

快子场方程的特征值和特征矢的几种求法

段虞荣 李虹

谢玢

(重庆大学基础科学系)(重庆大学计算中心)

摘 要

本文对杨学恒、刘之郎等同志提出的基本粒子结构的快子模型的非线性快子场方程

$$\left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + g_N (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \gamma^\mu \gamma_5 \right] \psi = 0, \quad \mu \in M \{1, 2, 3, 4\} \quad (1)$$

的一阶拟线性对称双曲型偏微分方程组的标准形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \check{A}_j \frac{\partial \varphi}{\partial y^j} + \check{B}, \quad j \in J \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

的齐次对称双曲型偏微分方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \check{A}_j \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}, \quad j \in J \quad (3)$$

用初等变换法、Jacobi 算法和 QR 算法求特征方程

$$|\lambda E - \check{A}_j \check{A}^j| = 0 \quad (4)$$

的特征根和特征矢量。

本文的一些主要结果如下：特征根 $\gamma_{\mu+4}^{(\Sigma)} = -\sqrt{\Delta}$ 和 $\lambda_{\mu+4}^{(\Sigma)} = \sqrt{\Delta}$ 均为方程(4)的四重根($\forall \lambda_j$

$\in \mathbb{R}, \mu \in M$)，其中 $\Delta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 = \frac{1}{8} \|A_\Sigma\|_F^2$ (矩阵 $A_\Sigma = \lambda_j \check{A}^j$)，从而最大(小)特征值

$\lambda_{\mu+4}^{(\Sigma)} = \sqrt{\Delta} (\lambda_{\mu}^{(\Sigma)} = -\sqrt{\Delta})$ ，矩阵 A_Σ 的谱半径 $\rho(A_\Sigma) = \max_{1 \leq k \leq 8} |\lambda_k^{(\Sigma)}| = \sqrt{\Delta}$ 。矩阵 A_Σ

的特征值之积 $\prod_{k=1}^8 \lambda_k^{(\Sigma)} = \Delta^4$ ，矩阵 A_Σ 是可约的，它在特征曲面上的秩为 4。如视 λ_j 为特征曲

面的法速度 V 的分量， $V = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ，就得到法速率 $|V| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2} = \sqrt{\Delta} = \lambda$ ，即法速率 $|V|$

就是矩阵 $A_S = \lambda_i \tilde{A}^i$ 的特征值这个著名的结论。齐次方程 (3) 具有平面波解 $\varphi_I = Q e^{i\lambda_i y^j} e^{i\sqrt{A}t}$ 和 $\varphi_{II} = \tilde{Q} e^{i\lambda_i y^j} e^{-i\sqrt{A}t}$, 从而 φ_I 和 φ_{II} 的任意线性组合 $c_1 \varphi_I + c_2 \varphi_{II}$ 亦为方程 (3) 之解。又用齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A_S) U = 0$ 的基础解系理论导出矩阵 A_S 的特征矢量系为:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ \sqrt{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{A} \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \sqrt{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{A} \end{bmatrix}$$

本文又用求实对称矩阵的全部特征值和特征矢量的 Jacobi 算法和求实对称矩阵的全部特征值的 QR 算法的 FORTRAN 程序 JACOBI, TRED 1 和 TQL 1 在我校 EC-1022B 计算机 (IBM360 计算机的换名型号) 上算出齐次快子场方程 (3) 的特征值和特征矢量。特征值的数值计算结果与理论值十分吻合。

一、非线性快子场方程的标准形式

在文 (17-19) 中应用 P. R. Garabedian 的专著《偏微分方程》⁽²¹⁾ 所述多复变函数论, 先将杨学恒、刘之骅等同志提出的基本粒子结构的快子 (1)-(8) 模型在能量动量空间的类时子空间中的非线性快子场方程 (9)-(16) (一类非线性进化方程⁽²⁰⁾)

$$\left[\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + g_N (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \gamma^\mu \gamma_5 \right] \psi = 0, \quad \mu \in M \{1, 2, 3, 4\} \quad (1.1)$$

化为复域上的一阶拟线性偏微分方程组 (22)-(24)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A^j \frac{\partial \psi}{\partial y^j} + B, \quad j \in J \{1, 2, 3\}, \quad (1.2)$$

