

S.M.P.

中學數學教程

第 1 冊

G634.6
881
1

S 017014

英國 S.M.P. 中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

BOOK 1



九章出版社 出版
製作・發行：學英文化事業有限公司

英國 S.M.P.
中學數學教程

●(中文版第一冊)●

出版者：九章出版社

製作·發行：學英文化事業有限公司

地址：羅斯福路四段52巷6號

電話：(02)3946693

印刷者：九章打字印刷行

出版日期：中華民國72年10月

定價：普及版700元整

郵政劃撥：578690 學英文化公司帳戶

英國 S.M.P. 中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

譯者：張靜馨
屠耀華
鄭建勳

編輯：孫文先

九章出版社 出版

製作・發行：學英文化事業有限公司

英國 S.M.P. 數學計劃

當 SMP 於 1961 年創立時，其主要任務是設計一套新的中學數學教程（根據 GCE 及 CSE 課程），反映現代數學之特性及應用，以比傳統的課程更適用。

現在這個任務已達成了。SMP 課本第 1~5 冊為達成“SMP O-級會考”的五年課程，第 3T, 4, 5 冊也是達成“O-級會考”的三年課程（早期的各 T 冊及 T4 冊現已作廢）。高等數學課本第 1~4 冊為達成“SMP A-級會考”的課程且 SMP 進階數學系列的 5 本小冊子包涵了“A-級會考”各章節的資料。修訂的高等數學課本第一冊改為增訂高等數學第 1~2 冊。O-級 SMP 補充數學教材有二冊。所有有關 SMP·GCE 會考的資料可向各校甄試委員會索取。

第 A-H 冊課本是為非 GCE 系統而設計的，它詳述 O-級系列前幾冊的數學課程內容。許多 CSE 甄試委員會列入考試範圍。事實上，這系列的課本非常廣泛地被各級綜合學校使用，並且，這七本書之後還有第 X、Y 及 Z 冊，它提供了達成“SMP O-級會考”的課程。將 SMP 第 A、B、C、D 冊課本中資料變通處理成 SMP 卡片 I 及 II。

各系列的課本都發行有教師手冊。SMP 另印行有各種其它的課本，歡迎教師每年向康橋大學出版部，Bentley House, 200, Euston Road, London NW12DB 免費索取，目錄備索。同樣的，各級教師若需協助或有寶貴意見，敬請示教 SMP 執行小組，Westfield College, Hampstead, London NW 37 ST。本小組備有各種年報及教案、進度表等，歡迎索閱。

在完成頭十年的工作後，建立了 SMP 將繼續進行數學課程研究的穩固磐石。其工作報告由 Bryan Thwaites 編撰成 SMP 十年回顧一書。SMP 的作者羣中，來自 40 多所學校及大學的數學家，將繼續參與這工作並設計新的課程。但是，SMP 將來的成績，仍同往常一樣，有賴於所有的教師及學生共同在課堂上惠予協助。我們誠摯地歡迎讀者給予 SMP 批評指教。

獻給全體——

中學生

家長

數學老師

青年朋友

暨關心數學教育的人士

林義雄教授序言

七年前，師範大學數學研究所開始招收第一期專修中學數學教育研究生四名。當時，為廣泛收集工業先進國家在這方面的研究工作與資料，曾先後引入德國、法國、英國、日本等國的中學教科書。經比較的結果，覺得英國給初級中學學生讀數學教科書 S.M.P. (School Mathematics Project)，劍橋大學版 (Cambridge University Press)，在觀念引入方式、文字、舉例、內容及習題等各方面皆相當靈活。於是，就把這一套書列為這些研究生必須研讀的資料之一。

這套 S.M.P. 初級教材共分五冊，每冊附有教師手冊及一些教具，供給英國初級中學 11 ~ 15 歲學童使用。編輯小組從 1961 年起開始工作，到 1965 年開始出版第一冊，至今前後已屆 20 年之久，從主、客觀因素來看，皆有很多值得我們參考、比較甚至學習的地方。

