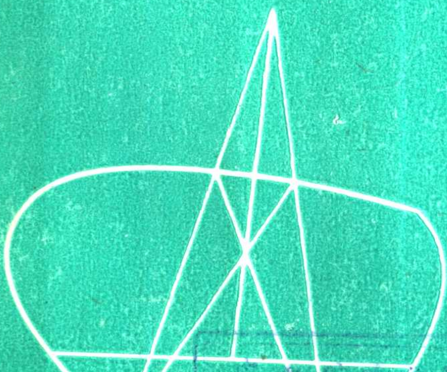
PROJECTIVE GEOMETRY and PROJECTIVE METRICS

H·BUSEMANN P·KELLY

射影几何与射影度量

周纪安 聂子青
金家瑞 周国新 合译



天津师范大学数学系

PROJECTIVE GEOMETRY

and

PROJECTIVE METRICS

H·BUSEMANN P·KELLY

周纪安　聂子青
金家瑞　周国新　合译

天津师范大学数学系

序　言

本书在内容、方法和观点上与这门学科传统的阐述有许多不同之处．在很大程度上这种不同是由于当代的、特别是美国的数学家对于几何的态度的变化．连几何学者也不得不勉强承认，综合几何的绚丽已失去了对新的一代人的吸引力．其原因很清楚：不久以前，综合几何还是从公理出发进行严格推理的唯一学科，然而这种对于许多数学爱好者的基本吸引力，现在已被许多其他学科所具有．而且，在新的领域里进行了很多研究，而综合几何却进展甚微．还有一个美国所特有的原因：有丰富的射影几何内容的个别有吸引力的成果，象在数论里那样，除了极少数例外，竟不被欣赏．这是因为存在一种以应用的普遍性作为唯一准则的倾向．

然而，射影几何和非欧几何的基本成果乃至其方法，对于几何学家就象微积分对于数学分析学家一样是必不可少的．本书为了强调这一事实作出了努力．许多特殊的术语，象"完全四边形"和"配极三线形"将不会在本书内见到，而常常是用一个例子来说明整套漂亮的定理．特殊的结论仅仅在当它们对于提高这门学科的认识被认为是需要时，象在综合双曲几何这一节里那样，或者当它们说明一般方法时，象在线性轨迹这一节里那样，才大量地进行讨论．

另一方面，我们用比通常情况更多的篇幅来讨论距离、运动、面积和垂直性的基本概念．事实上，非欧几何是通过一般度量空间和寻找那些以直线为最短连结的几何这样一个希尔伯特问题而得到的．当然，在这里一般问题只是被公式化了，但这就自然地导致了对除了欧氏几何和两种非欧几何以外的几何学的研究．因而也就导致了这样一种现代观点，即把三种经典几何学看作是一般

几何结构的、彼此紧密相关的特殊情况．在这一点上，教学经验表明，一些对于专家来说是明显的事实，比如欧氏几何的唯一性，在这里需要详细地讨论．

由于分配给几何的时间现在比以前少，许多内容不得不删掉．前面已经说明了为何许多特殊的结论和整个综合法被删掉了[注1]．通过从一开始就引进坐标并交替使用几何的和代数的或解析的论证，我们希望增进平时极为缺乏的从代数语言到几何语言或者反过来的过渡能力．无论什么时候，只要从别的分支而来的方法，看来是更有效的或能提供一种自然的途径，我们就使用，而不忌讳学科的混淆．各种证明也以同样精神来考虑．总的目的是消除把几何看成是一门孤立的和静止的学科的印象，而把几何方法和基本内容作为现代数学的一部分来阐述．

本书的前五章计划作为一年的课程，为此，需要予先具备方程论和基本的矩阵论的知识．准备在第二学期讲的四、五章中，假定学生有一些严格的分析训练和熟悉 ε、δ 方法．群的概念虽被广泛使用，但不要求学生予先知道，而是随用随讲．与大多数数学课程一样，尽管还可能修改，但看来此课程对高年级是最有成效的．

