中国人民解放军测绘学院
一九七九年度学术讨论会

椭球面和同心球面间的投影

黄 继 文

一九七九年四月

椭球面和同心球面间的投形

提　　要

本文提出的椭球面和同心球面间的投形是按球面经度等于大地经度、球面纬度等于归化纬度以及球面上两点用大圆弧联结这样三个条件进行的。导出了精度为毫米或米的适用于全球的边长投形计算公式，以及精度为毫米的适用于875公里以内的边长投形计算公式。

一 归化纬度的新定义

（一） 归化纬度的新定义

在归化纬度坐标系中，归化纬度的原始定义是：以子午椭圆中心O为圆心，以椭球长半径a为半径作一辅助圆，延长椭圆上P点的纵坐标线P_0P与圆交于P'点，则$\angle P'OP_0$称为P点的归化纬度，以u表示之[1]（图1）。

为了阐明归化纬度的新定义，在图1中，过P点作椭圆的法线PK，它的长度即P点的卯酉圈曲率半径N，P点的大地纬度为B。延长KP和OP'，设二者交点为Q，则OQ的长度恰好等于椭球的长短半径之和。现证明如下：

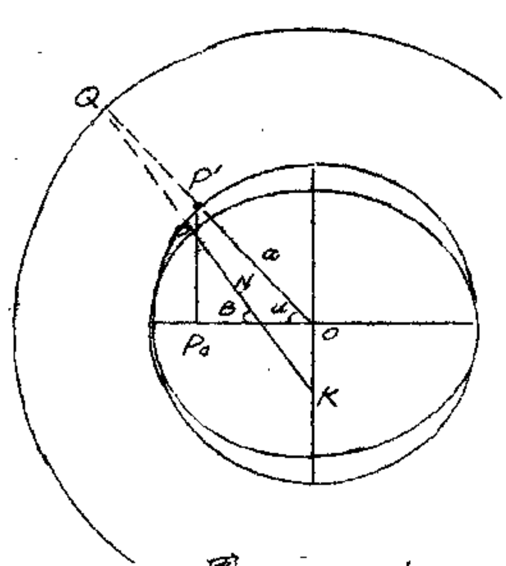


图 1

由图知

$$\overline{OQ}=a+\overline{P'Q} \qquad (1)$$

因$\angle QP'P$与ΔQOK相似，故有

$$\frac{\overline{P'Q}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{P'P}}{\overline{OK}}$$

将（1）式入上式，可得

$$\overline{P'Q} = a\cdot\frac{\overline{P'P}}{\overline{OK}-\overline{P'P}} \qquad (2)$$

由图易知

$$\overline{P'P} = a\sin u - (N\cdot\sin B - \overline{OK}),$$

于是

$$\overline{OK}-\overline{P'P} = N\sin B - a\sin u.$$

顾及大地测量学中 $\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}}{W}\sin B$、$N = \frac{a}{W}$、$\overline{OK} = Ne^2\sin B$，代入以上二式可得：

$$\overline{P'P} = N\sin B\cdot\sqrt{1-e^2}\,(1-\sqrt{1-e^2}),$$

$$\overline{OK}-\overline{P'P} = N\sin B\,(1-\sqrt{1-e^2}).$$

将其代入(2)式可得

$$\overline{P'Q} = a\cdot\sqrt{1-e^2} = b \qquad (3)$$

将(3)代入(1)式即得

$$\overline{OQ} = a+b \qquad (4)$$

由此可以得出结论：延长椭球面上P点的法线KP，与以椭球中心为中心、椭球长短半径之和为半径的球面交于Q点，则Q点的球面纬度即是P点的归化纬度。

(二) 椭球法线与其半径的长度关系

在图2中：P为椭球面上一点，Q为P点法线与半径为a+b的球面的交点，K为P点法线与短轴的交点，P′为OQ与半径为a的球面的交点。设法线由P到短轴的长度为N，由P到Q的长度为F。