其中 $A^j = -\gamma^4 \gamma^j$, $\gamma_\mu, \gamma_5 = \prod_{\mu=1}^4 \gamma_\mu$ 为 Dirac 矩阵, ψ 为波函数 (旋量)

$$\psi = \psi(y, t) = \begin{bmatrix} \psi^1(y, t) \\ \psi^2(y, t) \\ \psi^3(y, t) \\ \psi^4(y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^1(y, t) + i\varphi^2(y, t) \\ \varphi^3(y, t) + i\varphi^4(y, t) \\ \varphi^5(y, t) + i\varphi^6(y, t) \\ \varphi^7(y, t) + i\varphi^8(y, t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\tilde{\psi} = \psi^H \theta_i = (\tilde{\psi}^1 \tilde{\psi}^2 \tilde{\psi}^3 \tilde{\psi}^4) \theta_i = (\varphi^2 + i\varphi^1, \varphi^4 + i\varphi^3, -\varphi^6 - i\varphi^5, -\varphi^8 - i\varphi^7), \quad (1.4)$$

其中 $\tilde{\psi}^H = \tilde{\psi}^T$ 为 ψ 的 Hermite 共轭波函数。 θ_i 为 4×4 矩阵。 x^j 与 y^j 由复矢量分量 $z^j = x^j + iy^j$ ($z = (z^1, z^2, z^3)$) 联系。

$$|\tilde{\psi}|^2 = |\psi|^2 = |\tilde{\psi}\psi| = \tilde{\psi}^\sigma \psi_\sigma - \tilde{\psi}^{\sigma+2} \psi_{\sigma+2} = \varphi^\mu \varphi_\mu - \varphi^{\mu+4} \varphi_{\mu+4} \quad (1.5)$$

($|\tilde{\psi}|$ 是一种具有不定度规的范数) 的物理意义是快子出现在点 (y^1, y^2, y^3) 的几率密度, 故波函数 ψ 可以理解为快子场的密度分布函数。列矢量

$$B = -g_N \gamma_4 (\tilde{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \gamma_\mu \gamma_5 \psi = i g_N \begin{pmatrix} \eta_1 \psi^1 + 2\tilde{\eta}_2 \psi^2 - \eta_3 \psi^3 \\ 2\eta_2 \psi^1 - \eta_1 \psi^2 & -\eta_3 \psi^4 \\ -\eta_3 \psi^1 & +\eta_1 \psi^3 + 2\tilde{\eta}_2 \psi^4 \\ & -\eta_3 \psi^2 + 2\eta_2 \psi^3 - \eta_1 \psi^4 \end{pmatrix}$$

为核子自相互作用项, 这里 $\eta_1 = e_2 = \tilde{\psi}^1 \psi^1 - \tilde{\psi}^2 \psi^2 + \tilde{\psi}^3 \psi^3 - \tilde{\psi}^4 \psi^4$, $\eta_2 = \tilde{\psi}^1 \psi^2 + \tilde{\psi}^3 \psi^4$, $\tilde{\eta}_2 = \tilde{\psi}^2 \psi^1 + \tilde{\psi}^4 \psi^3$, $\eta_3 = 2e_3 = \tilde{\psi}^1 \psi^3 + \tilde{\psi}^3 \psi^1 + \tilde{\psi}^2 \psi^4 + \tilde{\psi}^4 \psi^2$, g_N 为核子质量耦合常数 (核子截面) (18), (19)。

我们再利用多复变解析函数论就将方程 (1.2) 进一步化为一阶拟 (半) 线性对称双曲型偏微分方程组的标准形式 (17) - (19)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{A}^j \frac{\partial \varphi}{\partial y^j} + \tilde{B}, \quad j \in J, \quad (1.6)$$

其中实对称矩阵

$$\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8 × 1 实矢量

$$\tilde{B} = g_N \begin{pmatrix} -\varepsilon_2 \varphi^2 + 2(\varepsilon_1 \varphi^3 - \varepsilon_0 \varphi^4 + \varepsilon_3 \varphi^5) \\ \varepsilon_2 \varphi^1 + 2(\varepsilon_0 \varphi^3 + \varepsilon_1 \varphi^4 - \varepsilon_3 \varphi^5) \\ -2(\varepsilon_0 \varphi^2 - \varepsilon_1 \varphi^1 + \varepsilon_3 \varphi^5) + \varepsilon_2 \varphi^4 \\ 2(\varepsilon_0 \varphi^1 + \varepsilon_1 \varphi^2 - \varepsilon_3 \varphi^7) - \varepsilon_2 \varphi^3 \\ 2(\varepsilon_3 \varphi^2 - \varepsilon_1 \varphi^7 + \varepsilon_0 \varphi^8) - \varepsilon_2 \varphi^6 \\ -2(\varepsilon_3 \varphi^1 + \varepsilon_0 \varphi^2 + \varepsilon_1 \varphi^5) + \varepsilon_2 \varphi^5 \\ 2(\varepsilon_3 \varphi^4 + \varepsilon_1 \varphi^5 - \varepsilon_0 \varphi^6) + \varepsilon_2 \varphi^8 \\ 2(-\varepsilon_3 \varphi^3 + \varepsilon_0 \varphi^5 - \varepsilon_1 \varphi^6) - \varepsilon_2 \varphi^7 \end{pmatrix}$$

