

机械原理电算程序设计

焦作矿业学院机械设计教研室

一九九四年八月

前 言

本教材是为了配合《计算机辅助设计》课程而编写的。因该课程教学时数有限,故本着少而精的原则,我们仅编写了平面连杆机构的运动分析、动力分析和平面连杆机构的运动设计、凸轮机构的运动设计的某些内容。程序用 BASIC 语言编写,并在 IBM-PC 微机上通过。

由于时间仓促和水平有限,错误和缺点在所难免,请读者不吝指正。

编者

1994、8

目 录

第一章 平面连杆机构的运动分析	(1)
§ 1-1 曲柄滑块机构的运动分析	(1)
§ 1-2 导杆机构的运动分析	(8)
§ 1-3 铰链四杆机构的运动分析	(13)
§ 1-4 六杆机构的运动分析	(19)
第二章 平面连杆机构的动力分析	(29)
§ 2-1 铰链四杆机构的动态静力分析	(29)
§ 2-2 六杆机构的动态静力分析	(36)
第三章 平面连杆机构的运动设计	(48)
§ 3-1 连杆平面精确通过三个指定位置的设计方法	(48)
§ 3-2 两连架杆三个位置精确对应的设计方法	(56)
第四章 凸轮机构的运动设计	(60)
§ 4-1 从动件常用运动规律	(60)
§ 4-2 用解析法设计凸轮轮廓	(67)
§ 4-3 压力角及基圆半径的确定	(72)

第一章 平面连杆机构的运动分析

平面连杆机构的运动分析的方法,分为图解法和解析法。图解法的优点是几何意义比较清楚,易于发现错误,也能满足一般工程实际的精度要求,并能应用于一些较复杂的机构。但作图工作繁琐,作图误差难于控制,不仅费时较多,也不便于把机构的分析问题和机构的综合问题联系起来,以选择最佳的综合方案。解析法的特点是把机构问题进一步从数学上进行深化分析,建立数学模型,计算求解,因而精确度很高。尽管解析法计算比较繁琐,但借助于电子计算机,可以获得满意的结果。此外,通过解析法可建立各种运动参数和机构尺度参数的函数关系式,这更便于对机构进行深入的研究。因此,随着电子计算机的普及,解析法已被逐渐广泛采用。解析法可利用向量运算,复数运算、矩阵运算等方法进行。这里,仅介绍向量运算法。

用解析法作机构运动分析的内容,包括位移分析、速度分析和加速度分析三个方面的内容,而关键问题是建立位移方程式。至于速度和加速度,由于都是利用位移方程式对时间求导一次和两次后解方程而得到的,因此,较为容易解决。下面以几种常见的连杆机构为例来说明如何运用解析法进行机构的运动分析。

§ 1-1 曲柄滑块机构的运动分析

在图 1-1 所示的曲柄滑块机构中,已知曲柄 1 的长度 l_1 、转角 φ_1 、等角速度 ω_1 以及连杆 2 的长度 l_2 。要求确定连杆的转角 φ_2 、角速度 ω_2 和角加速度 ε_2 ,以及滑块的位置 x_c 、速度 v_c 和加速度 a_c 。

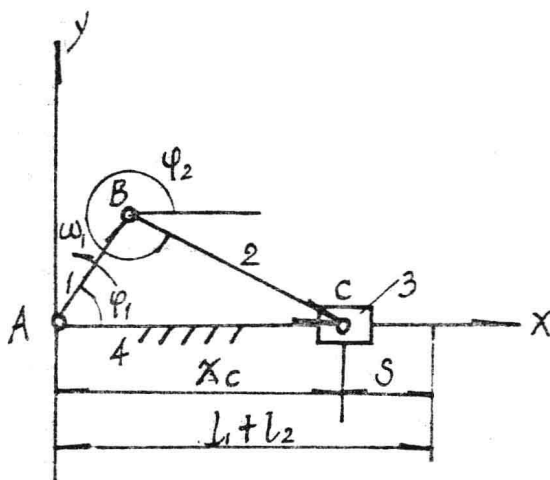


图 1-1

一、数学模型

从图 1-1 中不难看出,当曲柄长度 l_1 及连杆长度 l_2 确定之后,连杆转角 φ_2 、角速度 ω_2 和角加速度 ε_2 ,以及滑块位置 x_c 、速度 v_c 和加速度 a_c 都是随着曲柄转角 φ_1 变化而变化的。因

