（大 學 用 書）

數理統計學

（上 冊）

（機率理論與分配函數）

鄭 堯 柈 編 著

（大　學　用　書）

數理統計學

（上　册）

（機率理論與分配函數）

鄭　堯　柈　編　著

數理統計學(上)

中華民國五十六年十月初版
中華民國五十九年七月增訂版
中華民國六十四年六月改訂一版
中華民國六十六年一月增訂二版
中華民國七十年六月增訂三版

(定 價：新臺幣貳佰伍拾元)

著者兼發行人：鄭 堯 柈

直接訂購處：(1)臺北市和平東路二段118巷
2弄4號
(2)郵政劃撥儲金帳戶第1146號

序　言

本書係由著者就民國三十八年來臺後在各大學所授講義加以增刪而成，本擬名爲統計學之數理篇，現因已擴大內容，特改名爲數理統計學，使能符合課程名稱。書內之第一，二，三，五，六各章，專述作統計學理論基礎之機率論的內容，亦可單獨作講授機率論的教材；第四章略述二派次數曲線研究內容，其歷史雖較古，但在學習數理統計學者仍應加以瞭解；第七，八，九，十，十一，十二，十三等七章則爲現代數理統計學之基本部門；第十四，十五，十六各章是爲作業研究(Operations Research) 與經濟資料分析上所必要之統計理論，故特加入之。本預定尚有動態計劃 (Dynamic programming)，情報理論(Theory of information) 及 Monte-Carlo 方法等章，因限于篇幅，只有割愛，當在另書敍述。

本書內容力求理論與應用並重，特附予例解二百四十餘題，務使讀者明理即能應用，求用者觀例即能倣解，至拙著統計學推測篇內所有疑難與證明亦均在本書內一一予以解答。唯該學科內容廣泛，著者學識淺陋，錯誤之處，勢必衆多，希海內外讀者，能多予指正，則幸甚矣。

中華民國五十六年九月　　　　鄭堯柈序于政大統計學系。

增　訂　序

經過多次講授，發現書內誤植之處甚衆，茲一一將其訂正，再於書後增列各章有關之補充資料與精選問題300則並加詳解，使能充實本書內容與增進讀者興趣與瞭解。

中華民國五十九年七月　　　　著者于　國立政治大學

統計研究所

改訂版序

本書從民國五十六年出版後，經多年講授結果，深感須修正與補充之處甚衆，玆乘重印之際，特從新編寫。唯改訂後之篇幅增加太多，一册已無法全部容納，只得分割爲三册，上册包含機率理論與分配函數，按一元與多元分別敍述，仍爲原有之前面八章，只將其中之數學預備智識〃Gamma 函數與 Beta 函數〃，及〃矩陣與行列式〃二節删去。中册爲統計推理，包含推定（估計），檢定，判定（決策）三大部門；並將變異數分析及迴歸分析一併加入。下册則專述馬可夫鏈鎖與機率過程並附以排隊理論等之應用情形。

全書內容注重于公式與理論之證明，數字例題則較少列述，讀者若能與拙著〃推理統計學〃一書互相對照探討，即可依本書以瞭解後書內各公式之來源，又可觀後書以熟悉應用詳情，其閱讀效果必能倍增。