这里 $\varepsilon_0 = \varphi^1 \varphi^3 + \varphi^2 \varphi^4 + \varphi^5 \varphi^7 + \varphi^3 \varphi^5 = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_5 \psi$,

$$\varepsilon_1 = \varphi^1 \varphi^4 - \varphi^2 \varphi^3 + \varphi^5 \varphi^8 - \varphi^6 \varphi^7 = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_2 \gamma_5 \psi,$$

$$\varepsilon_2 = (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 - (\varphi^3)^2 - (\varphi^4)^2 + (\varphi^5)^2 + (\varphi^6)^2 - (\varphi^7)^2 - (\varphi^8)^2 = -\bar{\psi} \gamma_3 \gamma_5 \psi,$$

$$\varepsilon_3 = \varphi^1 \varphi^5 + \varphi^2 \varphi^6 + \varphi^3 \varphi^7 + \varphi^4 \varphi^8 = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_4 \gamma_5 \psi.$$

二、快子场方程的特征值和特征矢的几种求法

按 P. R. Garabedian 专著⁽²¹⁾所述理论, 由分离变量法 (Fourier 法) 知非线性快子场方程(1.6)当列矢量 $\tilde{B}$ (核子自相互作用项) 为 0 时所对应的这种特殊类型的齐次对称双曲型偏微分方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tilde{A}^i \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} \quad (2.1)$$

可以求出下述指数型解 (所谓平面波解) (22)–(24)

$$\varphi = \Phi e^{i\lambda_j y^j} e^{i\lambda t}, \quad (2.2)$$

其中 $\lambda_j (j \in J)$ 和 λ 是这样一些固定参数使得 λ 是特征方程

$$|\lambda E - \lambda_j \tilde{A}^j| = 0 \quad (2.3)$$

之根, 即 λ 的 8 次多项式方程

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

之根, 而 Φ 是一个八维非零列矢量 (其分量由常数组成, 一般与坐标轴上的单位矢共线), 并且具有下述性质

$$\lambda E \Phi = \lambda_j \tilde{A}^j \Phi, \quad (2.5)$$

即, λ 为矩阵 $A_\lambda = \lambda_j \tilde{A}^j$ 的特征值 (本征值), 而 Φ 为与特征值 λ 对应的特征矢 (本征矢)。矩阵 A_λ 具有由八个线性无关的实特征矢所组成的完备系。

当 $\lambda_j, \lambda \in \mathbb{R}$ 时表达式 (2.2) 可以解释为 Fourier 展式中的通项。对时间变量 $t = y^4$ 特别加以区别自然是想使特征方程 (2.4) 的每个根 $\lambda \in \mathbb{R} \forall \lambda_j \in \mathbb{R}$ 。对于 $\lambda_j (j \in J)$ 的某些特殊的指定值, 现在我们用几种方法 (手算和电算) 来求特征方程 (2.4) 之根 (特征值) 及其特征矢。

1. 初等变换法

为叙述简便计, 采用下列变换记号: $[i(c)]$ 表示用 $c \neq 0$ 乘第 i 行 (列); 变换记号 $[i(c)]$ 写在 $\Rightarrow$ 上 (下) 边 $[i(c)] \xRightarrow{\quad} [i(c)]$ 表示行 (列) 变换; $[i+j(f)]$ 表示把第 j 行 (列) 的 $f(\lambda)$ 倍加到第 i 行 (列), 同理 $[i+j(f)] \xRightarrow{\quad} [i+j(f)]$ 表示行 (列) 变换。

$$1) \quad \lambda_3 \neq 0 \left(\Delta = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 \right)$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\
 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\
 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\
 \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
 \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
 \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[1 + 5 \left(-\frac{\lambda}{\lambda_3}\right)\right], \\
 \left[7 + 5 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)\right], \\
 \left[8 + 5 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)\right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \longrightarrow \\
 \longrightarrow \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\left[7 + 5 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \right]$$