为了突出发展的连贯性而不强调练习的作用，习题都排在每章之后．这些习题是用来进一步熟悉概念和方法的，惯常之类习题居少数．

最后一章具有不同的色彩，它为已经熟练地掌握了前面内容的学生写的．很多定理的证明及由二维到三维的推广留给学生做为作业，以便发挥他们的创造性思维．出于类似的考虑，这一章图示极少，因为我们觉得通过学生自己的构思而达到理解，他们会有更大的长进．第六章的素材和处理方法很适合于课堂讨论．

[注1]　任何一个认真的学生迟早会熟悉上个世纪末的一个伟大发现，即几何的大部分不取决于连续性。然而，在这方面最杰出的成果，能在现代代数几何里找到。而作者相信，在这本书里几何的连续性能得到最充分的讨论，

我们相信，本书将使读者对过去所学几何知识有新的洞晰。为他们将来成为古典微分几何、黎曼几何及其他现代几何中的人材作好准备。他们将从中了解射影方法的内在价值，并可能感到需要尽快地熟悉公理法，例如韦伯伦(Veblen)和杨(Young)的著作，甚至想欣赏一些老式的书，比如雷耶(Reye)的“形势几何”(“Geoiɔetrie der Lage”)或达布(Darboux)的“解析几何原理”(“Prinmpes de geometrie analytigue”。)

赫尔伯特·别斯曼

鲍尔·J·凯里

1952年12月

译者的话

近几年来我们参加了几次兄弟院校主持召开的大专师范院校的射影几何教学调查研究会议，会上许多几何界的专家教授相继介绍了 Herbert Busemann 和 Paul. J. Kelly 著的“Projective Geometry and Projective Metrics”这本书，一致认为这本书不仅可供教师教学参考，也是数学系学生学习高等几何的一本很好的教科书．其中四、五、六章可供高年级作为选修课教材之用．

由于这本书的英文影印原版留存甚少，为应读者之需，我们决定将它译出以供参考．

书中取材精练，观点由浅入深，论理严谨．前三章包括了射影几何的基本内容，但在处理方法和观点上又不同于一般的传统教材．本书不采用公理法结构，而是在普通平面上添加理想元素以后就建立射影平面和射影坐标系．第四、五章专门讨论射影度量和非欧几何，其中特别有趣的是第四章，它与希尔伯特第四问题相联系，通过一般度量空间和寻找连接两点间最短距离的直线得到非欧几何，内容新颖，颇有特色．最后一章中很多概念和定理虽是二维射影平面的推广，但必须经过读者独立思维才能很好地理解和掌握．书中各节还配有足够数量的习题，为我们提高思维境界，进一步丰富书中内容提供了大量素材．

本书出版，曾得到北京师范大学付若男副教授，武汉大学杨文茂副教授，天津师范大学数学系主任侯国荣、教务处副处长韩小坡及相亦军、李欣等同志的帮助和支持，在此深表谢意．

鉴于译者水平所限，疏漏和错误敬请批评指正．

本书由李荫国同志绘图．　　　　译者　1985 年 5 月

目　　录

第五章 非欧几何

第六章 空间几何

第一章 射影平面

§1 理想点

从历史上来看，射影平面这个概念的产生是为了消除在平面几何里由于两条直线可能相交或平行而形成的差异. 后来，射影平面上的几何就发展成为一门重要的独立学科，它是我们前两章要讨论的内容.

在带有介绍性的这一节里，将讨论导出射影平面的带有启发性的想法，严格的定义将在下一节给出.

因为一对不相交的，即平行的直线可以看作是当它们的交点越移越远时的极限位置，所以平行线可以认为是相交于附加到普通平面上的“无穷远点”或“理想点”. 然而，如果要使这个附加点不会产生更多的例外，那么它必须按照这样的方法进行，即两个不同的“点”确定一条直线和两条不同的直线相交于一“点”. 这样，两条平行线无论沿着两个方向中的哪一个方向都必然交于同一个理想点. 假设 L_1 和 L_2 是通过理想点 i 的两条平行线，a 是不在 L_1 和 L_2 上的任一普通点. 因为 a 和 i 可以确定一条直线 L_3，且 L_3 不可能与 L_1 或 L_2 第二次相交，所以通过 a 的 L_3 必然平行于 L_1 和 L_2. 于是附加点 i 就在这三条平行线上. 同理可证它必然在所有平行于 L_1 的直线上.

