征求意見本

高級中学課本

代　　　数

全一册

（初稿）

人民教育出版社

一九六五年四月

目　录

第一章　指数函数、对数函数

1.1 函数和函数值的記号　我們已經学过正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、三角函数、反三角函数等初等函数，在本章中我們将进一步学习另外两种初等函数.

为了便于研究各种函数，我們先来說明函数和函数值的記号.

两个变量的函数关系可以用一种記号来表示. 例如，y 是 x 的某一个函数，可以記作

$$y=f(x),$$

这里 y 是函数，括号里面的字母 x 是自变量，括号外面的字母 f 表示这一个函数关系.

如果我們同时要表示几个不同的函数关系，那么就要在括号外面采用不同的字母来区别它們. 例如，当我們同时要研究圓的面积 A 和圓的周长 c 与半徑 r 間的关系时，就出現了两个不同的函数关系:

$$A=\pi r^2,\quad c=2\pi r.$$

A 和 c 是 r 的两个不同的函数，我們就在括号外面采用不同的字母来表示它們. 例如写成

$$A=f(r),\quad c=\phi(r).$$

現在我們再来說明表示函数值的記号.

例如，設 $y=f(x)$ 表示函数关系 $y=1.2x+3$. 在 $x=1$ 时，这时函数值是 $1.2\times1+3=4.2$，我們用記号 $f(1)$ 来表示这个函数值，就是 $f(1)=1.2\times1+3=4.2$. 同样，$f(2)$表示在 $x=2$

时函数的对应值，就是 $f(2)=1.2\times2+3=5.4$.

一般地，在函数 $y=f(x)$ 里，当自变量 $x=a$ 时，y 的对应值就用 $y=f(a)$ 表示.

例 1 (1) 設 $f(x)=3x^2+2x-1$, 求 $f(0)$, $f(-4)$;

(2) 設 $\phi(x)=\sin x$, 求 $\phi(45^\circ)$.

解 (1) $f(0)=-1$,

$$f(-4)=3\times(-4)^2+2\times(-4)-1=39;$$

(2) $\phi(45^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 2 設 $F(x)=3x^3-x+\sqrt[3]{x}$, 求证 $F(-x)=-F(x)$.

证明 $F(-x)=3(-x)^3-(-x)+\sqrt[3]{-x}$

$$=-3x^3+x-\sqrt[3]{x}=-(3x^3-x+\sqrt[3]{x}).$$

$$\therefore\quad F(-x)=-F(x).$$

1.2 指数函数 我們来研究下面的問題：

細胞分裂时，1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个，…. 分裂 x 次后，細胞的个数是

$$y=2^x.$$

在这个函数中，自变量 x 出現在指数上. 这种形式为 $y=a^x$ 的函数，叫做**指数函数**.

当 $a>0$ 时，对于 x 的一切有理数的值，a^x 都有一个确定的值；对于 x 的一切无理数的值，a^x 也都有一个确定的值*.

如果 $a=0$, x 取零或負数值时，a^x 就沒有意义；$a<0$ 时，x 取

---

* $a>0$, x 是一个无理数时，a^x 是一个实数. 因为证明較难，本书略去不证. 另外还可以证明（本书也从略），关于有理指数幂的性质和运算法則，对于无理指数幂也都适用.

某些分数值或取无理数值时，a^x 就沒有意义；$a=1$ 时，对于 x 的一切值，$a^x=1$.

今后我們只是在 $a>0, a\neq 1$ 的情况下来研究函数 a^x.

指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$的定义域是全体实数.

現在我們来作指数函数 $y=a^x$ 的图象. 例如：作 $y=2^x$、$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$、$y=10^x$ 的图象.

首先作出下面的数值表：

(1) $y=2^x$:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

(3) $y=10^x$:

x	…	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	…
y	…	0.1	0.32	1	3.16	10	…

根据上面的数值表，可以作出这三个函数的图象(图 1.1).