根據 S.M.P. 教科書序言，該書作者編寫本套書之用意可簡述如下：

第一：使學生初步瞭解數學本質，以及數學在現代世界上各行各業的用途，特別是學生們離開學校之後最常碰到、最常用到的部份。比如，統計、概率、綫性規劃、近似計算與其準確性衡量，電子計算機、流程圖、計算尺，以及實用數學等等。

第二：同時提供學生研讀更高階層數學理論及應用的良好基礎。除了前述應用性題材外，做為基礎性學科尚有：集合觀念、坐標（甚至三度空間），向量、矩陣、網路與組合拓撲、簡單代數結構理論（包含方程式、函數與圖形）、波動（三角學）、軌跡、變換幾何（含點、綫、面對稱、立體圖形、角度、面積、體積、平移、旋轉及幾何不變量等）、比率與極限概念。

可見取材的確很廣泛，但這是個理想，理想本身並不頂重要，最重要的是如何去實現理想！

S.M.P.是這樣做的：

傳統“舊數學”題材相當單一組織化，講一個單元（如代數、幾何等的題材）時往往一連串地講完了。S.M.P.各種題材的引入，採取了反單一組織化的路綫，徹底的拆散，再重新融合，這是它最成功最自然的地方。具體說來，編寫主要精神乃是：

1 更注意基本數學觀念的瞭解（但並不是改變數學題材內容或忽略計算、操作之能力），新材料的引入必牽涉到數學上的基本觀念、比如，關係與變換的觀念；解方程式所必須的代數結構問題（比如解 $ax=b$ 及 $AX=B$ ， a, b 為實數而 A, B 為矩陣時的異同等等），藉以增進瞭解以提供融合工具或基礎。

2 內容適合學童自然學習過程：

第一、二冊採用實驗、生活經驗、觀察、單一觀念的介紹，來收集、培養數學上初步經驗、引入基本觀念、發現規律（甚至代數上運算亦然），儘量避免不必要的觀念使用或練習。第三、四、五冊開始融合不同的觀念成為各種不同的整體（如代數、幾何等的新介紹方法及教法），第四、五冊介紹使用數學觀念及計算能力，以期掌握獲得正確數學答案的工具。

3 鼓勵教師嘗試更多更新的教學法、設計好的教具。

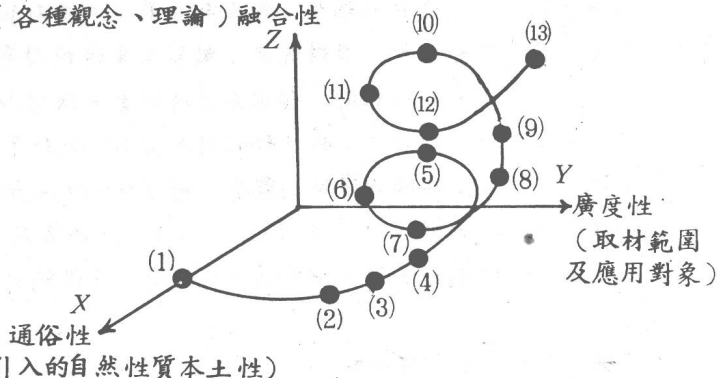
4 取材極富彈性，可以不斷地研究、改進、實驗新的觀念及融合方法、延拓等等。

至於其編寫方式，引用實例極為生活化、趣味化及本土化，務期學習者切身體會到數學觀念的通俗、無所不在以及實用性，充分表現啓發教育的特色。比方，在第一、二冊裏，練習問題多採用疑問式，由學童自己動手動腦去尋找規律，獲取答案，且其數值計算往往不是整數（而可能是分數、近似值），符合實際情況。每冊中三、五章後均有總複習題，為未來的融合性鋪路。更值得注意的，是S.M.P.認為並非題材都該“邏輯地論證”，比如幾何的引進就違反了古典歐氏幾何的方式。還有，許多數學觀念不是