容易看出，不同的理想点必然加到不同的平行线族上去. 因为若令 M_1 是交 L_1 于普通点的一条直线，作 M_2 平行于 M_1，那么要使 M_1 与 L_1 只有一个交点，M_1 与 M_2 必须交于一个不同于 i 的理想点 j.

其次我们来考虑由两个不同的理想点 i 和 j 所确定的直线

L, L 不可能通过任何一个普通点 a. 因为 a 和 i 确定的直线 L_1 及 a 和 j 所确定的直线 L_2 是两条不同的普通直线，而假如 a、i、j 共线则 L_1 和 L_2 将包含在 L 里了. 因此通过 i 和 j 的直线必然是一条"理想直线".

最后，在这个平面上只能有唯一的一条理想直线. 因为设 L_1 和 L_2 是相交于理想点 i 的两条理想直线，一条过普通点 a 而不过 i 的直线将分别交 L_1 和 L_2 于理想点 j 和 k, 于是这条直线除 j、k 外还有一个普通点 a, 与已知矛盾.

基于上述考虑，我们在每一族平行线上添加一个理想点(与沿着族中任一直线的两个方向的哪一个方向无关)，而且把这些新点的全体看作是一条不包含普通点的理想直线. 于是在这个扩展了的平面上两个不同点确定一条直线，两条不同直线总交于一点.

然而，我们可以想象到，这种扩展平面的方法包含了一些内在的矛盾[注1]. 在几何中当一个问题提出来时，经常以数的体系作为比较的根据. 由于对点、直线等引入了数或坐标，几何体系就算术化了，几何关系就变成了数的关系. 这样，就可以从数的体系是否矛盾或相容看出几何的结构是否矛盾或相容了。

在目前情况下，得到扩展平面算术模型的最简单的方法开始于在直角坐标 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 中的普通平面的表示法. 在这个平面上的一条直线由一个线性方程

$$u\bar{x}+v\bar{y}+w=0$$

给出，其中 u 和 v 不全为 0. 作为直线方程的系数，u、v、w 三个数确定了这一直线. 但是任何与 u、v、w 成比例的其它三数组同样也确定这条直线. 这样，一条确定的直线由所有的三数组 λu, λv,

---

[注1] 例如，把商的概念扩展到带零分母的分数而与分数的某些通常性质不发生矛盾是不可能的。

λw 来表示，其中 $\lambda \neq 0$, u, v 不全为 0.[注2] 若对应于三数组 (u, v, w) 和 (u', v', w') 的直线不同且不平行，由克莱姆法则得到它们的交点 $(\bar{x}, \bar{y})$

$$(1.1)\qquad \bar{x}=\frac{\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}, \qquad \bar{y}=\frac{\begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}, \qquad \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此，

$$(1.2)\qquad x:y:1=\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}.$$

若两直线平行但不重合，则三数组 (u, v, w) 和 (u', v', w') 不成比例，但 u, v 与 u', v' 成比例. 若在(1.2)的右边的第三个行列式为 0，而其余的两个中至少有一个不为 0，这就是交点为理想点的情况. 若理想点由(1.1)给出，它就包含了带 0 的运算，这是不允许的. 然而，直线可以用称为坐标的三个系数来表示这一事实及关系式(1.2)提供了解决此困难的方法，也就是用坐标 (x, y, z) 来表示点，且约定与三数组 (x, y, z) 成比例的三数组 $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$，$\lambda \neq 0$，表示同一点. 我们可把过去点的表示法 $(\bar{x}, \bar{y})$ 改为三数组 (x, y, z) 的形式，用三数组 $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ 或 $(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{y}, \lambda)$ 来表示，其中 $\lambda \neq 0$. 只要令 $\bar{x}=\dfrac{x}{z}, \bar{y}=\dfrac{y}{z}, z \neq 0$，就能把由 (x, y, z) 所表示的普通点变回到 $(\bar{x}, \bar{y})$. 这样，普通点就对应 $z \neq 0$ 的三数组. 若 (u, v, w) 和 (u', v', w') 表示不同的直线，则由关系式(1.2)我们可以把三数组

$$\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

[注 2] 有人可能想用 w 除 $u\bar{x}+v\bar{y}+w=0$ 得到

$$\frac{u}{w}\bar{x}+\frac{v}{w}\bar{y}+1=0,$$

而用 $\left(\dfrac{u}{w}, \dfrac{v}{w}, 1\right)$ 或 $\left(\dfrac{u}{w}, \dfrac{v}{w}\right)$ 来表示直线. 但这样就会漏掉过原点的直线.