此,只要找出它们之间的函数关系就可以求解。用向量运算的方法,写出机构的封闭向量多边形在 x, y 坐标轴上的投影方程式,建立各运动参数与各杆尺寸间的解析关系,以求解未知的运动参数。

1、建立向量方程式

在建立向量方程式前,应首先选定直角坐标系。选取以 A 为原点,以滑块的导路 AC 为 X 轴的直角坐标系 XAY 。接着,选取各杆的向量方向及转角。对与机架相铰接的杆件,在标向量方向时,建议由固定铰链向外,这样便于标出转角。转角 φ 的正负,规定以 X 轴正向为基准,逆时针方向转动为正,反之为负。对向量的指向和各杆的转角作这样的规定,是便于明确在循环运算中各杆对直角坐标系的相对位置,并在解向量方程式时,自行形成正负号。如图所示,该机构的封闭向量方程式为:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{x}_c$$

将上式分别投影到 x, y 轴上得:

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = x_c \quad (A)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (B)$$

2、求连杆 2 的转角 φ_2 、角速度 ω_2 和角加速度 ε_2

由(B)式可得:

$$\sin \varphi_2 = -\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1 = -\lambda \sin \varphi_1 \quad (1-1)$$

式中 $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ 为曲柄与连杆的长度比。

由于一般微机内部只装有反正切函数,故 $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2}}$ 。

$$\therefore \varphi_2 = \arctg(\sin \varphi_2 / \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2}) \quad (1-1')$$

将式(1-1)对时间 t 求导得连杆 2 的角速度 ω_2 为:

$$\omega_2 = -\lambda \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cdot \omega_1 \quad (1-2)$$

再将式(1-2)对时间 t 求导,即得连杆 2 的角加速度 ε_2 为:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = -\lambda \omega_1 \frac{-\omega_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \omega_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2}$$

然后将式(1-1)和(1-2)及 $\cos^2 \varphi_2 = 1 - \sin^2 \varphi_2 = 1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1$ 代入上式并化简后得:

$$\varepsilon_2 = \lambda \omega_1^2 - \frac{\sin \varphi_1}{\cos^3 \varphi_2} (1 - \lambda^2) \quad (1-3)$$

3、求滑块 3 的位移 S 、速度 v_c 和加速度 a_c

当需要计算滑块 3 的运动参数时,可先利用(A)式求出 x_c 。我们假定,当 $\varphi_1 = 0$ 时,滑块在右极端位置为其位移 S 的起始点,即 $S = 0$,当 φ_1 以逆时针向转动时,滑块向左移动,位移 S 逐渐增大。这样,即滑块位移 S 正方向向左,滑块 3 的位移为:

$$S = (l_1 + l_2) - x_c = l_1(1 - \cos \varphi_1) + l_2(1 - \cos \varphi_2) \quad (1-4)$$