从这三个函数的图象可以看出，指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$有下面的一些性质:

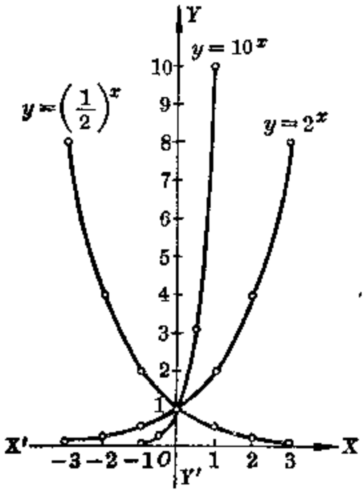


图 1.1

(1) 指数函数 $y=a^x$ 的图象在 x 軸的上方. 这就是說，**x 取任何实数值时，函数値总是正的.**

(2) 指数函数 $y=a^x$ 的图象經过点(0, 1). 这就是說，**不論底数 a 为任何正数，当 $x=0$ 时，函数値都是1.**

(3) **底数 a 大于 1 的指数函数 $y=a^x$，当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$y<1$.**

底数 a 小于 1 的指数函数 $y=a^x$，当 $x>0$ 时，$y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$.

(4) **底数 a 大于 1 的指数函数 $y=a^x$ 是增函数，底数 a 小于 1 的指数函数 $y=a^x$ 是减函数.**

习 题 一

1. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, 求 $f(3)$、$f(-4)$、$f(0)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(\sqrt{2})$、$f(a^2+3)$的值.

2. 已知 $F(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$,求$F(0)$、$F(1)$、$F(2)$、$F\left(\frac{1}{3}\right)$的值.

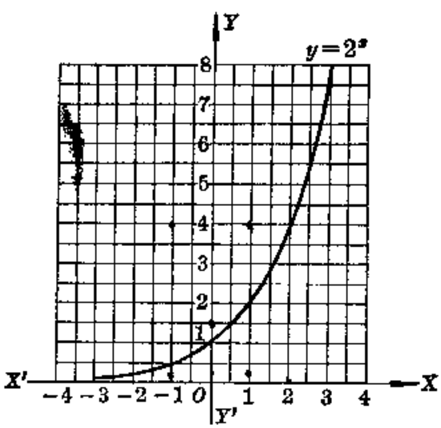
3. 已知 $\phi(x)=x^2$,計算:

(1) $\phi(4)-\phi(3)$;　　(2) $\phi(a+1)-\phi(a)$.

4. 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, 求 $f(-x)$、 $f(x+1)$、 $f(x)+1$、$f\left(\frac{1}{x}\right)$、 $\frac{1}{f(x)}$.

5. 已知 $g(x)=2x^2-5x+3$, 求使 $g(x)=0$的 x 的值.

6. 下面的图是 $y=2^x$ 的图象,根据图象找出当 x 是下列各值时,函数 y 的值(精确到 0.1):



(第 6 題)

$$-2,\quad -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ 3;$$

并且用实际計算的方法来檢驗.

7. (口答)利用上題的图象,找出适合于方程 $2^x=5$ 的 x 的近似值(精确到 0.1).

8. 对于同一坐标系,作下列各函数的图象,并且討論它們的定义域和值域,增减性,x 取什么值时它們的值大于 1,x 取什么值时它們的值小于 1:

(1) $y=4^x$; (2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

9. 一处树林現有木材 30000 立方米,如果每年增殖 2%,x 年后有木材 y 立方米,写出 x 和 y 間的关系式,并且說出这个函数的一些性质.

10. (口答)下列各数哪些大于 1,哪些小于 1?

(1) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; (2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

11. (口答)比較下列每一組里两个冪的大小:

(1) $3^{0.8}$ 和 $3^{0.7}$; (2) $0.75^{1.4}$ 和 $0.75^{1.5}$.

12. (口答)(1) 求整数 x,使 $27<3^x<729$;

(2) x 取什么值时 $2^{5x}>\frac{1}{8}$?

13. (口答)求下列各式中 m 和 n 間的关系:

(1) $2.5^m<2.5^n$; (2) $\left(\frac{3}{4}\right)^m<\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

14. 用图象法解下列各方程(精确到 0.1):

(1) $3^x=4-x$; (2) $2^x=\frac{8}{x}$.

1.3 反函数 我們知道，圓的周长 c 和它的半徑 r 之間有下列函数关系

$$c=2\pi r,$$

这里 r 是自变量，c 看作 r 的函数. 如果把 c 看作自变量，那么我們可以把上面的关系式写成

$$r=\frac{c}{2\pi},$$

这时，就把 r 看作 c 的函数.