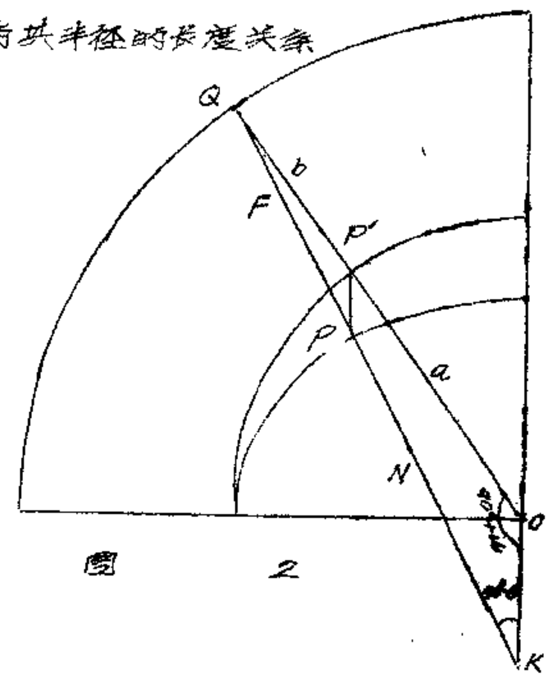


图 2

由平面ΔQOK，按正

按定理得

$$\frac{\overline{KQ}}{\sin(90^\circ+u)} = \frac{\overline{OQ}}{\sin(90^\circ-B)}$$

即

$$\overline{KQ} = \overline{OQ}\,\frac{\cos u}{\cos B}$$

显然 $\overline{KQ} = N+F$、$\overline{OQ} = a+b$ 及大地测量学中 $\frac{\cos u}{\cos B} = \frac{1}{W}$，则得

$$N+F = \frac{1}{W}(a+b) \qquad (5)$$

或

$$a+b = W(N+F) \qquad (6)$$

由大地测量学知道

$$N = \frac{a}{W}, \qquad (7)$$

故得

$$F = \frac{b}{W} \qquad (8)$$

以上四式即椭球法线与其半径的长度关系式。

（三）归化高与大地高的关系

将图2中ΔQOK放大绘成图3，设A为地面一点，大地高为H。过A作椭球短轴的平行线交OQ于A'，则$P'A'$称为A点的归化高，用H'表之。

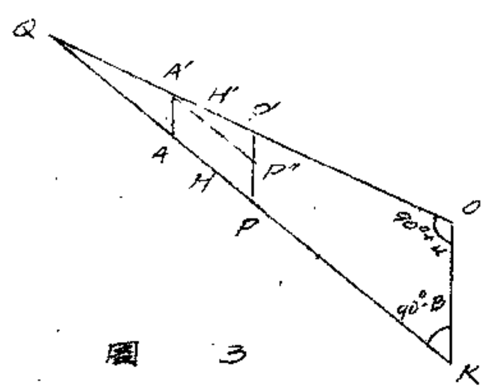


图 3

过A'作$A'P''$平行QK，显然$\Delta A'P'P''$

与△QOK 相似，故有

$$\frac{\overline{P'A'}}{\sin(90^\circ-B)} = \frac{\overline{P''A'}}{\sin(90^\circ+u)}$$

即

$$\overline{P'A'} = \overline{P''A'}\,\frac{\cos B}{\cos u}$$

顾及 $\overline{P'A'} = H'$、$\overline{P''A'} = \overline{PA} = H$ 及 $\dfrac{\cos B}{\cos u} = W$ 则