作为这两条直线的交点坐标，而不管它们是相交还是平行. 对于相交直线，这个三数组表示普通交点；对于平行直线，它是形如(x, y, z)，$z=0$，的三数组. 由于是不同直线，x, y 不全为 0.

这个扩展了的平面包含除$(0,0,0)$以外的所有三数组(x,y,z)表示的点，其中成比例的三数组表示相同的点. 理想直线上的点仅仅是那些满足线性方程 $z=0$ 的点. 因为这些点可以写成 $0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0$，所以表示理想直线的三数组$(u,v,w)$是$(0, 0, 1)$.

§2 射影平面

我们已经知道了扩展了的笛卡尔平面的数值表示法确实表示一个相容系统. 然而，正如开始所说，我们的主要兴趣不在于这个系统，而在于它的一般化，从而得出射影平面. 为此目的和另外一些原因，改用带下标的符号来表示坐标将是有利的. 也就是用(x_1, x_2, x_3)代替(x, y, z)表示一个点. 点 y 将表为(y_1, y_2, y_3). 对于直线，也同样用带有下标的希腊字母来表示，即直线 ξ 具有坐标(ξ_1, ξ_2, ξ_3)[注3].

这样做的好处是使我们能够在形式上利用向量运算的简明符号. 对于任意两个实数 λ 和 μ 以及两个三数组 (a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3)，$\lambda a+\mu b$规定为

(2.1) $$\lambda a+\mu b=(\lambda a_1+\mu b_1, \lambda a_2+\mu b_2, \lambda a_3+\mu b_3).$$

象在数量积里一样，$a\cdot b$ 或简写为 ab 意味着

(2.2) $$a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i.$$

显然，
$$a\cdot b=b\cdot a,$$
$$(\lambda a+\mu b)(\lambda' a'+\mu' b')=\lambda\lambda'(a\cdot a')+\lambda\mu'(a\cdot b')$$

[注 3] 通常比例常数也使用希腊字母 λ、μ 等，虽然要尽可能保持一致性，但若对每一种用途用一类字母，这样就需要更多种字母. 本书在字母运用上的区别是明显的.

$$+\lambda'\mu(b\cdot a')+\mu\mu'(b\cdot b').$$

正如在向量积里一样，我们令

$$(2.3)\qquad a\times b=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=-b\times a.$$

对于任何数 $a_0, b_0, c_0, d_0, a'_0, b'_0, c'_0, d'_0$，由行列式性质可得

$$\begin{vmatrix}\lambda a_0+\mu b_0 & \lambda' a'_0+\mu' b'_0\\ \lambda c_0+\mu d_0 & \lambda' c'_0+\mu' d'_0\end{vmatrix}=\lambda\lambda'\begin{vmatrix}a_0 & a'_0\\ c_0 & c'_0\end{vmatrix}+\lambda u'\begin{vmatrix}a_0 & b'_0\\ c_0 & d'_0\end{vmatrix}$$

$$+\mu\lambda'\begin{vmatrix}b_0 & a'_0\\ d_0 & c'_0\end{vmatrix}+\mu\mu'\begin{vmatrix}b_0 & b'_0\\ d_0 & d'_0\end{vmatrix}.$$

由此得出

$$(2.4)\qquad (\lambda a+\mu b)\times(\lambda' a'+\mu' b')=\lambda\lambda'(a\times a')+\lambda\mu'(a\times b')$$

$$+\mu\lambda'(b\times a')+\mu\mu'(b\times b').$$

最后，我们引用缩写符号

$$(2.5)\qquad |a,b,c|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

于是

$$(2.6)\qquad a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c=|a,b,c|.$$

设 x：(x_1, x_2, x_3)是任意实三数组，用$[x]$表所有三数组 λx 的类，其中 $\lambda\neq 0$. 显然，若两类三数组有一个共同的三数组，则它们是相同的. 因此，每一类可由它自己的任一个三数组来确定. 若 x 和 y 属于同一类，用 $x\sim y$ 表示，否则就是为 $y\nsim x$. 所有的类都包含无穷多个不同的三数组，只有零类例外，它仅包含一个三数组 $0=(0,0,0)$，因此 $x\sim 0$ 意味着 $x=0$，即 $x_i=0$, $i=1,2,3$.