把函数 $y=f(x)$ 中的变量 y 作为自变量，从 $y=f(x)$ 中解出 x 得函数 $x=\phi(y)$（如果可能的話），$x=\phi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 事实上，函数 $y=f(x)$ 与 $x=\phi(y)$ 是互为反函数的，因为由 $x=\phi(y)$ 所确定的反函数就是原来的函数 $y=f(x)$. 例如，对于函数 $c=2\pi r$ 来說，函数 $r=\frac{c}{2\pi}$ 是它的反函数；对于函数 $r=\frac{c}{2\pi}$ 来說，函数 $c=2\pi r$ 是它的反函数，所以函数 $c=2\pi r$ 和 $r=\frac{c}{2\pi}$ 互为反函数. 又如，函数 $y=x^2$ 和 $x=\pm\sqrt{y}$，函数 $y=\sin x$ 和 $x=Arc\sin y$ 都互为反函数.

习惯上，自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=\phi(y)$ 通常表示成 $y=\phi(x)$. 例如，函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 通常表示成 $y=\pm\sqrt{x}$.

例 1 求函数 $y=\frac{2}{x-1}$ 的反函数.

解 从 $y=\frac{2}{x-1}$，得 $x=\frac{y+2}{y}$.

因此，函数 $y=\frac{2}{x-1}$ 的反函数是 $y=\frac{x+2}{x}$.

例 2 求函数 $y=3x-2$ 的反函数，并且作出原来的函数和反函数的图象.

解 从 $y=3x-2$，得 $x=\frac{y+2}{3}$. 因此，函数 $y=3x-2$ 的反函数是

$$y=\frac{x+2}{3}.$$

函数 $y=3x-2$ 和它的反函数 $y=\frac{x+2}{3}$ 的图象如图 1.2.

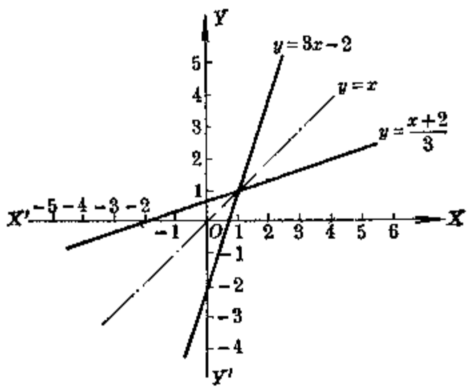


图 1.2

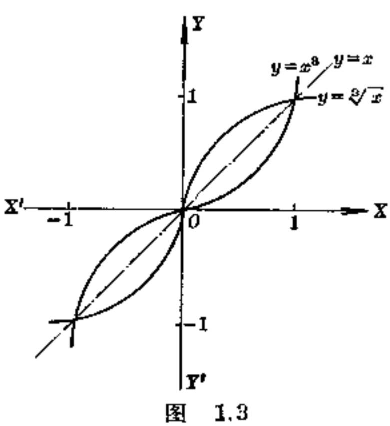


图 1.3

例 3 求函数 $y=x^3$ 的反函数，并且作出原来的函数和反函数的图象.

解 从 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}$. 因此，函数 $y=x^3$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x}$.

函数 $y=x^3$ 和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图象如图 1.3.

从图 1.2 可以看出直线

$y=3x-2$ 和 $y=\frac{x+2}{3}$ 关于直綫$y=x$(就是第Ⅰ、第Ⅲ象限內两軸夹角的平分綫)是对称的. 从图 1.3 可以看出函数 $y=x^3$ 的图象和函数$y=\sqrt[3]{x}$的图象也关于直綫$y=x$是对称的.

我們可以证明下面的定理(证明从略):

反函数 $y=\phi(x)$ 的图象和原来的函数 $y=f(x)$的图象，关于直綫 $y=x$ 是对称的.

根据这个性质，作出了原来的函数的图象以后，就容易作出它的反函数的图象.

1.4 对数函数 在 §1.2中我們讲过細胞分裂問題，知道細胞分裂时，細胞个数 y 是分裂次数 x 的函数，这个函数我們用指数函数 $y=2^x$ 表示. 現在我們来研究相反的問題，例如，要求 1 个細胞經过多少次的分裂，可以得到 1 万个、10 万个、…細胞. 如果用 x 表示分裂后得到的細胞的个数，y 表示所需要分裂的次数，那么 y 和 x 間的函数关系可以用解析式 $2^y=x$ 来表示，写成对数的形式就是

$$y=\log_2 x.$$

函数 $y=\log_a x$ 叫做**对数函数**. 这里底 a 是一个大于零并且不等于 1 的常量.