馬上可以完全掌握的，S.M.P.也告訴我們應該由單一而連貫而綜合之，由淺而入深，溫故知新，慢慢地出現，結合而成。

比如，以矩陣理論的引入程序為例，可用下圖三度空間坐標來做個比：

(各種觀念、理論)融合性



- (1) II 1 (第二冊第一章) 利用倫敦鐵路網，跟世界各國主要航空站飛行路線、電路、街道、公寓房間佈置、Koenigsberg 橋、地圖着色等實際問題引入網路，並用矩陣符號形式表現之。
- (2) II 7. 將平面幾何向量表示成特殊的矩陣符號如 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ，並引入向量數量乘及加法運算。這是利用幾何事實賦與這種特殊矩陣的另一種實際意義。
- (3) III 3. 從各種網路或實際生活活動（如購物等），引入矩陣（符號）的加法運算、數量乘、乘積運算。並賦與連接向量的任務，即綫性變換的矩陣表示式。所以，矩陣本身開始有運算而且兼具轉移平行四邊形位置的函數之動態身份。
- (4) III 6. 矩陣及其運算性質，可反過來解決、解釋網路上的現象。
- (5) III 12. 如何用矩陣來形容特殊的 Shearing（切變，運動，並據此刻劃出矩陣對面積變化的初步認識。
- (6) IV 1 說明基底向量如何決定（綫性）變換。變換的組合及逆變換如何可用相對應的矩陣運算來配合。正式引入逆方陣，於是矩陣代數結構初具規範。

- (7) IV 7. 更多的網路與矩陣關係。
- (8) IV 9. 三度空間坐標，某些特殊運動（如保距、反射）等的矩陣表現式。
- (9) IV 12 向量幾何。
- (10) V 2 位移向量、速度向量，在旋轉運動（矩陣）下向量變化情況，跟三角形的關係。
- (11) V 6. 用矩陣來尋找、刻劃幾何的不變量（不動點、不變綫等）。
- (12) V 13. 幾何學（綜整理）。
- (13) V 14. 矩陣在網路、幾何的應用、以及代數結構、解聯立綫性方程組。

以上各項步驟，在洪萬生、黃文達著作的「綫性代數導引」中對某些數學理論的引進，以找到一些實證。

其他數學觀念，比如：面積與體積，三度空間觀念、變換幾何、統計、機率等等都具有類似上述螺旋式的引入方式，但其在三、四、五冊中這些螺旋線都具有必要的交點，而所有的這些螺旋線最終配合成為較嚴密較完整的數學理論及體系。

衆所周知，初中階段教育是一種義務性教育，其精神應着重於普及性，所以其教材的內容必須兼顧生活需要和素材。對此一階段的數學教育而言，其目標無非是在培養一般（中等資質）的人民對現代科技環境的理解力、判斷力和組織力，進而獲得運用現代科技的能力。為達到此一目標，S.M.P. 這套教科書的編寫方式顯然提出了很多值得借鏡的經驗，比方，它強調數學觀念的引進應該經由具體的生活經驗，以及自然和社會現象的歸納，不是純用抽象數學符號和公式來灌輸——我們深信運用觀念，而非形式的符號或公式才能真正啓發學生；而且它也一再地體現數學理論形成過程的重要性，用實例來說明科學教育的重點在於“知其所以然”，而不只在“知其然”。

要達到S.M.P. 這套教科書所標示的水平，數學教育如果不從小做起，而且缺乏一個比較完善的數學教育制度及師資訓練配合，是不可能奏效的。可惜，我們未能知道這套教科書在英國實

行的成效為何，不過它的英文原書於1965年發行第一版迄今已有16年(其中固然原經做過適當的修訂，但是基本精神和結構始終不變)，此一歷史事實至少可以反映它的存在價值。