$$\left[8 + 5 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right) \right]$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda \lambda_3 & -\frac{\lambda^2}{\lambda_3} & 0 & \lambda_1 \quad \lambda_2 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \quad \lambda_1 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \quad 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \quad -\lambda_3 \\
\lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 \quad 0 \\
0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \lambda & 0 \quad 0 \\
0 & -\lambda_2 & -\lambda_3 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3} & -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & 0 & \lambda \quad 0 \\
0 & \lambda_1 & -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} & -\lambda_3 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & 0 & 0 \quad \lambda
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[2 + 5 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \right] \\
 \left[6 + 5 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right) \right] \\
 \left[7 + 5 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \right] \\
 \hline \hline \rightarrow \lambda_3
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & \lambda_3 - \frac{\lambda^2}{\lambda_3} & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\
 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & 0 & \lambda_3 - \frac{\lambda^2}{\lambda_3} & -\lambda_2 & \lambda_1 \\
 0 & \lambda & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\
 \hline \hline \rightarrow \lambda_3 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_3} & 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & 0 & \lambda & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\lambda}{\lambda_3} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & 0 & 0 & \lambda
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[1 + 5 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda} \right) \right] \\
 \left[2 + 5 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right) \right] \\
 \left[3 + 5 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda} \right) \right] \\
 \hline \hline \rightarrow
 \end{array}$$

$$\left[2 + 5 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right],$$

$$\left[3 + 5 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \right]$$

→

$$\begin{array}{l}
\lambda_3^2 \left[\begin{array}{cccccc} 0 & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & \lambda_3 - \frac{\lambda^2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_1^2 \lambda^2}{\lambda_3 \Delta} & 0 & \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_2 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \lambda & -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3 \Delta} \lambda^2 & \lambda_3 - \frac{\lambda^2}{\lambda_3} & -\lambda_2 + \frac{\lambda_2 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{\Delta} \lambda^2 & -\lambda_2 & -\lambda_3 + \frac{\lambda_3 \lambda^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ -\frac{\Delta}{\lambda_3} & 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{\lambda_3} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \lambda & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ [1(\lambda_3)], \\ [2(\lambda_3)], \\ [3(\lambda_3)] \end{array} \\
\\
-\frac{\Delta}{\lambda_3^2} \left[\begin{array}{cccccc} -\lambda_2 \lambda & \lambda_3^2 - \lambda^2 + \frac{\lambda_1^2 \lambda^2}{\Delta} & 0 & \lambda_1 - \frac{\lambda_2 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_2 & \\ -\lambda_1 \lambda & -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta} \lambda^2 & \lambda_3^2 - \lambda^2 & -\lambda_2 + \frac{\lambda_2 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_1 & \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\Delta} \lambda^2 & -\lambda_2 \lambda_3 & -\lambda_3 + \frac{\lambda_3 \lambda^2}{\Delta} & 0 & \\ \lambda_3 \lambda & \lambda_2 \lambda_3 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 & \\ -\Delta & -\lambda_2 \lambda & 0 & 0 & \lambda & \\ -\lambda_2 \lambda & \lambda_3^2 - \lambda^2 + \frac{\lambda_1^2 \lambda^2}{\Delta} & 0 & \lambda_1 - \frac{\lambda_1 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_2 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ [4(\frac{1}{\lambda_3})] \\ \\ \\ \\ [1+4(\lambda_2)], \\ [2+4(\lambda_1)], \\ [5+4(\lambda)] \end{array} \\
\\
-\frac{\Delta}{\lambda_3} \left[\begin{array}{cccccc} \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -1 & \\ -\Delta & -\lambda_2 \lambda & 0 & 0 & \lambda & \\ 0 & \lambda_3^2 + \lambda_2^2 - \lambda^2 + \frac{\lambda_1^2 \lambda^2}{\Delta} & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & 0 & \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda^2 & -\lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & 0 & \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & -\lambda_2 \lambda_3 & -\lambda_3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & 0 & \\ \lambda & \lambda_2 \lambda & \lambda_1 & 0 & -1 & \\ \lambda^2 - \Delta & 0 & \lambda_1 \lambda & 0 & 0 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 0 \end{array}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda^2 - \Delta) \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) \begin{vmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\Delta} \right) & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) \lambda^2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda^2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & -\lambda_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & [1 + 3(\lambda_1)], \\ & [2 + 3(-\lambda_2)], \\ & \xrightarrow{\quad\quad\quad} -(\lambda^2 - \Delta)^2 \begin{vmatrix} \Delta - \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta - \lambda^2 & 0 \\ \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\Delta} \right) & -\lambda_2 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\lambda^2 - \Delta)^4 = 0.$$