除零类外的所有类$[x]$的集合，定义为射影平面. 类$[x]$称为射影平面上的一个点. 我们应特别注意上述定义是与第一节无关的. 第一节仅仅为上述定义提供了一个背景. 在笛卡尔平面上的熟悉概念，如两点间的距离、图形的面积、直线的平行等等，在射影平面上都没有定义.

在射影平面上的一条直线定义为满足形如 $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ 的线性方程的点 x 的轨迹(即全体), 其中系数 ξ_i 不全为 0, 即

(2.7) $$x\cdot\xi=0, \xi\neq 0.$$

从以下事实可以看出这个方程确实表示点的轨迹: 若三数组 x 满足它, 则三数组 $y=\lambda x, \lambda\neq 0$, 也满足它. 即从 $x\cdot\xi=0$ 可推出 $y\cdot\xi=0$, 反之亦然. 但不是所有的关于 x_i 的方程都有这种性质, 例如(2, 2, 1)满足方程

$$x_1^2+x_2^2-8x_3=0,$$

但(−2, −2, −1)或(4, 4, 2)却不满足它, 虽然这三个三数组是同一类. 方程

$$f(x)=f(x_1, x_2, x_3)=0$$

对于类[x]成立, 也就是对于类里任一成员都成立的充分条件是: 存在一个整数 k, 使得对于任意数 $\lambda\neq 0$ 有

(2.8) $f(\lambda x)=f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)=\lambda^k f(x)$ 或存在一个实数 k, 使得 $f(\lambda x)=|\lambda|^k f(x)$.

(2.7)给出了第一类的例子, 其中 $k=1$, $f(x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3$. 第二类的例子是: $k=\frac{1}{2}, f(x)=|x_1|^{\frac{1}{2}}+|x_2|^{\frac{1}{2}}+|x_3|^{\frac{1}{2}}$. 第一种情况, $f(x)$ 称为 k 次齐次式, 第二种情况称为正的 k 次齐次式. 在射影几何里我们不会遇到后一种情况, 但我们将在射影度量里讨论它(参看(25.7)).

已知两个方程

$$x\cdot\xi=0 \quad 和 \quad x\cdot\eta=0,$$

其中 ξ 和 η 是固定的, 且 $\xi\neq 0, \eta\neq 0$. 若 $\xi\sim\eta$, 则它们表示点 x 的同一轨迹. 当 $\xi, \eta\neq 0$, 且 $\xi\nsim\eta$ 时, 则由 §1 中的代数可知, 两个轨迹的唯一交点或类是[$\xi\times\eta$]. 因此在类[ξ]和直线 $x\cdot\xi=0$ 之间存在一个一一对应. 因而可以把直线 $x\cdot\xi=0$ 称为直线 ξ. 象在 §1 中那样, 把方程的系数当作直线的坐标, 于是对于固定的 x, $x\cdot\xi=0$ 就变成在直线坐标 ξ_i 中的点[x]的方程.

通过两个不同点 y 和 z，有且仅有一条直线，即 $\xi=y\times z$. 因此，由(2.6)，

$$y\cdot\xi=y\cdot(y\times z)=|y,y,z|=0,$$

$$z\cdot\xi=|z,y,z|=0.$$

这样，本节定义射影平面与普通平面添加理想点的扩展平面有了一个一致的结果：

(2.9)　通过两个不同点 x 和 y 有且仅有一条直线 $x\times y$. 两条不同直线 ξ 和 η 有且仅有一个交点 $\xi\times\eta$.

然而，这里没有"理想点"，直线 $x_3=0$ 或(0, 0, 1)无法与直线 $x_1=0$ 或任何其他直线区分开来.

