上海电视大学试用教材

数 学 分 析

上海师范大学数学系编

目　录

第一章　函　　数

§1　实数概述

本课程主要在实数范围内讨论，为此先对实数作简单的叙述.

一、实数

1．有理数　对于数的认识，人类最初是从自然数开始的，即1，2，3，4…，对于自然数，如果挨个数下去是没有穷尽的．任意两个自然数相加或相乘仍然是自然数，这就是说自然数对加法和乘法运算是封闭的．由于人类在生产和商品交换活动中的需要，出现了减法运算．人们发现，不是任何两个自然数相减仍然是自然数，这就要对自然数加以扩充，于是有了零（记为0）和在每个自然数前面加一个负号的新数（如-1，-2，-3，-4…）．我们称自然数为正整数，这些新数为负整数．正整数、零、负整数的全体统称整数．在整数范围内，加、减和乘法运算是封闭的．人类活动的进一步发展，在数学上反映出运算技能的扩大，出现了除法运算．但是任何一个整数除以不等于零的整数不一定还是整数．因此，又要求对整数加以扩充，于是有了分数，如$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{3}$，$-\frac{4}{5}$，$-\frac{101}{12}$等等．每个整数都可以写成以1为分母的分数，即把4写成$\frac{4}{1}$，0写成$\frac{0}{1}$，-12写成$-\frac{12}{1}$等．这样分数的一般形式是$\frac{p}{q}$（其中p、q为整数，$q\neq0$），我们称这种形式的数为有理数.

有理数有以下一些特点:

(1) 任一有理数运用除法运算都可表示成有限十进小数,如

$$\frac{12}{5}=0.24,\ \frac{7}{40}=0.175;$$

或无限十进循环小数,如

$$\frac{1}{3}=0.33\cdots,\ \frac{23}{55}=0.41818\cdots.$$

我们知道有限小数也可以写成以 0 或以 9 为循环节的无限十进循环小数,如

$$2.4=2.4000\cdots\quad \text{或}\quad 2.4=2.3999\cdots.$$

所以我们也常把有理数说成是可以表示为无限十进循环小数的那些数。

反过来,每个无限十进循环小数也都可以用分数形式表示,这可以这样做:设 $R=0.p_1p_2\cdots p_r\dot{q}_1q_2\cdots\dot{q}_t$,则由

$$R=\frac{10^r(10^t-1)R}{10^r(10^t-1)}=\frac{10^{r+t}R-10^rR}{10^r(10^t-1)}$$

有

$$R=\frac{p_1p_2\cdots p_rq_1q_2\cdots q_t-p_1p_2\cdots p_r}{\underbrace{99\cdots9}_{t\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{r\text{个}}}$$

(p_i, q_j(i, $j>0$)为 0, 1, 2, …, 9 中的数).

例
$$0.4\dot{1}\dot{8}=\frac{418-4}{990}=\frac{414}{990}=\frac{23}{55}.$$

(2) 有理数对加、减、乘、除四则运算是封闭的.

(3) 有理数全体具有稠密性,即任意两个不相等的有理数之间还有有理数. 例如,若 a, b 为不相等的两个有理数,不妨设 $a<b$,则有理数 $\frac{a+b}{2}$ 满足不等式

$$a<\frac{a+b}{2}<b,$$

由此还可推得，任何两个不相等的有理数之间有无限多个有理数.

2. 无理数　如果在一直线上(通常画水平直线)，确定一点为原点，一个方向为正向(通常把右端作正向)，并规定一单位长度(图 1-1)，则称这样的直线为数轴. 对任一有理数 a，

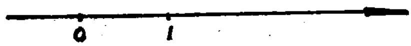

图 1-1

根据它的正负，从原点开始向正向或负向度量距离为 $|a|$ 的一段，把这一段的终点记为 a. 于是、每个有理数都可在数轴上找到一个点和它相对应，我们称这种点为有理点. 是否数轴(即直线)上每个点都被有理数所对应呢？或者说有理点是否填满整个数轴而没有空隙呢？回答是否定的. 我们知道边长为 1 的正方形对角线的长 $\sqrt{2}$ 不是有理数，但它可以在数轴上找到所对应的点(图 1-2). 我们也很容易在数轴上找到对应 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{15}$ 的点(图 1-2)，它们都不是有理点 我们把数轴上有理点之外所有的点称为无理点. 而把无理点对应的数称为无理数，每个无理数都可以表示成无限十进不循环小数，如

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots;$$

$$-\sqrt{5}=-2.23607\cdots;$$

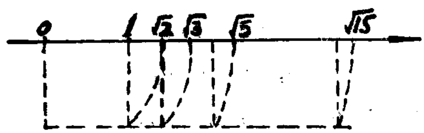

图 1-2

$$\sqrt{15}=3.87298\cdots.$$

无理数之间，无理数与有理数之间的大小关系，依它们在数轴上点的位置来决定，右面的点所对应的数(按正向指的右方而言)大于左面的点所对应的数.