得

$$H' = WH \qquad (9)$$

或

$$H = \frac{H'}{W} \qquad (10)$$

以上二式即旧化高与大地高的关系式。

二、椭球面和同心球面间的投形关系式

由归化纬度的新定义可知，若Q为与椭球同心且半径为 $a+b$ 的球面上任一点，该点沿椭球面的法线投形到椭球面上为P点，则Q点的球面纬度就是P点的归化纬度。如果再使Q点的球面经度等于P点的大地经度，于是球面上的Q点与椭球面上的P点就建立了唯一确定的对应关系。基于这一原理，就可以将椭球面上的任意点，沿法线方向投形到上述的球面上。反之，也可将该球面上的任意点，沿法线方向投形到椭球面上。对于一条曲线可以看成是一系列的点进行逐点投形，于是就在投形面上得到对应的一条投形曲线。然而如此投形，椭球面上两点间的大地线在球面上的投形曲线通常不是大圆弧，反之，球面上两点间的大圆弧在椭球面上的投形通常也不是大地线。为了在球面上解算大地问题方便起见，将球面上两点间用大圆弧联结，这样球面上大圆弧和对应的椭球面上的大地线之间，在方位角和长度上都将存在一些差异，这种差异可以设法计算出来，最后加以改正。

现在根据以上原理建立椭球面和同心球面间的投形关系，进而导出有关投形计算公式。

（一）投形条件

椭球面向同心球面的投形按下述三个条件进行：

1、球面经度等于大地经度（即经差投形后其值不变）；

2、球面纬度等于归化纬度；

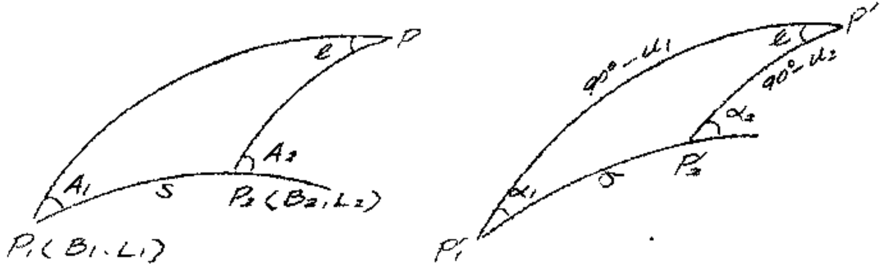
3、球面上两点用大圆弧联结。

这就是说椭球面上的经纬线投形到球面上仍为经纬线。球面上两点用大圆弧联结，就可引用球面三角学的公式进行球面上的计算。前二条件用数学式子可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda = L,\\ \text{或}\quad &\lambda_2-\lambda_1 = L_2-L_1 = l.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi = u,\\ \text{而}\quad &tg\,u = \sqrt{1-e^2}\;tg\,B.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

投影关系如图4所示：PP_1P_2为椭球面上一极三角形，P_1、P_2两点的大地经纬度分别为L_1、B_1，L_2、B_2，P_1P_2曲线的长度为S，P_1处曲线的方位角为A_1，P_2处曲线的前进方位角为A_2。投影到球面上，对应的极三角形为$P'P'_1P'_2$，P'_1、



椭球面上　　　　　　　　球面上

图4

P'_2两点的球面经纬度分别为L_1、u_1，L_2、u_2，大圆弧$P'_1P'_2$的弧度值为σ，P'_1处大圆弧的方位角为α_1，P'_2处大圆弧的前进方位角为α_2。经差以l表之。这里所说的P_1P_2曲线是投影后返为大圆弧的那条对应的曲线。

（二）投影关系式

先写出椭球面和球面上的弧素方程

椭球面上　　　　　　　　球面上

$$dS\cos A = M\,dB,\qquad R\,d\sigma\cos\alpha = R\,du \tag{13}$$
$$dS\sin A = N\cos B\,dl,\qquad R\,d\sigma\sin\alpha = R\cos u\,dl \tag{14}$$
$$dS\sin A = N\,ctg\,B\,dA,\qquad R\,d\sigma\sin\alpha = R\,ctg\,u\,d\alpha \tag{15}$$