在§1中扩展了的笛卡尔平面 C 的表示式是把类$[x]$当作点而得到的. 因为在这个平面中的直线有线性方程，平面 C 的点和直线可以当作射影平面 P_c 的元素. 但是在一般射影平面 P 的定义里既没有给出类$[x]$的来源，也没有赋予点和直线以什么几何意义. 这样，P_c 仅仅是二维射影空间的一个例子(见习题[2.2])，然而它是很有用的一个例子. 当然，一般射影平面 P 的定理在 P_c 中是成立的，并且通过 P_c 有一个在包含非射影概念的 C 上的有趣解释. 这就是为什么射影定理有欧几里得的解释.

§3　射影坐标

同一直线上的点称为共线点，通过同一点的直线称为共点线. 由(2.9)可知，任意两点共线，任意两直线共点. 若 x, y, z 是不同的共线点，x 必在直线 $y\times z$ 上，因此 $x\cdot(y\times z)=|x,y,z|=0$，反之亦然. 当两个或更多的点重合时，关系$|x, y, z|=0$ 也成立. 可以类似地讨论直线的三数组. 于是有

(3.1)　三点 x, y, z 共线的充要条件是$|x, y, z|=0$.
　　　三线 ξ, η, ζ 共点的充要条件是$|\xi, \eta, \zeta|=0$.

若 $y\neq z$，则$|x, y, z|=0$ 是 x 在直线 $y\times z$ 上的条件，也是 $y\times z$ 的

方程．另一方面$|x,y,z|=0$意味着存在两个实数λ,μ，使得

(3.2) $$x=\lambda y+\mu z.$$

在这里应特别注意，点[y]和[z]用其代表y和z来表示的话，可能相差一个因数．若y和z用$y'=\lambda' y$，$z'=\mu' z$，$\lambda'\mu'\neq 0$来代替，$x'=\lambda y'+\mu z'$仍是$y\times z$上的点，但一般与x不同．为了得到唯一的点，必须固定y和z的代表．为此，我们采用星号．[y]表类，y表[y]中变动的三数组，y^*在整个讨论中表固定的三数组，于是有

(3.3) 若$y\neq z$且x^*,y^*,z^*是x，y，z的给定代表，则当x在$y\times z$上时，存在唯一确定的数λ、μ，使得

$$x^*=\lambda y^*+\mu z^*.$$

[x]的一般成员是σx^*，$\sigma\neq 0$是任意数，因为$\sigma x^*=\sigma\lambda y^*+\sigma\mu z^*$，所以系数的比仍是$\lambda/\mu$．因此，这个比确定了[$x$]，且可以作为此点在直线$\xi=y\times z$上的横坐标．

更确切地说，若y^*和z^*是不同点y和z的固定代表，则对于任何异于(0, 0)的λ和μ，$\lambda y^*+\mu z^*$是$y\times z$上的一个点．当λ和μ保持比λ/μ不变而变化时，则它就在类[x]中变化．因此点[x]就确定了比λ/μ，而且[x]的固定代表x^*不仅确定比λ/μ，还确定λ、μ本身．除去(0, 0)的数对(λ,μ)称为直线$\xi=y\times z$上的射影坐标．显然，数对($\sigma\lambda,\sigma\mu$)，$\sigma\neq 0$与(λ,μ)表示相同的点．类似于射影平面，一条射影直线由除去零类的所有数对的类组成，其中类[(a,b)]称为一个点．这样，我们就可以说具有坐标λ和μ的ξ是一维射影空间．

选择y和z作为坐标系的生成点或基点，与分别规定它们的坐标为[(1, 0)]和[(0, 1)]是等效的．于是坐标系可由y^*和z^*的选取(或由它们的公共倍数σy^*和σz^*)来确定．一个间接确定代表y^*和z^*进而确定坐标系的方法，是在直线上选取第三个不同点u，使得代表u^*,y^*,z^*满足$u^*=y^*+z^*$，这样，u的坐标为[(1, 1)]，我们把它称为单位点．若$\sigma_1 u^*,\sigma_2 y^*$，$\sigma_3 z^*$是这些点的另一