除 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{15}$ 是无理数外，我们还可以举出不少无理数，如圆周率 $\pi=3.14159\cdots$ 就是一个无理数，还有、任一有理数加某一无理数都是无理数，任意两个不相等的有理数之间有无理数，任意两个不相等无理数之间有无理数. 总之，无理数在数轴上是稠密的.

3．实数　有理数和无理数统称为实数，实数有以下一些特性：

(1) $\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}$

(2) 实数对加、减、乘、除四则运算是封闭的；

(3) 实数和有理数一样具有稠密性；

(4) 实数和数轴上的点有着一一对应关系.

由于直线上点的连续性，所以我们也说实数具有连续性. 为了便于叙述，今后我们将“实数 a”与“数轴上的点 a”这两种说法看作有相同的含义，而不加区别.

二、不等式

关于不等式的运算，有下面的一些重要法则：

1．若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

2．若 $a<b$，$p>0$，则 $ap<bp$；

若 $a<b$，$q<0$，则 $aq>bq$.

若数 a 不大于数 b，则记作 $a\leqslant b$；反之，若数 a 不小于数

b，则记作 $a \geqslant b$.

例如：$2 \leqslant 6$，$6 \leqslant 6$，$5 \geqslant 3$，$3 \geqslant 3$.

由 $a<b$ 或 $a=b$ 一定得到 $a \leqslant b$. 但是从 $a \leqslant b$ 想要知道是 $a<b$，还是 $a=b$，那就要根据具体情况进行具体分析，才能判断.

三、绝对值

数 a 的绝对值 $|a|$ 定义如下：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{若 } a>0 \\ 0, & \text{若 } a=0 \\ -a, & \text{若 } a<0 \end{cases}$$

从几何上说，$|a|$ 表示数轴上的点 a 与原点的距离；$|a-b|$ 表示数轴上的点 a 与点 b 的距离. 例如 $x_1=3$ 与 $x_2=5$ 两点的距离等于 $|3-5|=2$.

绝对值有下面的一些基本性质：

1．$|a| \geqslant 0$. 且只当 $a=0$ 时，才有 $|a|=0$；

2．$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$；　　(1)

3．若 h 为正数，则关系式 $|a|<h$ 与不等式 $-h<a<h$ 等价. 同样 $|a| \leqslant h$ 与 $-h \leqslant a \leqslant h$ 等价.

4．对于任何实数 a 与 b 都有

$$|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b| \tag{2}$$

这个不等式称为三角不等式.

[证]　由(1)式有

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,\quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

两式相加得到

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|),$$

它等价于

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \tag{3}$$

这就证明了(2)式取正时的右半部分.

因为 $|a|=|a-b+b|$, 由(3)式有

$$|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

或

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

于是

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|, \tag{4}$$

得(2)式取负时的左半部分, 如果将(3)和(4)中的 b 改为 $-b$, 所得两式仍然成立, 这就证明了(2)式成立.

5.
$$|ab|=|a||b|; \tag{5}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \quad (b\neq 0) \tag{6}$$

(3)式和(5)式还可以推广到 n 个实数的情况, 即

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|; \tag{7}$$

$$|a_1\cdot a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|. \tag{8}$$

以下举例说明绝对值不等式的应用.

例 1. 已知 $|A-a|<\frac{C}{2}$, $|B-a|<\frac{C}{2}$. 求证 $|A-B|<C$.

[解] $|A-B|=|(A-a)-(B-a)|$

$$\leqslant|A-a|+|B-a|\leqslant\frac{C}{2}+\frac{C}{2}=C$$

例 2. 设 $|x-a|<1$. 求证 $|x|<|a|+1$.

[解] 因 $|x|-|a|\leqslant|x-a|$ (由三角不等式), 而 $|x-a|<1$ (由假设), 所以

$$|x|-|a|<1.$$

移项即得

$$|x|<|a|+1.$$

例 3. 若 A 之近似值为 a, 则 $|A-a|$ 称为此近似值的

绝对误差．设有立方体，量其边长为 a．若测量的绝对误差小于 ε，则以 a^3 为立方体体积的近似值时，绝对误差小于 $3\varepsilon(a+\varepsilon)^2$．

［解］ 设边长的精确值为 x，则按题意，$|x-a|<\varepsilon$．现在要估计 $|x^3-a^3|$ 的大小．为此可以利用公式：

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2).$$

由前面的公式(5)、(7)，可得

$$\begin{aligned}|x^3-a^3|&=|x-a|\cdot|x^2+xa+a^2|\\&\leqslant|x-a|\cdot\{|x|^2+|a|\cdot|x|+|a|^2\},\end{aligned}\tag{9}$$