欲融會數理統計學內容，首重多做習題，本書內各章末所列習題均經精選，在書後雖已附有略解，但仍希讀者先自行求解，在不得要領時始行翻閱之。

中華民國六十四年五月　　　　著者序于台北

增訂版序

除將書內之誤植之處加以訂正外，再於書後增加各章之補遺，以增進瞭解。

中華民國六十六年一月　　　　著　者

目 錄

頁 數

第一章 基本機率理論……1－31

1.1 機率變數……1－5

1.1.1 前 言……1

1.1.2 機率變數之定義……3

1.1.3 機率變數之定理……4

1.2 事件與集合間之關係……5－6

1.2.1 事件之發生……5

1.2.2 各種事件……5

1.3 機率定義及計算方法……6－11

1.3.1 定 義……6

1.3.2 由定義直接計算機率……7

1.3.3 應用差分方程以間接計算機率……9

1.4 公理體系與定理……11－17

1.4.1 機率公理……11

1.4.2 根據上項公理可導出下列諸定理……12

1.5 全機率與Bayes 定理……17－20

1.5.1 全機率……17

1.5.2 Bayes 定理……19

1.6 獨立試行及其定理……20－25

1.6.1 獨立試行……20

1.6.2 重覆獨立試行之機率……21

1.7 幾何機率……25－27

習題一……28－31

第二章 一元機率分配……32－57

2.1 一元機率分配……32－40

2.1.1 $f(x)$ 及 $F(x)$ …… 32

2.1.2 $F(x)$ 之性質 …… 34

2.1.3 變數之變換 …… 37

2.2 $E(X)$, $V(X)$ 及動差 …… 40－53

2.2.1 希望數 …… 40

2.2.2 變異數 …… 44

2.2.3 動 差 …… 48

習題二 …… 54－57

第三章 基本的一元機率分配函數 …… 58－108

3.1 單位分配 …… 58

3.2 離散等分配 …… 58

3.3 超幾何分配 …… 59－62

3.3.1 分配式 …… 59

3.3.2 $F(n)=1$ …… 60

3.3.3 $E(X)$, $V(X)$ 及 μ_3, μ_4 …… 61

3.3.4 $\lim_{n\to\infty} h_k(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ …… 62

3.4 Bernoulli 分配 …… 63

3.5 二項分配 …… 63－68

3.5.1 分配式 …… 63

3.5.2 $E(X)$, $V(X)$ 及 Romanovsky 計算動差公式 …… 64

3.5.3 逐次計算法 …… 65

3.5.4 二項分配之加法性 …… 66

3.5.5 二項分配式與不完全 Beta 函數間之關係 …… 67

3.6 Poisson 分配 …… 68－72

3.6.1 分配式 …… 68

3.6.2 $E(X)$, $V(X)$ 及 Romanovsky 計算動差公式 …… 69

3.6.3 逐次計算法 …… 71

3.6.4 加法性 …… 71

3.6.5 Poisson 分配與不完全Gamma 函數間之關係 …… 72
3.7 幾何分配 …… 73－76
3.7.1 分配式 …… 73
3.7.2 $\sum q^{k-1} p=1$ …… 3
3.7.3 $E(X), V(X)$ …… 73
3.8 Pascal 分配或稱負二項分配 …… 74－74
3.8.1 分配式 …… 74
3.8.2 $E(X), V(X)$ …… 75
3.9 Polya-Eggenberger 分配 …… 76－80
3.9.1 Polya 壺的實驗 …… 76
3.9.2 機率質量函數 …… 77
3.9.3 $\sum \pi(x;\lambda,\rho)=1$ …… 79
3.9.4 $E(X), V(X)$ …… 80
3.10 其他的離散分配 …… 80－81
3.10.1 Beta-Binomial 分配 …… 80
3.10.2 對數分配 …… 81
3.11 等分配 …… 81－85
3.11.1 分配式 …… 81
3.11.2 $E(X), V(X)$ …… 82
3.12 三角形分配 …… 85－87
3.13 常態分配 …… 87－94
3.13.1 分配式 …… 87
3.13.2 $F(\infty)=1$ …… 87
3.13.3 標準型常態機率密度函數 …… 88
3.13.4 動 差 …… 89
3.13.5 加法性 …… 90
3.13.6 對數常態分配 …… 94
3.14 Gamma 分配 …… 94－96
3.14.1 分配式 …… 94
3.14.2 $F(\infty)=1$ …… 95

3.14.3 動 差 …… 95
3.14.4 與其他分配間之關係 …… 95
3.15 Beta 分配 …… 96—97
3.15.1 分配式 …… 96
3.15.2 動 差 …… 97
3.15.3 與其他分配之關係 …… 97
3.16 Cauchy 分配 …… 97–99
3.16.1 分配式 …… 97
3.16.2 動差不存在 …… 98
3.17 指數分配 …… 99–101
3.17.1 分配式 …… 99
3.17.2 動 差 …… 101
3.18 其他連續分配 …… 102–103
3.19 Delta 函數 …… 103–104
習題三 …… 105–108

第四章 次數曲線論 …… 109–130

4.1 前 言 …… 109
4.2 Pearson 之次數曲線研究 …… 109–121
4.2.1 微分方程式之來源 …… 109
4.2.2 各常數與動差間之關係 …… 110
4.2.3 曲線之分類 …… 112
4.2.4 次數曲線表 …… 113
4.3 Gram-Charlier 之次數曲線研究 …… 121–130
4.3.1 A 型級數 …… 121
4.3.2 B 型級數 …… 125
4.3.3 C 型級數 …… 127
習題四 …… 129–130