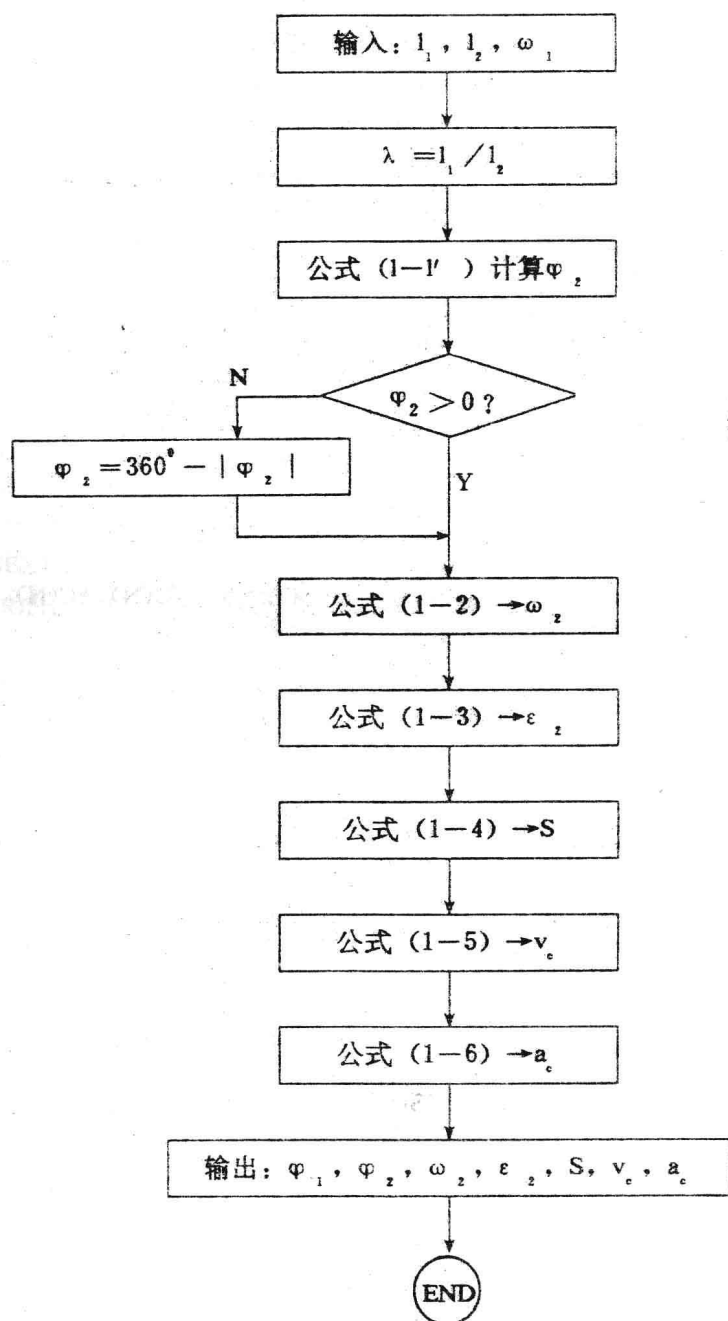
再将上式对时间求一次和两次导数并简化后,即得滑块 3 的速度 v_c 和加速度 a_c 为:

$$v_c = l_1 \omega_1 \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2} \quad (1-5)$$

$$a_c = l_1 \omega_1^2 \left[\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2} + \lambda \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^3 \varphi_2} \right] \quad (1-6)$$

注意,与滑块位移的正方向相一致,滑块往左运动,其速度为正。

二、框图设计



三、程序及计算结果

程序 1-1 为根据框图编制的程序。本程序中, $l_1=0.1\text{m}$, $l_2=0.33\text{m}$, $n_1=1500$ 转/分。
程序中的变量说明:

$L1=l_1$	$W2=\omega_2$
$L2=l_2$	$E2=\varepsilon_2$
$W1=\omega_1$	$S=s$
$R=\lambda$	$VC=v_c$
$P1=\varphi_1(\text{度})$	$AC=a_c$
$P2=\varphi_2(\text{度})$	
$F1=\varphi_1(\text{弧度})$	
$F2=\varphi_2(\text{弧度})$	

程序 1-1

```
5  REM Kinematic Anaiysis for the Slider—Crank Mechanism
10  READ N,L1,L2
15  DATA 12,0.1,0.33
20  W1=(1500/60)*2*3.14159
25  DIM P1(N),F1(N),P2(N),F2(N),W2(N),E2(N),S(N),VC(N),AC(N)
30  FOR J=0 TO 360 STEP 30
35  P1(J/30)=J
40  NEXT J
45  R=L1/L2
50  FOR I=0 TO N
55  F1(I)=P1(I)*3.14159/180
60  K=-R*SIN(F1(I))
65  F2(I)=ATN(K/SQR(1-K*K))
70  P2(I)=F2(I)*180/3.14159
75  IF P2(I)>0 THEN 85
80  P2(I)=360+P2(I)
85  W2(I)=-(R*W1*COS(F1(I)))/COS(F2(I))
90  E2(I)=(R*W1^2*(1-R^2)*SIN(F1(I)))/((COS(F2(I)))^3)
95  S(I)=L1*(1-COS(F1(I)))+L2*(1-COS(F2(I)))
100 VC(I)=(L1*W1*SIN(F1(I)-F2(I)))/COS(F2(I))
105 A=L1*W1^2*R*((COS(F1(I)))^2)/((COS(F2(I)))^3)
110 AC(I)=(L1*W1^2*COS(F1(I)-F2(I)))/COS(F2(I))+A
115 NEXT I
120 PRINT "P1(I)","P2(I)","W2(I)"
```

```

125 FOR I=0 TO N
130 PRINT P1(I),P2(I),W2(I)
135 NEXT I
136 PRINT "E2(I)","S(I)"
137 FOR I=0 TO N
138 PRINT E2(I),S(I)
139 NEXT I
140 PRINT "VC(I)","AC(I)"
140 FOR I=0 TO N
142 PRINT VC(I),AC(I)
143 NEXT I
144 PRINT
145 PRINT "S-P1"
146 FOR J=0 TO 360 STEP 30
150 I=J/30
155 PRINT J;
160 PRINT TAB(25+90 * S(I));" * "
165 NEXT J
168 PRINT
169 PRINT "VC-P1"
170 FOR J=0 TO 360 STEP 30
175 I=J/30
180 PRINT J;
185 PRINT TAB(25+VC(I));" * "
190 NEXT J
193 PRINT
194 PRINT "AC-P1"
195 FOR J=0 TO 360 STEP 30
200 I=J/30
205 PRINT J;
210 PRINT TAB(25+0.005 * AC(I));" * "
215 NEXT J
220 END