由球面上的弧素方程看出，两端的球半径 R 完全可以消去，可见它适用于任意半径的球面。

1. A 与 α 的关系式

我们知道椭球面上（13）、（14）二式是适用任意曲线的，将（13）、（14）式中各之二式相比可得

$$\frac{ds}{d\sigma}=\frac{\cos\alpha}{\cos A}M\frac{dB}{du}, \tag{16}$$

$$\frac{ds}{d\sigma}=\frac{\sin\alpha}{\sin A}N\frac{\cos B}{\cos u}. \tag{17}$$

顾及大地测量学中 $M=\dfrac{a}{V^3\sqrt{1-e^2}}$、$\dfrac{dB}{du}=V^2\sqrt{1-e^2}$

$N=\dfrac{a}{W}$、$\dfrac{\cos B}{\cos u}=W$，代入（16）、（17）式可得

$$\frac{ds}{d\sigma}=\frac{\cos\alpha}{\cos A}\cdot\frac{a}{V}, \tag{18}$$

$$\frac{ds}{d\sigma}=\frac{\sin\alpha}{\sin A}\cdot a \tag{19}$$

由（18）—（19）即可得到曲线方位角和大圆弧方位角的换形关系式：

$$tgA=V tg\alpha. \tag{20}$$

式中 V 亦可用 $\dfrac{\sin B}{\sin u}$ 表示。

我们知道椭球面上的（15）式是仅适用大地线的，将（15）中的二式相比可得

$$\frac{dA}{d\alpha}=\frac{dS}{d\sigma}\cdot\frac{\sin A}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{tgB}{tgu}, \tag{21}$$

将（12）和（19）式代入（21）式可得

$$dA=Vd\alpha. \tag{22}$$

值得注意的是（21）式和（22）式中的 A 是大地线的方位角，

（22）式是大地线方位角和大圆弧方位角的微分关系式。

（由于时间所限（22）式的积分暂未求出）

2. S与σ的关系式

将（18）式平方，其中出现的 tgA 按（20）式用 $Vtg\alpha$ 代换可得

$$\left(\frac{dS}{d\sigma}\right)^2 = a^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{V^2} + \sin^2\alpha\right) \qquad (23)$$

将V用u表出：

$$V^2 = \frac{1}{1-e^2\cos^2 u}, \qquad (24)$$

代入（23）式可得

$$\left(\frac{dS}{d\sigma}\right)^2 = a^2(1-e^2\cos^2 u\cos^2\alpha) \qquad (25)$$

现求α、u与σ的表达式。在图5中，当P_1'、P_2'确定后，对应地有一条确定的大圆弧$\overset{\frown}{P_1'P_2'}$，它与赤道的交点为$P_0'$，它与赤道的交点为$P_0'$，它在$P_0'$的方位角用$\alpha_0$表示。大圆弧$\overset{\frown}{P_0'P_1'}$、$\overset{\frown}{P_1'P_2'}$用$M$、$\sigma$表示。

今设P_1'点及α_1不动，而P_2'沿大圆弧$\overset{\frown}{P_1'P_2'}$随$\sigma$而移动，以$P'$表示移动中的$P_2'$点，对应的球面纬度为$u$，方位角为$\alpha$，则由球面直角三角形$P_0'QP'$可写出

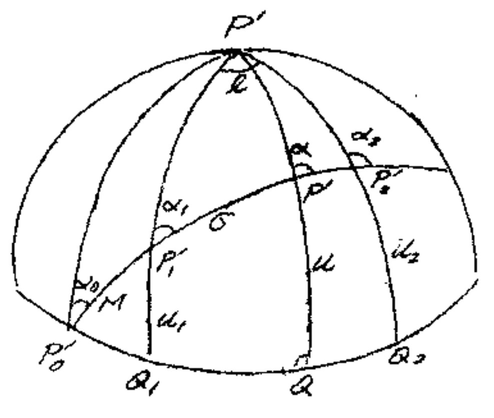


图 5

$$\cos\alpha = ctg(M+\sigma)\,tgu, \qquad (26)$$

$$\sin u = \sin(M+\sigma)\cos\alpha_0. \qquad (27)$$

将以上二式代入（25）式则得

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = a^2\left[1 - e^2\cos^2\alpha_0\cos^2(M+\sigma)\right]$$