第五章 多元機率分配 …… 131–159

5.1　結合分配函數……………………………………… 131－132
5.2　機率密度函數……………………………………………132
5.3　邊際分配…………………………………………………132
5.4　獨立性……………………………………………… 132－133
5.5　條件分配函數……………………………………… 133－137
5.6　離散的二元機率變數上………………………… 137－140
5.7　希望數變異數及互變數………………………… 140－143
5.8　條件希望數與條件變異數……………………… 143－147
5.8.1　條件希望數……………………………………………143
5.8.2　條件變異數……………………………………………146
5.9　變數變換…………………………………………… 147－150
5.9.1　二個變數………………………………………………147
5.10　機率之四則問題………………………………… 150－155
5.10.1　加　法…………………………………………………150
5.10.2　減　法…………………………………………………152
5.10.3　乘　法…………………………………………………152
5.10.4　除　法…………………………………………………153
習題五……………………………………………………… 156－159

第六章　母函數，動差母函數，特性函數及大數法則 ….. 160－221

6.1　母函數……………………………………………… 160－163
6.1.1　定　義…………………………………………………160
6.1.2　性　質…………………………………………………162
6.2　機率母函數………………………………………… 163－164
6.2.1　定　義…………………………………………………163
6.2.2　性　質…………………………………………………164
6.3　動差母函數………………………………………… 164－170
6.3.1　定　義…………………………………………………164
6.3.2　性　質…………………………………………………166
6.4　累加率母函數……………………………………… 170－171

6.4.1 定 義……170
6.5 特性函數……171－192
6.5.1 複變數函數大意……171
6.5.2 特性函數定義……179
6.5.3 性 質……184
6.5.4 由特性函數以求機率密度函數之方法……187
6.5.5 特性函數上一定理……190
6.6 S變換……193－194
6.6.1 定 義……193
6.6.2 性 質……194
6.7 大數法則……194－202
6.7.1 Tchebycheff 不等式……194
6.7.2 大數法則……196
6.8 中央極值定理……202－212
6.8.1 定 理……202
6.8.2 Moivre-Laplace 定理……204
6.8.3 各充分條件……212
6.9 合成分配……212－215
習題六……216－221

第七章 基本的多元機率分配函數……222－250

7.1 多元分配……222－224
7.1.1 分配式……222
7.2 二變量常態分配……224－232
7.2.1 機率密度函數……224
7.2.2 性 質……226
7.3 多變量常態分配……232－246
7.3.1 機率密度函數……232
7.3.2 求 a_i 及 A_{ij} 所當值……235
7.3.3 用矩陣方法以證明 $\int\int\cdots\int\cdots=1$……239

7.3.4 邊際分配與條件分配……240
7.3.5 特性函數……241
7.3.6 無相關之 n 次元常態分配……243
習題七……247－250

第八章 統計量機率分配函數……251－323

8.1 一般母體……251－262
8.1.1 意 義……251
8.1.2 $E(X)$, $V(X)$ 之求法……251
8.1.3 抽樣分配之求法……256
8.2 常態母體……262－306
8.2.1 常態母體之加法定理……263
8.2.2 χ^2 分配……264
8.2.3 s^2, s'^2, s 及 s' 之分配……279
8.2.4 F 分配……284
8.2.5 t 分配……293
8.2.6 Wishart 分配……297
8.2.7 r 分配……300
8.2.8 迴歸係數 b 之分配……304
8.2.9 相關比平方 e^2 之分配……304
8.3 順序統計量之機率分配……306－318
8.3.1 $p.d.f.$……306
8.3.2 中位數之 $p.d.f.$……310
8.3.3 全距 R 之分配……315
習題八……319－323
習題略解……325－418
索 引……422
補 遺……423－441

數理統計學

第一章 基本機率理論

1.1 機率變數(*Stochastic Variable*)

1.1.1 前 言

觀測某現象時，在已知其支配現象之法則與完全瞭解其初期條件，則其試行結果可以完全預測，成爲決定性的。例如明年國慶日與星期天是否相連一問題，只要翻閱日曆即能知道，成爲決定性的。依此知類似此項情形之現象，並非爲吾人所研究之對象，而吾人所欲使用者須爲完全非決定性（偶然性）的，其現象之試行初期條件既不能完全一定，支配現象之方法又不能完全明瞭，因此其試行後之確實結果無法加以預測。例如投擲一枚銅幣，其擲出結果之爲正面或背面，事前無法預測，非待實際投擲後始能確定其爲面或爲背，在單獨試行時雖如此的成爲非決定性的，但在集體上則又有其擲出正面或背面的可能性成爲1/2 之規律性存在。依此知凡含有