因为 $|x-a|<\varepsilon$，所以 $|x|<|a|+\varepsilon=a+\varepsilon$；而 $a<a+\varepsilon$ 当然成立，因此(9)式括号内每一项都小于 $(a+\varepsilon)^2$．从而

$$|x^3-a^3|<\varepsilon\cdot3(a+\varepsilon)^2.$$

证明完毕．

利用绝对值的定义与性质 3，可以把含绝对值的不等式化为普通的不等式．

例 4． 解不等式 $0<|x-a|<b$

［解］ 由 $0<|x-a|$ 得到 $x\neq a$；由 $|x-a|<b$ 得到

$$-b<x-a<b$$

移项得

$$a-b<x<a+b.$$

因此，不等式的解是 $a-b$ 与 $a+b$ 之间除去 a 以外的一切数（$a-b$ 与 $a+b$ 不在内）．把这些数表示在数轴上，得到以点 $x=a$ 为中心，以 b 为半径的圆在 x 轴上截出来的线段，但线段的两个端点和线段的中点除外，如图 1-3 所示．

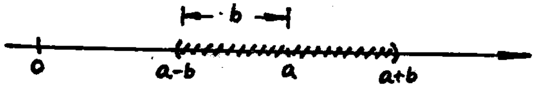

图 1-3

例 5. 解不等式 $|x+1|<2|x|-1$

[解] 因为

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\geqslant 0, \\ -x, & 若\ x<0. \end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & 若\ x\geqslant -1, \\ -(x+1), & 若\ x<-1. \end{cases}$$

所以,若用 $x=0$ 与 $x=-1$ 两点将数轴分为三段(图 1-4), 则对每一段上的 x, 所给不等式可以化为普通的不等式,分别讨论如下:

1) 当 $x\geqslant 0$ 时,所给不等式化为 $x+1<2x-1$, 亦即 $2<x$, 从而这时的解为 $x>2$;

2) 当 $-1\leqslant x<0$ 时, 所给不等式化为 $x+1<-2x-1$, 亦即 $x<-\frac{2}{3}$, 从而这时的解为 $-1\leqslant x<-\frac{2}{3}$;

3) 当 $x<-1$ 时, 所给不等式化为 $-(x+1)<-2x-1$, 亦即 $x<0$. 从而任何 $x<-1$ 都是解.

综合上述三种情况,所求不等式的解是满足不等式

$$x>2 \quad 或 \quad x<-\frac{2}{3}$$

的一切数. 把它们表示在数轴上,就如图 1-4 所示.

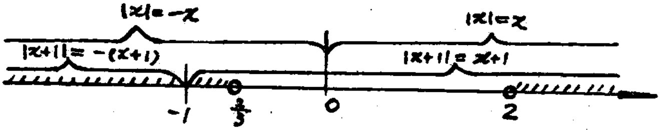

图 1-4

习 题

1. 求下列绝对值不等式中 x 的变化范围并给出图形.

(1) $|x-1|<1$, (2) $|x+1|\leqslant\frac{1}{2}$,

(3) $|x+9|\geqslant 5$, (4) $0<|x-4|<3$,

(5) $0<|x|<a$, (6) $0<|x+a|<b$.

2．解下列不等式，并在数轴上画出 x 的范围．

(1) $(x-1)(x+2)(x-3)<0$,

(2) $0\leqslant\cos x\leqslant 1$, (3) $2<\frac{1}{|x+2|}<3$.

3．求证下列不等式

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\geqslant|a_1|-(|a_2|+\cdots+|a_n|).$$

4．已知 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$．则

$$|AB-ab|\leqslant|A|\cdot|B-b|+|b|\cdot|A-a|<\left(\frac{|A|+|b|}{2}\right)\varepsilon.$$

5．设有一矩形，量其长得 2.45 米，量其宽得 1.23 米，又设长与宽的绝对误差都小于 0.01 米．试证：若以 $2.45\times 1.23=3.0135$ 平方米的近似值 3.01 平方米作为矩形面积的近似值、则其误差不超过 0.02 平方米．（利用习题 4 进行估计）

§2 函数及其图象

函数是本课程的主要究研对象．这一节将阐述函数概念并介绍一些常用的函数．

一、变量与常量

自然界的现象无一不在变化之中．在同一自然现象或技术过程中，常会有某些量不断起着变化．而另一些量却保持着相对静止的状态．例如，由静止状态自由下落的物体，它所

经历的路程 s 与时间 t 满足关系式

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

其中 s 与 t 不断地变，而重力加速度 g 则保持不变.