设 $\quad k^2 = e^2\cos^2\alpha_0$， (28)

于是得

$$ds = a\sqrt{1-k^2\cos^2(M+\sigma)}\,d\sigma \tag{29}$$

将（29）式积分即可得到S与σ的椭形计算式。为了便于积分，需将（29）式的积分函数展为σ的级数式，

$$\begin{aligned}\sqrt{1-k^2\cos^2(M+\sigma)} = 1 &- \frac{1}{2}k^2\cos^2(M+\sigma)\\ &- \frac{1}{8}k^4\cos^4(M+\sigma)\\ &- \frac{1}{16}k^6\cos^6(M+\sigma)\\ &- \frac{5}{128}k^8\cos^8(M+\sigma)\end{aligned} \tag{30}$$

又

$$\left.\begin{aligned}\cos^2(M+\sigma) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)\\ \cos^4(M+\sigma) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2(M+\sigma)\\ &\quad + \frac{1}{8}\cos 4(M+\sigma)\\ \cos^6(M+\sigma) &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2(M+\sigma)\\ &\quad + \frac{3}{16}\cos 4(M+\sigma) + \frac{1}{32}\cos 6(M+\sigma)\\ \cos^8(M+\sigma) &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2(M+\sigma) + \frac{7}{32}\cos 4(M+\sigma)\\ &\quad + \frac{1}{16}\cos 6(M+\sigma) + \frac{1}{128}\cos 8(M+\sigma).\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

将（31）代入（30），并设

$$
\left.\begin{aligned}
A &= 1-\left(\frac{k^2}{4}+\frac{3k^4}{64}+\frac{10k^6}{512}+\frac{175k^8}{16384}\right)\\
B &= -\left(\frac{k^2}{4}+\frac{4k^4}{64}+\frac{15k^6}{512}+\frac{280k^8}{16384}\right)\\
C &= -\left(\frac{k^4}{64}+\frac{6k^6}{512}+\frac{140k^8}{16384}\right)\\
D &= -\left(\frac{k^6}{512}+\frac{70k^8}{16384}\right)\\
E &= -\left(\frac{5k^8}{16384}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (32)
$$

则有

$$
\sqrt{1-k^2\cos^2(M+\sigma)} = A + B\cos2(M+\sigma) + C\cos4(M+\sigma) + D\cos6(M+\sigma) + E\cos8(M+\sigma) \qquad (33)
$$

将（33）代入（29）式，并顾及

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_0^\sigma d\sigma = \sigma,\\
&\int_0^\sigma \cos2(M+\sigma)d\sigma = \sin\sigma\cos(2M+\sigma)\\
&\int_0^\sigma \cos4(M+\sigma)d\sigma = \frac{1}{2}\sin2\sigma\cos2(2M+\sigma)\\
&\int_0^\sigma \cos6(M+\sigma)d\sigma = \frac{1}{3}\sin3\sigma\cos3(2M+\sigma)\\
&\int_0^\sigma \cos8(M+\sigma)d\sigma = \frac{1}{4}\sin4\sigma\cos4(2M+\sigma)
\end{aligned}\right\} \qquad (34)
$$

于是得到S与σ的极形关系式：

$$
S = a\Big[A\sigma + B\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \frac{1}{2}C\sin2\sigma\cos2(2M+\sigma) + \frac{1}{3}D\sin3\sigma\cos3(2M+\sigma) + \frac{1}{4}E\sin4\sigma\cos4(2M+\sigma)\Big] \qquad (35)
$$