$$2) \lambda_3 = 0, \lambda_1 \neq 0 \left(\Delta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} & \left[1 + 7 \left(-\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \right], \\ & \left[8 + 7 \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right] \end{aligned} \xrightarrow{\quad\quad\quad}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_1} & \lambda_2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \frac{\lambda^2}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$[1(\lambda_1)],$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\left[7 \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) \right]$$

$$[1 + 2(-\lambda_1)],$$

$$[7 + 2(-\lambda)]$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda^2)^2$$

$$\lambda_1(1 - \lambda_1)^2$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (\Delta - \lambda^2)^2 \begin{vmatrix} -\lambda_2 \lambda & \lambda_1^2 - \lambda^2 & -\lambda^2 \\ \lambda & \lambda_2 & 1 \\ \Delta & \lambda_2 \lambda & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} [1+2(\lambda_2)], \\ [3+2(-\lambda)] \end{matrix} \Rightarrow (\Delta - \lambda^2)^2 \begin{vmatrix} 0 & \Delta - \lambda^2 & 0 \\ \lambda & \lambda_2 & 1 \\ \Delta - \lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & = (\Delta - \lambda^2)^4 = 0. \end{aligned}$$

$$3) \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0 (\Delta = \lambda_3^2)$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ & \begin{matrix} [1+8(-\frac{\lambda}{\lambda_2})], \\ [2+7(-\frac{\lambda}{\lambda_2})], \\ [3+6(-\frac{\lambda}{\lambda_2})], \\ [4+5(-\frac{\lambda}{\lambda_2})] \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta - \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ & = \lambda_2^2 (\Delta - \lambda^2)^4 = \Delta^2 (\Delta - \lambda^2)^4 = 0. \end{aligned}$$

$$4) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 (\Delta = 0)$$

$$|\lambda E - \lambda_1 \tilde{A}| = |\lambda E - 0| = |\lambda E| = \lambda^8 = (0 - \lambda^2)^4 = (\Delta - \lambda^2)^4.$$

故无论哪种情况, 特征方程(2.3)的特征根 $\lambda_{\mu}^{(2)} = -\sqrt{\Delta}$ 和 $\lambda_{\mu+4}^{(2)} = \sqrt{\Delta} (\mu \in M)$ 均为四

重根, 其中 $\Delta = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = \frac{1}{8} \|A_2\|_2^2$, 从而最大特征值 $\lambda_{\mu+4}^{(2)} = \sqrt{\Delta}$, 即最大特征值 $\lambda_{\max} = \max_{V \neq 0}$

$\frac{V^H A_2 V}{V^H V} = \sqrt{\Delta}$, 其中 $\frac{V^H A_2 V}{V^H V}$ 为矩阵 A_2 的 Rayleigh 商, (25)~(27), V 为与 $\lambda_{\max}$ 对应的

特征矢, 矩阵 A_z 的谱半径 $\rho(A_z) = \max_{1 \leq k \leq 8} |\lambda_k^{(z)}| = \sqrt{A}$, 最小特征值 $\lambda_{min} = \lambda_{\mu}^{(z)} = -\sqrt{A}$,

矩阵 A_z 之迹 $sp(A_z) = tr(A_z) = \sum_{k=1}^8 \lambda_k^{(z)} = \sum_{k=1}^8 a_{kk} = 0$, 齐次快子场方程(2.1)的特征值具

有很强的对称性, 正负特征值是成对出现的。特征值之积 $\prod_{k=1}^8 \lambda_k^{(z)} = \det(A_z) = A^4$ 。矩阵 A_z 是可约的。表明齐次快子场方程(2.1)的退化程度很高。它在特征曲面上的秩为 $8-4=4$ 。

如视 λ_i 为特征曲面的法速度 V 的分量, $V = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 则法速率 $|V| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2} = \sqrt{A}$
 $= \lambda$, 于是得到法速率 $|V|$ 就是矩阵 $A_z = \lambda_i A^i$ 的特征值(22)这个著名的结论。

根据(2.2)式齐次快子场方程(2.1)具有平面波解

$$\varphi_{\text{I}} = \Phi e^{i\lambda_i y^i} e^{i\sqrt{A}t} \quad (2.6)$$

和

$$\varphi_{\text{II}} = \bar{\Phi} e^{i\lambda_i y^i} e^{-i\sqrt{A}t} \quad (2.7)$$

从而 φ_{I} 和 φ_{II} 的任意线性组合 $c_1 \varphi_{\text{I}} + c_2 \varphi_{\text{II}}$ 亦为齐次方程(2.1)之解。