```

RUN

P1(I)	P2(I)	W2(I)
0	360	-47.59985
30	351.2853	-41.70416
60	344.7856	-24.66443

90	342. 3603	-6. 33141E-05
120	344. 7856	24. 66433
150	351. 2852	41. 70411
180	360	47. 59985
210	8. 714704	41. 70422
240	15. 2144	24. 66453
270	17. 63972	1. 899423E-04
300	15. 21446	-24. 66424
330	8. 714824	-41. 70404
360	8. 803353E-05	-47. 59985
E2(I)	S(I)	
0	0	
3515. 543	1. 720727E-02	
6544. 986	6. 156625E-02	
7845. 865	. 1155161	
6544. 998	. 1615662	
3515. 558	. 1904123	
1. 721482E-02	. 2	
-3515. 528	. 1904125	
-6544. 974	. 1615666	
-7845. 863	. 1155167	
-6545. 009	6. 156674E-02	
-3515. 578	1. 720764E-02	
-3. 442964E-02	-1. 192093E-08	
VC(I)	AC(I)	
0	3215. 093	
9. 939174	2528. 374	
15. 73948	860. 6022	
15. 70796	-784. 5834	
11. 4675	-1606. 796	
5. 768788	-1745. 284	
2. 85873E-05	-1719. 701	
-5. 768737	-1745. 284	
-11. 46745	-1606. 8	
-15. 70793	-784. 596	
-15. 7395	860. 586	
-9. 939265	2528. 36	
-1. 021154E-04	3215. 093	

S-P1

0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360



VC-P1

0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360



AC-P1

0
30
60
90
120
150



180

210

240

270

300

330

360

OK

§ 1-2 导杆机构的运动分析

在图 1-2 所示的导杆机构中,已知曲柄长度 l_2 、转角 φ_2 、等角速度 ω_2 及中心距 l_1 ,要求确定曲柄每隔 30° 位置时导杆的转角 φ_4 、角速度 ω_4 和角加速度 ε_4 ,以及滑块在导杆上的位置 S ,滑动速度 $V_{C_3C_4}$ 及加速度 $a_{C_3C_4}$ 。

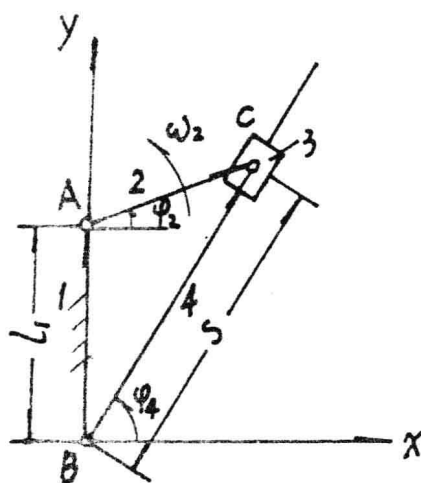


图 1-2

一、数学模型

1、建立向量方程式

选取以 B 为原点的直角坐标系 XBY。如图所示,该机构的封闭向量方程式为:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{s}$$