另一方面，S.M.P.的五本書都包括將近300頁左右的篇幅，可以說是相當「厚」的。一般人或許會認為這對幼童可能造成很大的負荷。然而，這些教科書所以那麼厚，主要是啟發性材料多，而且也有足夠的附圖協助解說，如果教師能夠充分地掌握它的精神，那麼整個教學活動絕對不致於讓一般學童感覺吃力及乏味的。因此，如何編寫一套適應文化傳統、社會現代需要的數學教科書固然是一件刻不容緩的大事；但是師資訓練顯然同等重要；一部理想教材的精神和內容能否充分地傳達到學童身上，教師的數學素養是個決定性的因素！

當然S.M.P.也許並不是十全十美的，但S.M.P.這個工作小組已有20年的歷史，我們從它的整個活動可以感覺S.M.P.的成員對教育的嚴肅態度，並且深為他們有計劃、有系統的長期研究工作所折服。在此期間(包括試教)內，他們始終虛心接受批評，檢討得失並加以改進。這種知識分子以其關懷社會及下一代之良知，並結合負責任的專業精神及專業知識所做出的貢獻，從他們所做出來的規模與成就，可令人體會出他們是如何的腳踏實地、不求名、不求利、實事求是、以行動代替口號、以身作則的做事態度，絕對不是譁眾取寵或虛幌架式所能相提並論的。

屠耀華、鄭建勳、張靜馨三位老師關懷數學教育、熱心地將S.M.P.這套教科書翻譯成中文，俾供給一般大眾閱讀，其精神令人敬佩，希望他們再接再厲做出更好的貢獻，更希望社會能提供他們發揮專長的機會，並給予更多、更大的提攜與愛護。本序言內容承洪萬生先生協助修飾，特此致謝。

林義雄

1981.11.4.於臺北，師大

屠耀華老師譯序

S.M.P. 中學數學教程在數學教育界中風評甚佳。這套教材的安排極為成功，同類的題材由淺入深，適時循環，使學生學習起來感到勝任愉快，將教材螺旋式安排的功能發揮得淋漓盡致。本教程中並含有許多操作型的教材，使學生能從實際操作中獲得原理原則的雛型，而激發學習的動機。例題與習題取材的實際、廣博與鄉土是本教程的另一大特色。書中所選的例題多與日常生活息息相關，所以，英國的青少年在讀這套書時，一定感到非常親切。不過，取材富有鄉土色彩這優點，却正構成我們在看本書時唯一稍感隔閡的地方。在準備翻譯之初，本想將這些題材轉換成適合我國的形式；但如此一來，有些找不到適當代替品的題材勢必難逃被刪的命運，若因而破壞了原著的精神，反而得不償失。所以，經過再三的考慮，還是決定盡量保持原書的風貌。此外，在課文的問題及習題中，不乏深具啟發性的討論型問題。操作型教材與討論型問題的配合，賦與了讀本書時的鮮活感。一位執教於高級中學的文科老師在協助譯者校稿時，尚且讀得廢寢忘餐，興緻盎然，足見本書的吸引力。若因譯者的疏漏，而使本教程的精神和優點不能發揮，尚請專家不吝指正，並深致歉意。

張靜馨老師譯序

這是一本很好的中學數學教科書，它的優點是講解數學的方式，取材和組織。可以稱得上在「新課程」運動下的傑作。本書出版以來在英國備受佳評和廣被中學採用，是一本非常理想的教本。

譯者於民國64年在師大數學研究所，參與一項「各國高中數學教材研究計劃」，首次開始接觸英國S.M.P.教材，當時就覺得S.M.P.相當成功地實現了Bruner在「教育的過程」一書中所揭櫫的理想和要求，很值得向國人介紹。