齐次快子场方程的特征矢量的推导

由于矩阵 A_z 的特征值 $\lambda = \lambda_0$ 的特征矢量系与齐次线性方程组

$$(\lambda_0 E - A_z)V = 0 \quad (2.8)$$

之解的基础解系等价(29)。若矩阵 $\lambda_0 E - A_z$ 之秩为 r , 则齐次线性方程组(2.8)的基础解系之秩为 $n-r$ 。而且对矩阵 $\lambda_0 E - A_z$ 之行施行一系列初等变换, 可将矩阵 $\lambda_0 E - A_z$ 化为形

式 $\begin{pmatrix} E_{r \times r} & C_{(n-r) \times (n-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则齐次线性方程组(2.8)之解的基础解系为 $\begin{pmatrix} -C \\ E \end{pmatrix}_{n \times (n-r)}$ 。

已知矩阵 A_z 的特征根为两个四重根 $\pm\sqrt{A}$ 。

1°. 当 $\lambda_0 = -\sqrt{A} \neq 0$ 时

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \sqrt{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \sqrt{\Delta} & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\Delta} & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left[5+1\left(-\frac{\lambda_3}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[5+3\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[5+4\left(-\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \\ \left[6+2\left(-\frac{\lambda_3}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[6+3\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[6+4\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \\ \left[7+1\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[7+2\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[7+3\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \\ \left[8+1\left(-\frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[8+2\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{\Delta}}\right)\right], \left[8+4\left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \sqrt{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \sqrt{\Delta} & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\Delta} & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则特征向量系为}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ \sqrt{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$$

2°. 当 $\lambda_0 = \sqrt{\Delta} \neq 0$ 时

$$(-\sqrt{\Delta}E - A_{\Sigma})V = \theta \Leftrightarrow (\sqrt{\Delta}E + A_{\Sigma})V = \theta.$$

令 $\mu_j = -\lambda_j$, $j \in J$, 置 $B_{\Sigma} = -A_{\Sigma}$, 则

$$(\sqrt{\Delta}E + A_{\Sigma})V = (\sqrt{\Delta}E - B_{\Sigma})V = \theta, \quad (2.9)$$

其中

$$\mathcal{A}^1 = \sum_{j=1}^3 \mu_j^2 = \mathcal{A}.$$

由1°知矩阵 B_z 的特征矢量系为

$$\begin{pmatrix} -\mu_3 & -0 & -\mu_1 & -\mu_2 \\ 0 & -\mu_3 & \mu_2 & -\mu_1 \\ -\mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ -\mu_2 & -\mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \sqrt{\mathcal{A}'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathcal{A}'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mathcal{A}'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\mathcal{A}'} \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \sqrt{\mathcal{A}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathcal{A}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\mathcal{A}} \end{pmatrix}.$$

3°. 当 $\lambda_0 = 0$, 即 $\mathcal{A} = 0$ 时

0 为矩阵 A_z 的特征方程的八重根, 由定义可知, 每个非零矢量都是特征值 0 的特征矢量, 特别八个基本单位矢量都是特征值 0 的特征矢量。

2. Jacobi 算法

Jacobi 算法(30)–(31)的基本思想如下:

对任一 n 阶实对称矩阵 A , 若能通过一 n 阶正交矩阵 U 把它化为对角阵 D : $U^T A U = D$, 则 $A U = U D$. 因此 D 的对角线上的元素便是相应的特征值。通过一系列初等正交变换把 A 逐步化为对角阵。变换关系如下:

$$A_{k+1} = U_k^T A_k U_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $A_0 = A$, U_k 是正交旋转阵, 它的元素除

$$u_{pp} = u_{qq} = \cos \beta, \quad u_{pq} = -u_{qp} = \sin \beta \quad (p < q)$$

外, 其余元素与 n 阶单位阵的元素相同。若记 $c = \cos \beta, s = \sin \beta$, 则矩阵 A_{k+1} 的元素 $a_{ij}^{(k+1)}$ 的计算公式为

$$\begin{cases} a_{pp}^{(k+1)} = c^2 a_{pp}^{(k)} - 2cs a_{pq}^{(k)} + s^2 a_{qq}^{(k)}, \\ a_{qq}^{(k+1)} = s^2 a_{pp}^{(k)} + 2cs a_{pq}^{(k)} + c^2 a_{qq}^{(k)}, \\ a_{pq}^{(k+1)} = (c^2 - s^2) a_{pq}^{(k)} + cs (a_{pp}^{(k)} - a_{qq}^{(k)}), \end{cases} \quad (p < q) \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} a_{pj}^{(k+1)} = c a_{pj}^{(k)} - s a_{qj}^{(k)}, \\ a_{qj}^{(k+1)} = s a_{pj}^{(k)} + c a_{qj}^{(k)}. \end{cases} \quad (j \neq p, q)$$

选择 β 使 $a_{pq}^{(k+1)} = 0$ 得 $\tan 2\beta = 2a_{pq}^{(k)} / (a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)})$.