将向量方程式分别投影到 y、x 轴上得:

$$l_1 + l_2 \sin \varphi_2 = s \cdot \sin \varphi_4 \quad (\text{A})$$

$$l_2 \cos \varphi_2 = s \cdot \cos \varphi_4 \quad (\text{B})$$

2、解向量方程式,求出未知参数。

将(A)、(B)两式相除,则得

$$\tan \varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}$$

$$\varphi_4 = \arctg \frac{l_1 + l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2} \quad (1-7)$$

在 $\triangle ABC$ 中,根据余弦定理得:

$$\begin{aligned} s^2 &= l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(90^\circ + \varphi_2) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \varphi_2 \\ s &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \sin \varphi_2} \end{aligned} \quad (1-8)$$

将(A)、(B)两式对时间求导得:

$$\left. \begin{aligned} l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 &= s \omega_4 \cos \varphi_4 + V_{c_3 c_4} \sin \varphi_4 \\ -l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 &= -s \omega_4 \sin \varphi_4 + V_{c_3 c_4} \cos \varphi_4 \end{aligned} \right\} \quad (C) \quad (1-9)$$

将XBY坐标轴绕B点逆时针向转 φ_4 角,则由(C)式可得:

$$\begin{aligned} l_2 \omega_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) &= s \omega_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_4) + V_{c_3 c_4} \sin(\varphi_4 - \varphi_4) \\ -l_2 \omega_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) &= -s \omega_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_4) + V_{c_3 c_4} \cos(\varphi_4 - \varphi_4) \\ \therefore \omega_4 &= \frac{l_2 \omega_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4)}{s} \end{aligned} \quad (1-10)$$

将(C)式对时间求导数得:

$$\begin{aligned} -l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 &= -s \omega_4^2 \sin \varphi_4 + \varepsilon_4 s \cos \varphi_4 + V_{c_3 c_4} \omega_4 \cos \varphi_4 + V_{c_3 c_4} \omega_4 \cos \varphi_4 + a_{c_3 c_4}^t \sin \varphi_4 \\ -l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 &= -s \omega_4^2 \cos \varphi_4 - \varepsilon_4 s \sin \varphi_4 - V_{c_3 c_4} \omega_4 \sin \varphi_4 - V_{c_3 c_4} \omega_4 \sin \varphi_4 + a_{c_3 c_4}^t \cos \varphi_4 \end{aligned}$$

将XBY坐标轴绕B点逆时针向转 φ_4 角,则上式可得:

$$\begin{aligned} -l_2 \omega_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) &= -s \omega_4^2 \sin(\varphi_4 - \varphi_4) + \varepsilon_4 s \cos(\varphi_4 - \varphi_4) + 2V_{c_3 c_4} \omega_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_4) \\ &\quad + a_{c_3 c_4}^t \sin(\varphi_4 - \varphi_4) \\ -l_2 \omega_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) &= -s \omega_4^2 \cos(\varphi_4 - \varphi_4) - \varepsilon_4 s \sin(\varphi_4 - \varphi_4) - 2V_{c_3 c_4} \omega_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_4) \\ &\quad + a_{c_3 c_4}^t \cos(\varphi_4 - \varphi_4) \\ \therefore \varepsilon_4 &= -\frac{2V_{c_3 c_4} \omega_4 + l_2 \omega_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{s} \end{aligned} \quad (1-11)$$

$$a_{c_3 c_4}^t = s \omega_4^2 - l_2 \omega_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) \quad (1-12)$$