數年之後，九章孫文先先生要我參加本套書的翻譯工作，自是欣然接受。S.M.P.具有濃厚的英國鄉土氣息，書中很多例子對國人可能是不熟悉的，對我們來說這也許是它的缺點，但是如果我們將它當作使國內中學數學教材更「中國化」的一個借鏡，這何嘗不是它的另一項優點。

張靜馨

1981、6、1

譯者簡介

屠耀華 師大數學研究所畢業，專攻數學教育，現任師大數學系講師，翻譯本書第一、二冊。

張靜馨 師大數學研究所畢業，專攻數學教育；現任彰化教育學院講師，翻譯本書第三冊。

鄭建勳 師大數學研究所畢業，專攻數學教育，現任新埔工專講師，翻譯本書第四、五冊。

誌 謝

本書插圖是 (Cecil Keeling) 所畫。

本計劃感謝牛津和劍橋中學考試委員會允許使用 S.M.P. 初級數學考試中的例子。

在籌畫出版本書時我們受到劍橋大學出版部鼎力的支援和協助。

本計劃幸虧有秘書 A. J. Freeman 小姐，和 M. Z. Anfrews 小姐與楊太太為本書悉心的打字。

第一冊 序言

這是涵蓋了英國初級文憑考試中基礎數學一科所有內容的 S.M.P. 教程全套 5 冊中的第 1 冊；換句話說，這是為剛踏入中學的學生所編寫的一本書，讀完這本書的學生可以繼續讀第 2、3、4、5 冊，以完成初級的課程；如果他們想要繼續學數學，可以接着讀全套 4 冊的 S.M.P. 高等數學教程，以達到高級文憑考試的水準，或讀另外兩冊附加數學的課本，以幫助他們準備 S.M.P. 附加數學的考試。

在編寫這五冊中學課本時，作者們曾特別考慮到那些讀完初級課程後就不再學數學的學生的需要；這套書的目標是讓這一類的學生認識數學的本質，和數學在這現代世界中的用途；不過，這套課本也同時是為那些還想把數學讀得更好的學生而設計的，因為整個初級的課程也就是學習高級課程所必要的初步準備。

與傳統的課本比較，這一套課本比較注重基本觀念的瞭解，但內容的改變並不是我們的全部目標，我們還希望這課本比平常的更適合學生學習的心路歷程，並希望這課本能促使和激勵教師們採用新的教學法，比方說，這本書中新的每一節都由一系列的預備例題開始，誘導學生自己去發現數學的要領；而且，書中的習題非常豐富，其中有許多是特別為了幫助學生經由自己的探究中學習而設計的，當然，觀念的統整也非常重要，所以我們在一定的間隔，編入了複習題。

這本書和傳統的課本之間最顯著的差異是在內容方面，書中有許多單元以前從來沒有在初級課程中適當地出現過，更不用說中學一年級的課本了。當然，大部分通常出現在中學課程中的單元都依然被保留，只是有時候處理的方法跟傳統的不太一樣。這本書的最前面一章的主題是算術，目的是加強基本的算術運算；但我們並不是將學生在小學所學過的這部分的教材重複一遍，而工作得以擴充，這一章的另一個特色是精確比例的作圖法的介紹，這部分也可以作為第 15 章討論測量問題時的基礎工作。

第 8、10 和 13 章也都屬於幾何的範圍，第 10 章的目的並不僅僅在教一些公式，更重要的是要讓學生瞭解面積的本身，為了要達到這個目的，我們要將注意力集中在曲線所包圍的區域上，而非曲線的本身，另外，我們也要注意那些由非直線所構成的曲線所包圍的原始區域。第 13 章所談到的對稱，是一個很熟悉的概念，但有些老師可能對於如何把它在課堂中作有用的討論，和如何適當地揭示它的數學特質，並沒有豐富的經驗。其實早在 1923 年，數學學會就已經提倡增強對稱在幾何教學上所佔的地位，這個建議遲遲未能實行的原因大概是在於它不太能「嚴格地證明」，不過，反正鼓勵在初級課程中作嚴格的幾何證明並不是 S.M.P. 的方針，所以這一點對我們並沒有妨礙。這一章所討論的對稱是指對平面和直線的對稱，以及關於軸或點的旋轉對稱。我們希望從一開始就能幫助學生將三度空間形象化，三度空間的坐標早在第 3 章中已被提及過，不過，在第 8 章中，我們可以找到更多為了使學生對空間中的關係有更深入的認識所設計的例子。這裏有很多「剪剪貼貼」的工作，學生可以由自製模型中得到很大的樂趣。我們希望把這些工作視為正課的一部分，而不要把它當作學期末時用來消遣解悶的遊戲；如果這一章的娛樂價值高，那麼它的數學價值一定也不低——因為這兩者並不是成反比的。