(1) 個別事件之發生是爲非決定性。換言之，在個別發生上含有偶然性；

(2) 在集體上則存有規律性。換言之，其相對次數有趨于一定值之規律性，且此規律性依次數之增加而愈增強其安定性；

二性質之現象，始爲吾人研究之對象，並特稱爲機率性（Stochastic）的現象。且此等現象甚衆，例如擲一粒骰子所現出面之點數，一組紙牌之組合方法，人類的壽命，抽籤之號碼，電話交換時間之長短，原子粒之蛻變時期，氣體運動之分子速度，生產過程中之統計的管理上，進化論上遺傳情形，一定區域內某種作物之產量，從事同種職業者所得額及人類社會上所發生之社會事故等均屬于此。茲將此等機率性之現象用數學符號抽象其內容，並使其成爲定式化。例如將某一地方所發生之交通事故，用

1 表示發生，　0 表示不發生

可將一週內各天情形用

1, 1, 0, 0, 1, 0, 1

使成爲一抽象之數量數列，而後再應用數學方法列出其數學模型，並依此以進行其研究與預測。爲達成此項目的須先提供一種機率變數，其意義如次：

在機率性的現象上求出一個結果之過程，稱爲試行（Trial）一次，並用數學方法以表示此試行結果。例如在擲一枚銅幣時其可能擲出情形爲正面或背面二種，玆用

1 表示正面，　0 表示背面

以行規定時，則可於一元的直線 OX 上取 0，1 二點以表示其試行結果，即用 $X=0$ 時表示擲出背面，$X=1$ 時表示擲出正面。

在投擲二枚銅幣時，其試行結果有

（背,背），（背,正），（正,背），（正,正）

之四種情形，玆將其抽象化可成爲二元平面（X_1 ,X_2）上之各值爲

$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

因而可在平面上取所當之四點以表示之。

在擲三枚銅幣時，則所得結果爲

（背,背,背），（背,背,正），（背,正,正），（背,正,背），

（正,背,正），（正,背,背），（正,正,背），（正,正,正）

八種，其抽象結果成爲三元空間（X_1 , X_2 , X_3）內之八點

$(0, 0, 0),(0, 0, 1),(0, 1, 1),(0, 1, 0)$

$(1, 0, 1),(1, 0, 0),(1, 1, 0),(1, 1, 1)$

以表示其結果。且此項情形可推廣至 n 個銅幣，玆用

$$X = (X_1 , X_2 , \cdots\cdots X_n)$$

以表示其各次試行結果，且其每次試行結果已與 n 次元空間之一點相對應，因此特稱此 n 次元空間，爲樣本空間（Sample Space）用Ω以表示之。並稱此 X 爲機率變數或稱爲隨機變數（Random Variable）。

1.1.2 機率變數之定義

在現代機率論內，對于機率變數之定義則如次：

設機率空間（Probability space）爲（Ω，$\mathcal{A}$，P）；式內之Ω爲樣本空間，$\mathcal{A}$爲σ一集合族，又稱Borel集合族，含有下列三條件

（i）　$\Omega \varepsilon \mathcal{A}$

（ii）　在$A \varepsilon \mathcal{A}$時$\overline{A} \varepsilon \mathcal{A}$

（iii）　有限個可附號集合A_1，A_2，……屬于$\mathcal{A}$時，聯集合$\bigcup\limits_i A_i$亦屬于$\mathcal{A}$。

P爲機率之縮寫時滿足

$$\{\omega\ ;\ X(\omega) < x\}$$

之$X(\omega)$稱爲機率變數，式內之$\omega \in \Omega$，x爲任意之實數，$X(\omega) < x$之ω的集合爲$\mathcal{A}$之原素。

在用

$\{\omega\ ;\ X(\omega) < (-\infty, x]\}$者表示取$X(\omega)$爲$(-\infty, x]$間值。

又有用

$\{\omega\ ;\ X(\omega) \in S\}$，　$S \in \Omega_n$　（$\Omega_n = n$次元空間）

表示其$X(\omega)$爲S值之ω的集合，依此知Ω_n之二個集合S_1，S_2上成立

$$\{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_1 \cup S_2\} = \{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_1\} \cup \{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_2\}$$

$$\{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_1 \cap S_2\} = \{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_1\} \cap \{\omega\ ;\ X(\omega) \in S_2\}$$

【例】　設含有三個白球（附以1，2，3之號碼）及二個黑球（附以4，5之號碼）之袋內，一個一個順次取出二球，其可能情形爲

$$\Omega \begin{cases} (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5) \\ (2,1)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5) \\ (3,1)\ (3,2)\ (3,4)\ (3,5) \\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,5) \\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4) \end{cases}$$