式中: $2V_{c_3 c_4} \omega_4 = a_{c_3 c_4}^t$ 为哥氏加速度。

通过以上分析归纳,我们得到了求解未知数 φ_4 、 ω_4 、 ε_4 和 s 、 $V_{c_3 c_4}$ 、 $a_{c_3 c_4}^t$ 的六个公式。

二、框图设计

1、用计算机解题时需要注意的问题

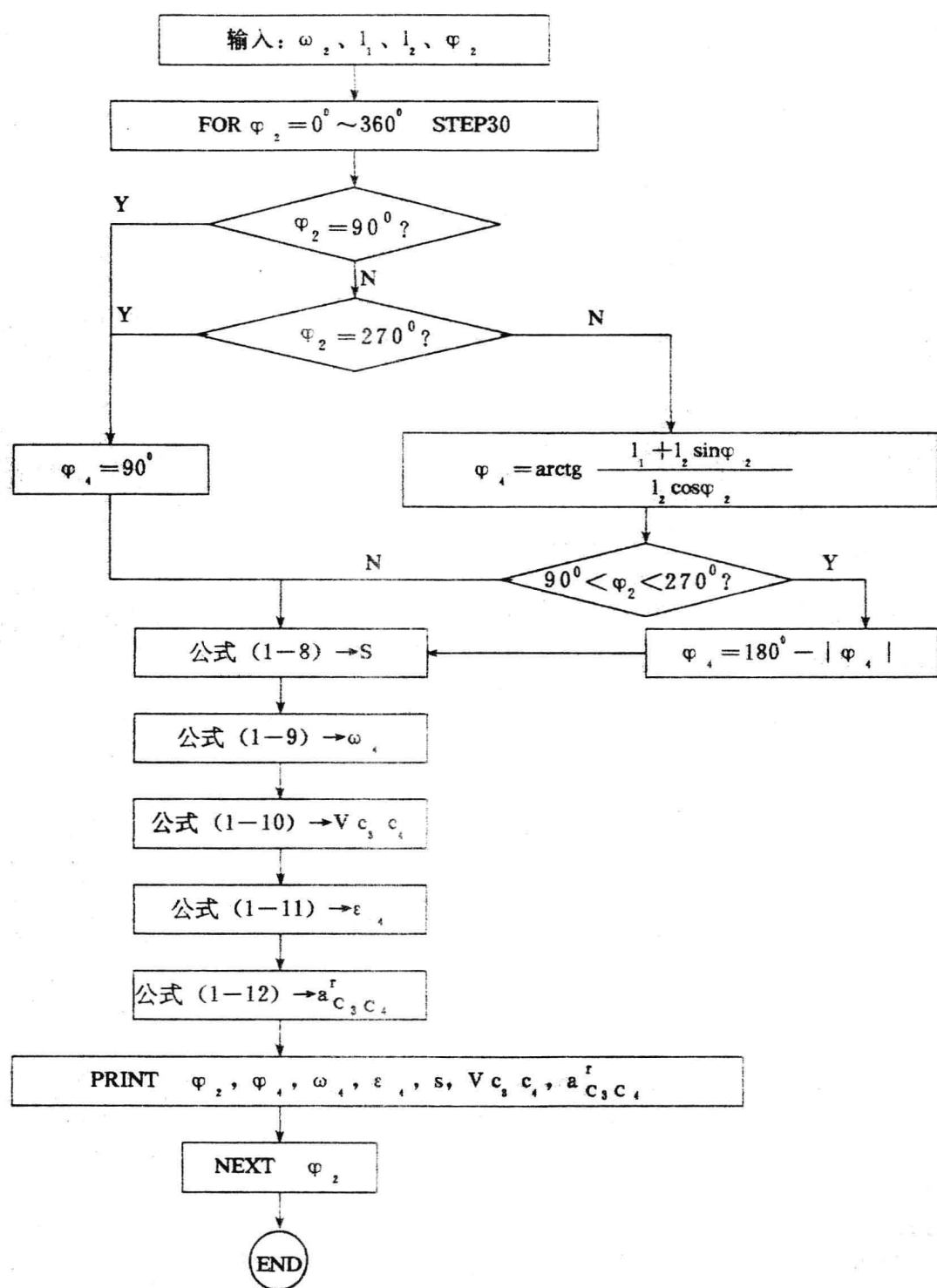
关于设计过程中各个参数的求解顺序,可按前面分析归纳的次序,用公式(1-7)至(1-12)依次求出 φ_4 、 s 、 ω_4 、 $V_{c_3 c_4}$ 、 ε_4 、 $a_{c_3 c_4}^t$ 来,但在用计算机解题时,有二点需要注意:

(1)在求解 φ_4 的公式(1-7)中,如果 $\varphi_2 = 90^\circ$ 或 270° 时,分母 $l_2 \cos \varphi_2$ 为零,这时 φ_4 角均为 90° ,但计算机不能执行被零除的数,所以在这里就要利用条件转移语句对 φ_4 角进行判断控制转移,使得当 φ_2 等于 90° 或 270° 时, φ_4 等于 90° 。

(2)当 $90^\circ < \varphi_2 < 270^\circ$ 时, $\tan \varphi_4 < 0$,计算机给出的 φ_4 小于零,所以,还应对 φ_4 作如下处理:

如果 $90^\circ < \varphi_2 < 270^\circ$,则令 $\varphi_4 = 180^\circ - |\varphi_4|$

2、框图



三、程序及计算结果

本程序中 $l_1 = 0.12\text{m}$, $l_2 = 0.06\text{m}$;

$$\omega_2 = 30\text{rad/sec}$$

变量说明:

$$W2 = \omega_2$$

$$L2 = l_2$$

$$L1 = l_1$$

$$P2 = \varphi_2(\text{度})$$

$$P4 = \varphi_4(\text{度})$$

$$S = s$$

$$W4 = \omega_4$$

$$VR = V_{a_3 e_4}$$

$$E4 = \varepsilon_4$$

$$AR = a_{a_3 e_4}^T$$

$$F2 = \varphi_2(\text{弧度})$$

$$F4 = \varphi_4(\text{弧度})$$

程序 1-2

```

5  REM Kinematic Analysis for the Guide Bar Mechanism
10 READ N,L1,L2,W2
15 DATA 12,0.12,0.06,30
20 DIM P2(N),F2(N),P4(N),F4(N),W4(N),E4(N),S(N),VR(N),AR(N)
25 FOR J=0 TO 360 STEP 30
30 F2(J/30)=J
35 NEXT J
40 FOR I=0 TO N
45 F2(I)=P2(I) * 3.14159/180
50 IF F2(I)=3.14159/2 THEN 85
55 IF F2(I)=3 * 3.14159/2 THEN 85
60 F4(I)=ATN((L1+L2 * SIN(F2(I)))/(L2 * COS(F2(I))))
65 IF F2(I)<3.14159/2 THEN 87
70 IF F2(I)<3 * 3.14159/2 THEN 87
75 F4(I)=3.14159-ABS(F4(I))
80 GOTO 87
85 F4(I)=3.14159/2
87 P4(I)=F4(I) * 180/3.14159
90 S(I)=SQR(L1^2+L2^2+2 * L1 * L2 * SIN(F2(I)))
95 W4(I)=(L2 * W2 * COS(F2(I)-F4(I)))/S(I)
100 VR(I)=-(L2 * W2 * SIN(F2(I)-F4(I)))
105 E4(I)=-((2 * VR(I) * W4(I)+L2 * W2^2 * SIN(F2(I)-F4(I)))/S(I))
110 AR(I)=(S(I) * W4(I) * W4(I))-(L2 * W2 * W2 * COS(F2(I)-F4(I)))
111 NFXI I

```

115 PRINT "P2(I)", "P4(I)", "W4(I)"

120 FOR I=0 TO N

125 PRINT P2(I), P4(I), W4(I)

130 NEXT I

135 PRINT "E4(I)", "S(I)"

140 FOR I=0 TO N

145 PRINT E4(I), S(I)

150 NEXT I

155 PRINT "VR(I)", "AR(I)"

160 FOR I=0 TO N

165 PRINT VR(I), AR(I)

170 NEXT I

RUN

P2(I)	P4(I)	W4(I)
0	63.4350024	5.99999999
30	70.8934472	8.57142723
60	80.1039607	9.68342756
90	90.0000507	10
120	99.8959903	9.68342148
150	109.106509	8.57141592
180	116.564967	5.99998728
210	119.999949	7.67754705E-05
240	113.794018	-14.2987301
270	90	30
300	66.2061997	-14.298982
330	60.0000506	-8.42760358E-05
360	63.4349416	5.9999618

E4(I)	S(I)
216	.134164079
95.4395998	.158745061
37.6879811	.174558757
8.84745425E-05	.18
-37.6881005	.174558811
-95.4397883	.158745166
-216.000133	.134164221
-519.614048	.103923234
-1144.55688	.0743589919

-7.16310521E-03

1144.56503

519.619621

216.001834

VR(I)

1.60996894

1.17837703

.618703797

1.59254177E-06

-0.618705244

-1.17837807

-1.60996937

-1.8

-1.45241953

-4.77540349E-06

1.45240986

1.8

1.60997236

.0600000001

.0743586065

.103922757

.134163794

AR(I)