在同一过程中，会起变化的量称为变量，保持不变的量称为常量. 变量可取不同的值；常量只取固定的值.

常量与变量的划分是相对的，它和我们所研究的过程有紧密联系. 例如，在小范围内，g 可以看作是常量，在大范围内，如发射人造卫星的过程，就要考虑 g 的差别，这时 g 就是变量了.

二、函数概念

在同一过程中，变量的变化不是各自孤立的，而是遵循一定的规律相互联系地进行的.

例 1. 自由落体的路程 s 与时间 t 由公式(1)联系着. t 的值确定了，s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T，则 t 可取 0 到 T 之间的任何值.

例 2. 圆的面积 A 与半径 r 由公式

$$A=\pi r^2$$

联系着，r 的值确定了，A 的值就随之确定. r 可取任何正的数值.

例 3. 图 1-5 是飞轮通过连杆 CK 带动活塞 KB 作直线运动的示意图. 设飞轮半径 OC 长为 r，连杆 CK 长为 l. 则点 K 与 O 的距离s与 OC 和 OK 的夹角 φ 由公式

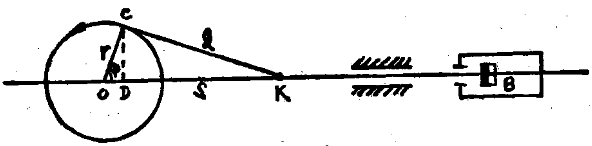

图 1-5

$$s=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}. \tag{2}$$

联系着. 因为由 C 作 OK 的垂线 CD, 则得

$$CD=r\sin\varphi,\quad OD=r\cos\varphi.$$

又由直角三角形 CDK 有

$$DK=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi},$$

而 $s=OD+DK$, 故得公式(2).

根据这个公式, 若 φ 的值确定了, 则 s 的值就随之确定. 其中 φ 可取任何数值(按逆时针方向度量的角是正的, 按顺时针方向度量的角是负的).

例 4. 按邮章规定, 国内外埠平信, 每重 20 克或不足者付邮资 8 分, 以下累计, 不得超过 2 公斤. 则此邮章规定了由信重 W 的值确定邮资 M 的值的规则, 其中 $0<W\leqslant 2000$.

例 5. 在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某天的气温变化描绘在记录纸上, 它是图 1-6 中显示出的曲线. 根据这个图, 我们就能知道某天内 t 从 0 点到 24 点, 气温 T 的变化情况.

例 6. 在货轮的船头下部, 我们可以看到表示货轮吃水深度的吃水线. 货轮吃水越深, 说明排水量越大, 相应地货轮装的货物越多.

某货轮吃水深度与排水量间的对应关系如下表所示:

吃水深度(米)	3	4	5	6	7	8	9
排水量(淡水: 吨)	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

上面几个例子都表明了两个变量间的相依关系, 即对应法则, 根据它, 当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应.

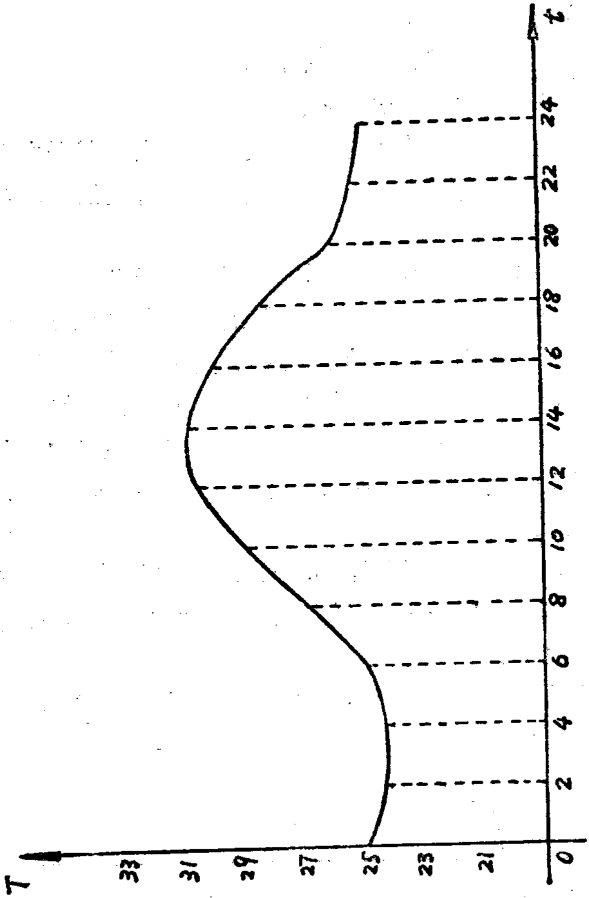

图 1-6