在指数函数 $y=a^x$ 中，x 是自变量，y 是 x 的函数，如果把 y 看作自变量，那么 x 就是 y 的对数函数：$x=\log_a y$. 因此，指数函数和对数函数互为反函数. 因为习慣上用 x 表示自变量，用 y 表示 x 的函数，所以我們把指数函数記作 $y=a^x$，对数函数記作 $y=\log_a x$.

因为对数函数和指数函数互为反函数，所以 $y=\log_a x$ 的图

象和 $y=a^x$ 的图象关于直綫 $y=x$ 是对称的. 因此,我們只要作出 $y=a^x$ 的图象关于直綫 $y=x$ 的对称图象,就可以得出 $y=\log_a x$ 的图象. 例如,作出 § 1.2 中 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=10^x$ 的三个图象关于直綫 $y=x$ 的对称图象,就可以得出 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{10} x$ 的图象(图 1.4).

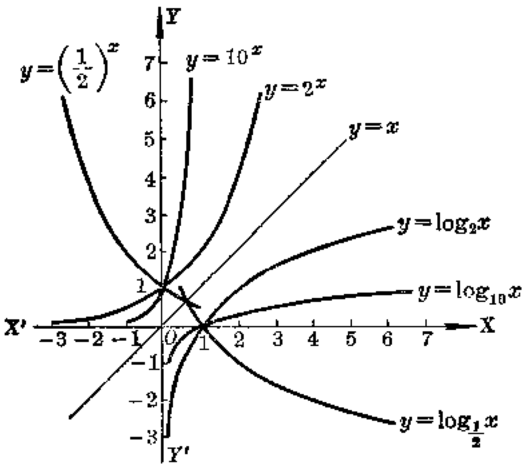


图 1.4

从这三个函数的图象可以看出:

(1) **对数函数 $y=\log_a x$ 的图象都在 y 軸的右方.**

(2) **对数函数 $y=\log_a x$ 的图象經过点(1, 0).**

(3) **底 a 大于 1 的对数函数 $y=\log_a x$ 的图象:当 $x>1$ 时, $y>0$;当 $x<1$ 时, $y<0$.**

底 a 小于 1 的对数函数 $y=\log_a x$ 的图象: 当 $x>1$ 时, $y<0$;当 $x<1$ 时, $y>0$.

(4) **底 a 大于 1 的对数函数 $y=\log_a x$ 是增函数,底 a 小于 1 的对数函数 $y=\log_a x$ 是减函数.**

从上面的(1)可以知道，对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域是 $x>0$，这就是說：

負数和零沒有对数.

从上面的(2)可以知道，

1 的对数永远是 0:　　$\log_a 1=0$.

此外，因为 $a^1=a$，所以根据对数的定义，可以知道 $\log_a a=1$，这就是說：

底的对数等于 1:　　$\log_a a=1$.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_a(x^2)$;　　　(2) $y=\log_a(4-x)$.

解　因为負数和零沒有对数，所以这里各个对数函数中的眞数必須大于 0.

(1) $\because\ x^2>0$,　$\therefore\ x\neq 0$. 所以函数 $y=\log_a(x^2)$ 的定义域是所有适合于 $x\neq 0$ 的实数.

(2) $\because\ 4-x>0$, $\therefore\ x<4$. 所以函数 $y=\log_a(4-x)$ 的定义域是 $x<4$.

log $a^1=0$

例 2　已知 $\log_a(x^2-7x+7)=0$，求 x.

解
$$x^2-7x+7=1,$$
$$x^2-7x+6=0,$$
$$\therefore\ x=6,\ \text{或}\ x=1.$$

例 3　如果 $\log_x(x^2-2)=1$，求 x.

解
$$\because\ x=x^2-2,$$

$$\therefore \quad x^2-x-2=0,$$

$$\therefore \quad x=2, \text{或} x=-1.$$

因为底必须是不等于 1 的正数, 所以 $x=2$.

以后如果沒有特别説明, 所有的眞数都假定是正数.

习 题 二

1. 求下列各函数的反函数:

(1) $y=\frac{3x}{x-2}$;　　　　(2) $y=1+\frac{1}{x}$;

(3) $y=\frac{x-2}{2x-3}$;　　　　(4) $y=\sqrt{x}$.