因为在导出（18）（19）式时，所用的M，N都表依赖……

半径 a 的函数式，所以这里导出的（35）式的明显几何意义是椭球面和 $R=a$ 的同心球面间的 S 与 σ 的投影关系式。鉴于球面上的角度和大圆弧的角距与球的半径无关，所以它实际上是椭球面和任意半径的同心球面间的 S 与 σ 的投影关系式。

为了得到具有更明显几何意义的椭球与 $R=a+b$ 同心球面间的 S 与 σ 的投影关系式，可将 a 用 $(a+b)$ 表示：

$$a=a+b-b=(a+b)\left(1-\frac{b}{a+b}\right)$$

$$=(a+b)\left(1-\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a+a\sqrt{1-e^2}}\right)=(a+b)\left(1-\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)$$

$$=(a+b)\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)=(a+b)\left(\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2}\right)$$

$$=(a+b)\left(\frac{\alpha}{2\alpha-\alpha^2}\right)=(a+b)\left(\frac{1}{2-\alpha}\right). \quad (36)$$

于是（35）式可以表作：

$$S=(a+b)\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)\Big[A\sigma+B\sin\sigma\cos(2M+\sigma)+\frac{1}{2}C\sin 2\sigma\cos 2(2M+\sigma)$$

$$+\frac{1}{3}D\sin 3\sigma\cos 3(2M+\sigma)+\frac{1}{4}E\sin 4\sigma\cos 4(2M+\sigma)\Big] \quad (37)$$

该式与（35）式除了几何意义不同外，实质上是完全相同的。所以以下分析公式的精度，化简和适用范围时，仅以（35）式为基础。

由（32）式可知，A、B、C、D、E 诸系数都是 $k^2=e^2\cos^2\alpha_0$ 的函数。当 $\alpha_0=90^\circ$ 时，$k=0$，于是得到

$$S=a\sigma$$

即赤道投影到半径为 a 的同心球面上时长度不变，也就是说该球面与椭球在赤道上相切。可见它相当于该球面与椭球面间的"赤道等距离投影"[3]。

当 $\alpha_0=0^\circ$ 时，$k^2=e^2$，A 的级数和 B、C、D、

已差数最大值时取得最大值，于是

$$S = a\sigma - 最大弦长$$

可见子午线投影后长度变形最大。

所以，下面分析（35）式的精度，从实用观点出发，就从子午线出发，取$e'^2 = e^2$，对于克拉索夫斯基椭球，取$e^6 = 30\times10^{-8}$、$e^8 = 20\times10^{-10}$参加计算，并在分析各项数值时取$\cos n(2M+\sigma)=1$。

先来计算（35）式中含e^8、e^6的各项可能达到的最大值，这时取$\sin n\sigma = 1$，算得结果如下

系数	e^8项	e^6项
	MM	MM
A	0.136	37.4
B	0.218	56.1
C	0.055	11.2
D	0.010	1.2
E	0.001	0.0
Σ	0.420	105.9

顾及到各项符号的一致性，所以将各项数取其总和，就其绝对值而言$\Sigma(e^8项)=0.42^{MM}$，$\Sigma(e^6项)=106^{MM}$。所以当计算精确至毫米时，可以舍弃e^8诸项而得适用于全球的计算公式：

$$S = a\left[A\sigma + B\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \frac{1}{2}C\sin2\sigma\cos2(2M+\sigma) + \frac{1}{3}D\sin3\sigma\cos3(2M+\sigma)\right] \quad (35)$$

式中A、B、C、D按（32）式均取至e^6项。

若当计算精确至米时，还可舍弃e^6诸项，也得到适用于全球的计算公式：

$$S = a\left[A\sigma + B\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + \frac{1}{2}C\sin 2\sigma\cos 2(2M+\sigma)\right]$$

(39)

式中A、B、C按（22）式仅取至k^4项。

现在分析（34）式A、B、C取至k^6项，当对称精确至毫米时所适用的距离，由（38）式知舍弃项为D项，

设 $\Delta S_D = \frac{a}{3}D\sin 3\sigma\cos 3(2M+\sigma)$，

取 $\cos 3(2M+\sigma) = 1$，$\frac{a}{3}D = \overset{MM}{1.25}$，令$\Delta S_D \doteq \overset{MM}{0.5}$