〔此Ω爲樣本空間，(1,2)等20點爲用以表示事件(e)之樣本點〕

其$\mathcal{A}$爲Ω，ω_1，ω_2，ω_3及ϕ。ω_1，ω_2，ω_3之情形見次頁。

茲取白球數爲X，且此X爲ω之函數，在

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1=(1,2),(1,3),(2,1)\\ \qquad(2,3),(3,1),(3,2)\end{array}\right.\text{時} X(\omega_1)=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_2=(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\\ \qquad(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\end{array}\right.\text{時} X(\omega_2)=1$$

$$\omega_3=(4,5),(5,4)\quad\text{時} X(\omega_3)=0$$

即 $\{\omega_3\ ;\ X(\omega_3)=0\}=\{(4,5),(5,4)\}$

$\{\omega_2\ ;\ X(\omega_2)=1\}=\{(1,4),(1,5),\cdots\cdots(5,3)\}$

$\{\omega_1\ ;\ X(\omega_1)=2\}=\{(1,2),(1,3),\cdots\cdots(3,2)\}$

1.1.3 機率變數之定理

設$X(\omega)$，$Y(\omega)$爲機率變數，C爲常數時

(1) $X(\omega)+C$， $CX(\omega)$ 仍爲機率變數；

(2) $\{\omega\ ;\ X(\omega)>Y(\omega)\}\in\mathcal{A}$；

(3) $X(\omega)+Y(\omega)$ 仍爲機率變數；

(4) $X(\omega)\cdot Y(\omega)$ 仍爲機率變數；

【證】

(1) 可由機率變數之定義即能瞭解。

(2) 對$X(\omega)>Y(\omega)$之ω上可成立$X(\omega)>r>Y(\omega)$之有理數r，由此知$X(\omega)>Y(\omega)$之ω可成爲$\cup\{X(\omega)>r>Y(\omega)\}$之原素，式內之$\cup$爲就所有的有理數$r$。逆取屬于$\cup\{X(\omega)>r>Y(\omega)\}$之任意的$\omega$，對此均成立$X(\omega)>r>Y(\omega)$，因而成立$X(\omega)>Y(\omega)$。由此得

$$\{X(\omega)>Y(\omega)\}=\cup_r\{X(\omega)>r>Y(\omega)\}$$

（注意：有理數之全體爲可算無限個）

但 $\{X(\omega)>r>Y(\omega)\}=\{X(\omega)>r\}\cap\{r>Y(\omega)\}$

知其爲$\mathcal{A}$之原素。依此知上式右邊亦爲$\mathcal{A}$之原數，得證。

(3) 在 $\{X(\omega)+Y(\omega)<x\}=\{x-X(\omega)>Y(\omega)\}$

內之$-X(\omega)$依(1)知爲機率變數，$x-X(\omega)$亦爲機率變數，並依(2)知上列集合爲$\mathcal{A}$之原素，依此知$X(\omega)+Y(\omega)$亦爲機率變數。

(4) 依(1)，(3)知$X(\omega)-Y(\omega)$亦爲機率變數，在$x>0$上

$$\{X^2(\omega)<x\}=\{0\leq X(\omega)<x\}\cup\{-x<X(\omega)<0\}$$

知 $X^2(\omega)$ 亦爲機率變數，次依

$$X(\omega)Y(\omega)=\frac{1}{4}[\{X(\omega)+Y(\omega)\}^2-\{X(\omega)-Y(\omega)\}^2]$$

得證。

1.2　事件與集合間之關係

1.2.1　事件之發生

綜合試行之可能結果作成一集合Ω，並取其部分集合爲 A 時，若試行 T 之結果是屬于 A，則稱爲發生 A 事件（Event），用

$$X\varepsilon A$$

以表示之。例如擲一粒骰子，其六面體之各面均有擲出之可能，因此

$$\Omega=(1,2,3,4,5,6)$$

若取其部分集合

$$A=(2,4,6)$$

爲只擲出偶數之情形，當此時之

$$X\varepsilon A$$

係表示發生擲出偶數點之事件。

X 實現 A 以外之事件，則用

$$X\varepsilon\bar{A},\quad \bar{A}=\Omega-A=A^c$$

以表示之，$\bar{A}$ 稱爲 A 之餘事件。

在 $X\varepsilon\phi$，表示發生 $X\varepsilon A$ 爲不可能，稱爲關于 A 成爲空事件。

在 $X\varepsilon\Omega$，則表示 X 必能實現。

1.2.2　各種事件

設Ω之二個部分集合爲 A 及 B，其

（a）　聯事件

當 X 之實現值取在 A，B 之聯集合 $A\cup B$ 內，是表示最少發生事件 $X\varepsilon A$，$X\varepsilon B$ 之一方（either A or B or both occurs.），用