此外，有幾章是與數有關的，在第 6 章中的數與計算並沒有直接關係。其中考慮到各種不同形式的數，如質數、正方形數和三角形數等等，這些都是為了以後所討論的數列和級數所播的種。雖然在這本書的後面，級數不會再出現，但在利用序對間的簡單關係來介紹代數關係的幾章中，都要討論到數列。在圖示線性關係之後，我們介紹了不等式的一些概念。在第 11 章中，我們把這工作推廣至由日常問題所產生的線性關係的代數式，並把它作為討論第 12 章介紹負數概念的踏腳石。本書引入負數的方法中，最值得一提的是我們對負號或減號採用了不同的表示法；在傳統是以介紹新系統的數的運算來達到我們的要求，我們不是想說明對非十進位數的運算能力本身是如何重要，我們之所以要這樣處理是因為討論這些不同進位的數能促使學生對算術的一般過程有

更正式的瞭解。在本書中，還有另外三章的主要內容與算術有關。第4章是對分數循例的一瞥；大部分的討論都包含在習題中，所以這一章可以作為自學補充課程。第9章討論小數；這一章所介紹的內容比傳統的深入，可能有些老師會認為有點超越範圍。這些老師們當然可以將嚴密的建造過程省略，但以我們的經驗，這一部分對一般程度的班級中大多數學生來說，却無疑是必要的。第14章不再介紹新的算術技巧，它的重點是在思考過程；在這一章中，我們介紹了一種以後在與計算機有關的問題中還會用到的簡單流程圖，以說明這些思考過程；本章例題的選擇以配合學生的實際經驗為原則。

當然，算術是最重要的數學工具，不過在第2和第3章中，學生們將會再遇到另外兩種強有力的工具，而且這些工具將會在這課程中一次再次地被反覆使用，第一種是集合的記號和語言，在這階段（包含未來的幾年）中，我們著重於使學生瞭解集合的語言，而非集合的理論。第2章介紹集合的基本概念，其中考慮到表示集合的各種方法，並討論兩集合間的各種可能關係，我們試着將新記號減少到最低限度；例如聯集的符號在稍後的幾冊中才會出現，而集合的構式則留到第7章才講，不過一些基本的討論其實已經隱含在文氏圖示法中。坐標是剛才提及的第二種工具，這觀念在第3章中開始介紹，我們由指出教室中或地圖上之一特定位置的問題引出坐標系的概念，在這裏，教師們會有機會把這觀念推廣到三度空間。在第三章中，像 $x=3$ 和 $y=4$ 等簡單的方程式已經與直線拉上關係，但較複雜的方程式和關係則留待第7和第11章再討論。

純粹的幾何在第5章才初次出現，這一章與傳統的課程完全不同。在這裏，角用量度轉數的說法來介紹，在定義度量之前提供了許多討論和解題的機會，角的定義使第3章對坐標的討論的課本中，這兩者是不加以區分的，乍看之下，可能會認為區分後弊多於利。不過以我們的經驗來說，事實並非如此。

書後沒有附印習題解答，這本書的每一冊都有教師手冊，手冊中除了習題解答以外，每章都另有補充資料。