则有

$$\sin 3\sigma \leq \frac{0.5}{1.25} = 0.4000,$$

查三角函数表得$3\sigma = 23°35'$，即$\sigma = 7°51'.7 = 0.1372$弧度，它所相应的球面距离为$S = 875$公里。（37）式与苏联Б·П·莫洛佐夫在《地球椭圆体表面上大地问题解算方法》[3] §13中给出的公式是一致的，即

$$S = \left[A\sigma + B\sin\sigma\cos(2M+\sigma) + C\sin 2\sigma\cos 2(2M+\sigma)\right]$$

(40)

式中

$$\left.\begin{aligned}
A &= 1 - \left(\frac{k^2}{4} + \frac{3k^4}{64} + \frac{5k^6}{256}\right)\\
B &= -\left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{16} + \frac{15k^6}{512}\right)\\
C &= -\left(\frac{k^4}{128} + \frac{3k^6}{512}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(41)$$

（41）式还可写成适于电算的形式：

$$
\left.\begin{aligned}
A &= 1-\{0.25+(0.046875+0.01953125k^2)k^2\}k^2 \\
B &= -\{0.25+(0.0625+0.029296875k^2)k^2\}k^2 \\
C &= -[(0.0078125+0.005859375k^2)k^2]k^2
\end{aligned}\right\} \quad (42)
$$

值得说明的是，由（40）式所求得的S是大圆弧在椭球面的投形曲线的长度，而不是大地线的长度。在文献〔1〕§13中给出了二者之差的算式：

$$
\Delta S=\frac{ae^4}{16}\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0\Big\{\sigma+\sin\sigma\cos(2M+\sigma)
$$

$$
-\frac{\sigma^2}{\sin\sigma}\left[\cos\sigma+\cos(2M+\sigma)\right]\Big\} \qquad (43)
$$

设 $\alpha_0=45°$，$\cos(2M+\sigma)=1$，取 $\sigma=7°51'.7=0.1372$ 弧度（相当 $S=875$ 公里），对于克拉索夫斯基椭球则有

$$
\Delta S=\frac{6378245\times10^3}{16}\times45\times10^{-6}\times\frac{1}{4}\Big\{0.1372+0.1368
$$

$$
-\frac{(0.1372)^2}{0.1368}\left[0.9906+1\right]\Big\}
$$

$$
=4484.7\times0.0001=0.45\ (MM)
$$

当视 $M=0°$ 时，也得上述的同样结果。由此得出结论：在距离不大于875公里的情况下，当计算精确至毫米时，可将算得的S视为大地线长。

（三）反解求S的算例

现将利用（40）、（41）或（42）式反解大地问题所用到的解球面极三角形的有关公式列后：

$$
\left.
\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha_1 &= \frac{\cos u_1 \operatorname{tg} u_2 - \sin u_1 \cos l}{\sin l} \\
\operatorname{ctg}\alpha_2 &= \frac{-\cos u_2 \operatorname{tg} u_1 + \sin u_2 \cos l}{\sin l} \\
\operatorname{tg} M &= \operatorname{tg} u_1 / \cos\alpha_1 \\
\operatorname{tg}\sigma_2 &= \operatorname{tg} u_2 / \cos\alpha_2 \\
\sigma &= \sigma_2 - M \\
2M + \sigma &= \sigma_2 + M \\
\sin\alpha_0 &= \sin\alpha_1 \cos u_1 = \sin\alpha_2 \cos u_2 \\
\cos^2\alpha_0 &= 1 - \sin^2\alpha_0
\end{aligned}
\right\} \quad (4\text{-}4)
$$

算例见附表。算得的S的结果和用高斯平均引数反解公式算得的结果完全一样，从而证明了该变形公式的正确性。