欲计算 $\cos \beta$ 与 $\sin \beta$ 先计算 $\tan \beta$, 若 $a_{pq}^{(k)} \ll a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)}$, 则用

$$\tan \beta \approx a_{pq}^{(k)} / (a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)})$$

计算. 否则由公式 $\theta = \tan 2\beta = (a_{qq}^{(k)} - a_{pp}^{(k)}) / (2a_{pq}^{(k)})$ 得

$$t = \tan \beta = \begin{cases} 1 / (|\theta| + (1 + \theta^2)^{\frac{1}{2}}), & \theta > 0, \\ -1 / (|\theta| + (1 + \theta^2)^{\frac{1}{2}}), & \theta < 0. \end{cases}$$

于是 $c = 1 / (1 + t^2)^{\frac{1}{2}}$, $s = tc$, 则(2.9)式等价于

$$\begin{cases} a_{pp}^{(k+1)} = a_{pp}^{(k)} - t a_{pq}^{(k)}, \\ a_{qq}^{(k+1)} = a_{qq}^{(k)} + t a_{pq}^{(k)}, & (p < q) \\ a_{pq}^{(k+1)} = 0. \end{cases}$$

由于正交变换不改变矩阵元素的平方和 (即矩阵的 Frobenius 范数也不变), 并且经上述正交变换后, A_{k+1} 与 A_k 主对角线上元素除 $a_{pp}^{(k+1)}$ 与 $a_{qq}^{(k+1)}$ 有改变外, 其余都不变, 而对此二元素有

$$(a_{pp}^{(k+1)})^2 + (a_{qq}^{(k+1)})^2 = (a_{pp}^{(k)})^2 + (a_{qq}^{(k)})^2 + 2(a_{pq}^{(k)})^2.$$

因此, 每经过一次初等正交变换, 主对角线上元素平方和增加 $2(a_{pq}^{(k)})^2$, 而主对角线外元素平方和相应地减少 $2(a_{pq}^{(k)})^2$. 于是通过一系列初等正交变换就可把 A 逐步化为对角阵. 因为

$U = \prod_{k=0}^{\infty} U_k$, 所以, 在进行初等正交变换的同时, 可以计算这个连乘积, 最后就得到相应的特征矢量.

记 U_k 的元素为 $u_{ij}^{(k)}$, 则

$$u_{ij}^{(k+1)} = u_{ij}^{(k)}, \quad j \neq p, q, \quad u_{ip}^{(k+1)} = c u_{ip}^{(k)} + s u_{iq}^{(k)}, \quad u_{iq}^{(k+1)} = -s u_{ip}^{(k)} + c u_{iq}^{(k)}.$$

3. QR 算法

QR 算法是一种计算实对称矩阵全部特征值的最有效的方法⁽³⁰⁾⁻⁽³¹⁾, 先把实对称阵用正交相似变换把它化为实对称三对角阵, 例如过程 tred1 采用 Householder 变换 (镜象变换或反射变换) $P_i = E - 2W_i W_i^T / H_i$

$$(\bar{W}^T W = 1, \bar{W}^T = (0, \dots, 0, W_{r+1}, \dots, W_n))$$

$$A_{i+1} = P_i A_i P_i \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

把实对称阵 $A = A_1$ 化为实对称三对角阵。这里 $H_i = \frac{1}{2} u_i^T u_i$, $u_i^T = (a_{i1}^{(i)}, \dots, a_{i,i-2}^{(i)}, a_{i,i-1}^{(i)})$

$$\pm \sigma_i^{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0), l = n - i + 1, \sigma_i = \sum_{j=1}^{l-1} (a_{ij}^{(i)})^2. \text{ 令 } p_i = A_i u_i / H_i, k_i = u_i^T p_i / 2 H_i,$$

$q_i = p_i - k_i u_i$, 则 $A_{i+1} = A_i - u_i q_i^T - q_i u_i^T$, 其中 $p_i^T = (p_{i1}, \dots, p_{il}, 0, \dots, 0)$, $q_i^T = (p_{i1} -$