-19.3196273

-29.1572533

-34.3416524

-36

-34.341652

-29.1572495

-19.3196171

-2.39362595E-05

47.1001445

108

47.1009977

2.62746677E-04

-19.3194941

§ 1-3 铰链四杆机构的运动分析

图 1-3 为一铰链四杆机构(曲柄摇杆机构)。已知:各杆长 l_1, l_2, l_3, l_4 , 原动件 1 的转角 φ_1 及等角速度 ω_1 , 要求确定连杆和摇杆的转角 φ_2, φ_3 、角速度 ω_2, ω_3 和角加速度 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 。

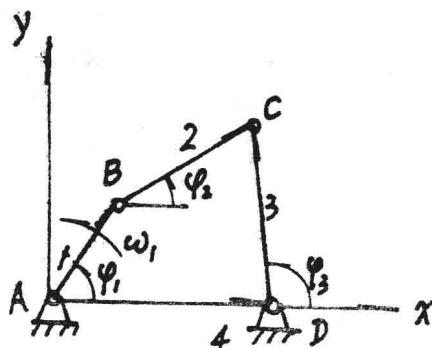


图 1-3

一、数学模型

建立封闭向量方程式。

如图,首先选定直角坐标系 XAY, 其中 A 为原点。X 轴选得与 AD 连线一致。然后,标出各杆的向量方向与转角。显然,该机构的封闭向量方程式为:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_3$$

将上式投影在 Y 轴和 X 轴上得:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_4 + l_3 \cos \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\text{令 } l_1 \sin \varphi_1 = b, \quad l_4 - l_1 \cos \varphi_1 = a$$

$$\text{则有 } \left. \begin{aligned} l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3 - b \\ l_2 \cos \varphi_2 &= l_3 \cos \varphi_3 + a \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

两边平方后相加得:

$$l_2^2 = (l_3 \sin \varphi_3 - b)^2 + (l_3 \cos \varphi_3 + a)^2 = l_3^2 - 2bl_3 \sin \varphi_3 + b^2 + 2al_3 \cos \varphi_3 + a^2$$

令

$$A = \frac{a^2 + b^2 + l_3^2 - l_2^2}{2al_3} = \frac{l_4^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 - 2l_1l_4 \cos \varphi_1}{2l_3(l_4 - l_1 \cos \varphi_1)} \quad (C)$$

$$B = \frac{b}{a} = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_4 - l_1 \cos \varphi_1} \quad (D)$$

$$\text{则得 } \cos \varphi_3 - B \sin \varphi_3 + A = 0$$

$$\text{即 } A + \cos \varphi_3 = B \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_3}$$

$$\text{平方后得 } A^2 + 2A \cos \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3 = B^2 (1 - \cos^2 \varphi_3)$$

$$\text{解得: } \cos \varphi_3 = \frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 - 4(1+B^2)(A^2 - B^2)}}{2(1+B^2)} = -\frac{1}{1+B^2} (A \pm B \sqrt{1 - A^2 + B^2})$$

$$\text{令 } \cos \varphi_3 = x, \quad \text{则 } \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$(\varphi_3)_{1,2} = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad (1-13)$$

φ_3 有两个解。应按照从动杆运动的连续性选择一个合适的解。在程序中可以这样处理:置 φ_3 的初值为零,然后在 φ_1 的循环中,每次都算出两个 φ_3 值 T1 和 T2 和前一次的 φ_3 值进行比较,如果

$$|T1 - \varphi_3| < |T2 - \varphi_3|$$

则令 $\varphi_3 = T1$; 否则, φ_3 就等于 T2。这样,就可根据运动的连续性,输出合适的 φ_3 。

由(B)式中第二式可得:

$$\cos \varphi_2 = \frac{l_3 \cos \varphi_3 + a}{l_2} = \frac{l_3 \cos \varphi_3 + l_4 - l_1 \cos \varphi_1}{l_2}$$

$$\text{令 } \cos \varphi_2 = y, \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \varphi_2 = \arctg \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad (1-14)$$

将(A)式对时间求导得:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 &= l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 \\ -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 &= -l_3 \omega_3 \sin \varphi_3 \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

将 XAY 坐标轴绕 A 点逆时针方向转 φ_2 角,则由上式后一式得:

$$\begin{aligned} l_1 \omega_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= l_3 \omega_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \therefore \omega_3 &= \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \omega_1 \end{aligned} \quad (1-15)$$

同理可得:

$$\omega_2 = \frac{-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \omega_1 \quad (1-16)$$