暑期概率论基础讨论班交流资料之一

概率论基础

〔一〕

中国科学院数学研究所概率统计室

1977.7

第一篇 随机过程通论

“随机过程通论”在 Dellacherie 的专著“容度和随机过程”以后的新发展是“没有概率”的理论，更确切地说，是不依赖于概率测度 $\mathbb{P}$ 的那一部分理论。最近的研究虽已显示了它的重要性，但还没有发展到“成熟”或“定型”的阶段。这样“随机过程通论”可以从两个方面来加以讨论：一方面是“带概率测度 $\mathbb{P}$”的，这一部份实际上是研究“确定”的结构 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$，其中 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ—域族，它满足通常条件（即单调性、右连续性和完备性——$\mathcal{F}_0$ 包含一切 $\mathbb{P}$ 可略集），这一部份 Dellacherie 的“容度和随机过程”一书已经作了比较系统、也令人满意的总结；另一方面是“不带概率测度 $\mathbb{P}$”的，这一部份也是研究一个“确定”的结构 $(\Omega, \mathcal{F}^0, \{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ —— 一个带有上升子 σ—域族的可测空间（而不是概率空间）—— 我们称之谓“可测性理论”，由于没有概率，无完备性可言，$\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 不满足通常条件，因此讨论时常々也不假定它的右连续性，而只假定单调性，以便可以直观地把 $\mathcal{F}_t^0$ 解释为到时刻 t 为止所能获得的全部信息，即可称 $\mathcal{F}_t^0$ 为“信息 σ—域”。

这一篇我们试图既系统地介绍“带概率测度”的理论，即 Dellacherie 书中的第三、四两章的主要内容（与鞅论有密切关系的部份，包括第五章“过程的投影理论”放在下一篇——即第二篇“鞅论”里介绍），也大致介绍“不带概率测定”的理论最近的进展。而为了弄清“通常条件”在过程论中的作用，即弄清过程论中那些结果是“依赖于”通常条件的，那些结果不依赖于通常条件，我们先介绍“不带概率测度”的部分，这部份的结果自然都不依赖于通常条件。

第一章 可测性理论

§1. 适应过程和循序过程

设 $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ 是一个可测空间，$\{\mathscr{F}_t^0\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 是 $\mathscr{F}^0$ 的上升子 σ—域族。即每一个 $\mathscr{F}_t^0 \subset \mathscr{F}^0$ 是 σ—域，而且对 $0 \leq s < t < +\infty$，$\mathscr{F}_s^0 \subset \mathscr{F}_t^0$

令

$$\mathscr{F}_{t+}^0 = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0 \qquad 0 \leq t < +\infty$$

$$\mathscr{F}_{t-}^0 = \bigvee_{s<t} \mathscr{F}_s^0 \qquad 0 < t < +\infty$$

族 $\{\mathscr{F}_t^0\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 称为右连续的，如果对任给的 $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$，$\mathscr{F}_{t+}^0 = \mathscr{F}_t^0$.

对任意的族 $\{\mathscr{F}_t^0\}_{t\in \mathbb{R}_+}$，令 $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t+}^0$，则族 $\{\mathscr{G}_t\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 总是右连续的。

定义 1. 定义在 $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ 上的过程 $\{X_t\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 适应的，如果对每一个 $t \in \mathbb{R}_+$，X_t 是 $\mathscr{F}_t^0$ 可测的。

如果不是先给族 $\{\mathscr{F}_t^0\}$，而是先有过程 $\{X_t\}_{t\in \mathbb{R}_+}$，那么令 $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$（右边表示由 $\{X_s\}_{0\leq s\leq t}$ 所产生的 σ—域）则 $\{X_t\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 总是适应的，这样定义的族 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 常称为"过程 $\{X_t\}$ 的自然 σ—域族"。

定义 2. 定义在 $(\Omega, \mathscr{F}^0)$ 上的过程 $\{X_t\}_{t\in \mathbb{R}_+}$ 称为 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 循序可测的，如果对每一个 $t \in \mathbb{R}_+$,

映射 $(S,\omega)\longrightarrow X_S(\omega)$ 是从可测空间 $([0,t]\times\Omega,$ $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t^0)$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上的可测函数。

一个循序可测的过程显然是一个适应过程，但一般来讲，适应过程未必是循序可测的。为了验证一个过程是否循序可测，我们可以只验证一个形式上稍弱但实际上等价的条件：

引理1、如果 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是适应的，而且对每一个 $\varepsilon>0$，$\{X_t\}$ 关于族 $\{\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是循序可测的，那么 $\{X_t\}$ 关于族 $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 也是循序可测的。