$k_i u_{i1}, \dots, p_{i,l-1} - k_i u_{i,l-1}, p_{il}, 0, \dots, 0)$ 。计算步骤如下: $\sigma_i \rightarrow u_i^T \rightarrow H_i = \frac{1}{2} u_i^T u_i \rightarrow p_i \rightarrow k_i$

$\rightarrow q_i \rightarrow A_{i+1} = A_i - q_i u_i^T - u_i q_i^T$ 。

过程 TQR1 用来求实对称三对角阵的全部特征值。若与与程 TRED1 联用 (即调用 TRED1 和 TQL1), 则可求实对称阵的全部特征值。QL 算法是 QR 算法的变形。将矩阵 A_i 进行 QL 分解:

$$A_i = Q_i L_i, A_{i+1} = L_i Q_i = Q_i^T A_i Q_i,$$

其中 $Q_i = P_1 \dots P_{n-i}$ 而 P_i 是平面旋转变换。

$$P_1 \dots P_{n-1} (A_i - k_i I) = L_i, A_{i+1} = L_i P_{n-1}^T \dots P_1^T.$$

这里 k_i 为原点平移量。

设 $d_i^{(s)}$ ($i = 1, \dots, n$) 为主对角线元素, $e_i^{(s)}$ ($i = 1, \dots, n-1$) 为次对角线元素, 则迭代格式为:

$$p_i = d_i^{(s)} - k_s, c_n = 1, s_n = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} r_{i+1} &= (p_{i+1}^2 + (e_i^{(s)})^2)^{\frac{1}{2}}, g_{i+1} = c_{i+1} e_i^{(s)}, h_{i+1} = c_{i+1} p_{i+1}, e_{i+1}^{(s+1)} = s_{i+1} r_{i+1}, \\ c_i &= p_{i+1} / r_{i+1}, s_i = e_i^{(s)} / r_{i+1}, p_i = c_i (d_i^{(s)} - k_s) - s_i g_{i+1}, \\ d_{i+1}^{(s+1)} &= h_{i+1} + s_i (c_i g_{i+1} + s_i (d_i^{(s)} - k_s)), \\ e_i^{(s+1)} &= s_i p_1, d_1^{(s+1)} = c_1 p_1. \end{aligned} \right\} i = n-1, \dots, 1.$$

三、数值计算结果

用初等变换法计算齐次快子场方程 (2.1) 的特征值和特征矢量的手算值 (也是理论值) 的实例, 见表 1。我们又用求实对称矩阵的全部特征值和特征矢量的 Jacobi 算法和求实对称矩

阵的全部特征值的 QR 算法的 FORTRAN 程序 JACOBI、TRED1 和 TQL1 在我校 EC-1022B 计算机 (IBM360 计算机的换名型号) 上算出齐次快子场方程 (2.1) 的特征值和特征矢量的实例分别见表 2 和表 3。两个程序的编译时间分别为 57" 和 1'18", 每组特征值的计算时间分别为 16" 和 17"。精度为 10^{-5} , 特征值的数值计算结果与理论值十分吻合。

致 谢

本文承蒙四川大学数学系陆文端教授仔细审阅, 提出了宝贵的意见, 承告作者, 方程 (2.4) 之根可用下列更简便的方法得到:

以 D 记 (2.4) 左端的行列式, 对它的第 5, 6, 7, 8 行都乘以 -1 , 其值不变, 再按行列式乘法求 D^2 得

$$D^2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \Delta \end{vmatrix}$$

故 $D^2 = (\lambda^2 - \Delta)^8$, $\therefore D = (\lambda^2 - \Delta)^4$, 其中 $\Delta = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2$.

表 1 用初等变换法求方程 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{A} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 的特征值和特征矢量(手算值)

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \sqrt{A} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2} = \sqrt{3} = 1.732050808$$

特 征 值	特 征 矢 量		
$-\sqrt{3}$	1	0	-1
$-\sqrt{3}$	0	1	1
$-\sqrt{3}$	-1	1	-1
$-\sqrt{3}$	-1	-1	0
$\sqrt{3}$	-1	0	1
$\sqrt{3}$	0	-1	-1
$\sqrt{3}$	1	-1	1
$\sqrt{3}$	1	1	0

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.25, \sqrt{A} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2} = \sqrt{1.3125} = 1.145643924$$

特 征 值	特 征 矢 量		
-1.145643924	-0.25	0	-1
-1.145643924	0	-0.25	0.5
-1.145643924	-1	0.5	0.25
-1.145643924	-0.5	-1	0
1.145643924	0.25	0	1
1.145643924	0	0.5	-0.5
1.145643924	1	-0.5	-0.25
1.145643924	0.5	1	0