2. 求下列各函数的反函数, 并且作出原来的函数和它的反函数的图象:

(1) $y=4x-\frac{1}{2}$;　　　　(2) $y=\frac{5}{x+3}$.

3. (口答) (1) 函数 $y=3x+1$ 与 $x=\frac{y-1}{3}$ 的图象是一样嗎? 为什么?

(2) 函数 $y=3x+1$ 与 $y=\frac{x-1}{3}$ 的图象有什么关系?

4. 先作出函数 $y=\frac{1}{8}x^3$ 的图象, 再利用原来的函数和反函数的图象之間的关系作出它的反函数的图象.

5. 作出函数 $y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象, 并且説出这两个函数的相同性质和不同性质.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_a(1+x)$;

(2) $y=\frac{1}{\log_2 x}$;

(3) $y=\log_a \frac{1}{1-3x}$;

(4) $y=\sqrt{\log_3 x}$.

7. (口答)下列对数,哪些是正的,哪些是負的?

(1) $\log_3 2$;　　　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$.

8. (口答)比較下列每一組里两个对数的大小:

(1) $\log_{10}6$ 和 $\log_{10}8$;　　　(2) $\log_7 \frac{1}{4}$ 和 $\log_7 \frac{1}{10}$.

9. 已知

(1) $\log_{x+2}(2x^2+3x-2)=1$;

(2) $\log_a(\sin x+1)=0$,

求 x 的值.

1.5 換底公式　利用常用对数的对数表,可以求得任意一个正数的以 10 为底的对数. 現在我們来证明以其他正数为底的对数的求法,例如,求 $\log_3 5$.

設 $\log_3 5=x$,写成指数式,得

$$3^x=5.$$

两边取对数,得　$x\lg 3=\lg 5$,

$$\therefore\quad x=\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{0.6990}{0.4771}=1.465.$$

就是　　　　$\log_3 5=1.465$.

一般地,我們有下面的**換底公式**:

$$\boxed{\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.}$$

证明 設 $\log_b N=x$, 写成指数式, 得

$$b^x=N,$$

两边取以 a 为底的对数,

$$x\log_a b=\log_a N,$$

$$\therefore\quad x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

就是
$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

在科学技术中常常使用以无理数 $e=2.7182818284\cdots$为底的对数,叫做**自然对数**. 根据对数换底公式,可以得到自然对数与常用对数的关系如下:

$$\log_e N=\frac{\lg N}{\lg e}=\frac{\lg N}{0.4343},$$

就是 $\log_e N=2.303\lg N$.

例 求证: $(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)=1$.

证明 把各个对数都化成以 a 为底的对数, 得

$$\begin{aligned}&(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)\\&=\log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a a}{\log_a c}\\&=\log_a a=1.\end{aligned}$$

1.6 指数方程和对数方程 在指数里含有未知数的方程叫做**指数方程**;在对数符号后面含有未知数的方程叫做**对数方程**. 这两种方程都只有在特殊情况才能够用普通的方法来解, 現在我們来举一些例子.

例 1 解方程：$4^x=2^{x+1}$.

解 从这个方程，得 $2^{2x}=2^{x+1}$.

要使同一个底的幂相等，必須使它們的幂指数相等，就是

$$2x=x+1.$$

$$\therefore \quad x=1.$$

检驗后，知道 1 是原方程的根.

例 2 一个工厂的劳动生产率，如果平均每年比上一年提高 10.4%，那么大約多少年后可以提高到原来的 2 倍？

解 設 x 年后提高到原来的 2 倍，那么可以得到方程

$$(1+10.4\%)^x=2.$$

两边取对数，得

$$x\lg 1.104=\lg 2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{\lg 2}{\lg 1.104}=\frac{0.3010}{0.0430}=7.$$

答：需要 7 年.

例 3 解方程：$\lg(x^2+11x+8)-\lg(x+1)=1$.

解 从这个方程，得：

$$\lg\frac{x^2+11x+8}{x+1}=\lg 10,$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+11x+8}{x+1}=10.$$

解这个方程，得 $x_1=-2,\ x_2=1$.

检驗，$x=-2$ 时，$x+1=-1$，-1 沒有对数，因此 $x=-2$ 不是原方程的根；$x=1$ 时，$\lg 20-\lg 2=\lg 10=1$，

$\therefore \quad x=1$ 是原方程的根.

必須注意，解对数方程时，检驗是不可缺少的一个步驟．因