)^2>0$

$\therefore f_2(x)+2f_2(y)>3f_2\left(\frac{x+2y}{3}\right)$.

$\therefore f_2(x)\in A$ ………………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）设函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+1$，$x\in(0,+\infty)$，满足其值域为 $(1,2)$

且 $f(1)=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$ ………………………………………………………… 9 分

又任意取 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq y$ 则

$$
\begin{aligned}
f(x)+2f(y)&=\left(\frac{2}{3}\right)^x+1+2\left(\frac{2}{3}\right)^y+2=\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\left(\frac{2}{3}\right)^y+3\\
&=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{2}{3}\right)^y+3>3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2y}}+3\\
&=3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}}+1\right]\\
&=3f\left(\frac{x+2y}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore f(x)\in A$ ………………………………………………………… 13 分

（囿于篇幅，若有其它正确解法请按相应步骤给分．）