证明：表 $[0,t]\times\Omega$ 上的函数 $X_S(\omega)$ 成

$$X_S(\omega)=\lim_{\varepsilon\to 0} X_S(\omega)I_{[0,t-\varepsilon]}(S)+X_t(\omega)I_{\{t\}}(S)$$

无论 $X_S(\omega)I_{[0,t-\varepsilon]}(S)$ 还是 $X_t(\omega)I_{\{t\}}(S)$ 都是 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t^0$ 可测的，故限于 $[0,t]\times\Omega$，$X_S(\omega)$ 也是 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t^0$ 可测的，从而 $\{X_t\}$ 是 $\{\mathcal{F}_t^0\}$ 循序过程。

如果除了 $\{X_t\}$ 的适应性以外，引理1的其它条件成立，那么对任给的 $\varepsilon>0$，$[0,t]\times\Omega$ 上的函数 $X_S(\omega)$ 总是 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0$ 可测的，特别，$X_t(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0$ 可测的，ε 任意，可见 $X_t(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_{t+}^0$ 可测的，从而 $\{X_t\}$ 是 $\{\mathcal{F}_{t+}^0\}$ 循序可测的。

示性函数为循序过程的子集称为“循序子集”。为要 $F\subset\mathbb{R}_+\times\Omega$ 是循序子集，当且仅当对每一个 $t\in\mathbb{R}_+$，$F\cap[0,t]\times\Omega\in\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t^0$，从而全体循序子集组成乘

积σ一域 $\mathscr{L}=\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{F}^0$ 的一个子σ一域，记作 $\mathscr{L}_1$，称为循序σ一域。

为要过程 $\{X_t\}$ 是循序过程，当且仅当 $\{X_t\}$ 作为 $(E=R_+\times\Omega,\ \mathscr{L}_1)$ 到 $(R,\mathscr{B})$ 上的映射是可测的。

定理 1．每一个适应的右（或左）连续过程 $\{X_t\}_{t\in R_+}$ 都是循序过程。

证明：讨论右连续的情形，左连续情形相似，从略。固定 $t\in R_+$，对每一个整数 n，令

$$X_s^{(n)}(\omega)=\begin{cases}X_0(\omega) & s=0\\ \vdots & \\ X_{\frac{kt}{2^n}}(\omega) & s\in\left(\frac{(k-1)t}{2^n},\frac{kt}{2^n}\right]\\ \vdots & \end{cases}$$

则 $X^{(n)}$ 是 $(0,t]\times\Omega$ 上的 $\mathscr{B}((0,t])\times\mathscr{F}_t^0$ 可测映射，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，在 $(0,t]\times\Omega$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}X^{(n)}=X$．故限于 $(0,t]\times\Omega$，X 是 $\mathscr{B}((0,t])\times\mathscr{F}_t^0$ 可测的，即 X 是循序过程。

§2、轨道的正则性

在这一节，我们固定 $(\Omega,\mathscr{F}^0,\{\mathscr{F}_t^0\})$．"适应性"、"循序可测性"等都是关于族 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 的。为了简化叙述，我们用 cfr 表示"右连续"，cfr lfl 表示"右连续且左极限存在"（cfr 一般指 $(0,+\infty)$ 上，lfl 或者"左连续"（简记成 cfl）一般指 $(0,+\infty)$ 上即可）。其它如 lfl lfr，cfl lfr 等有相应的意义(例如这里分别表示"左、右极限均存在"和"左连续右极

限存在”)

设D是$\mathbb{R}_+$的一个可列稠密子集，$\{X_s\}_{s\in D}$是以D为参数集的“适应过程”——即对每一个$s\in D$，X_s是$\mathcal{F}_s^0$-可测的。

定理2. 对每一个$t\geq 0$，令

$$\bar{Y}_t^+=\limsup_{s\in D\ s\searrow t} X_s$$

$$\underline{Y}_t^+=\liminf_{s\in D\ s\searrow t} X_s$$

其中$s\searrow t$表示s从上趋于t，即$s\geq t$，且s趋于t，则$\{\bar{Y}_t^+\}$、$\{\underline{Y}_t^+\}$关于族$\{\mathcal{F}_{t+}^0\}$是循序可测的。对每一个$t\in(0,+\infty)$，令

$$\bar{Z}_t^-=\limsup_{s\in D\ s\uparrow\uparrow t} X_s$$

$$\underline{Z}_t^-=\liminf_{s\in D\ s\uparrow\uparrow t} X_s$$

其中$s\uparrow\uparrow t$表示s严格从下趋于t，则$\{\bar{Z}_t^-\}$、$\{\underline{Z}_t^-\}$关于族$\{\mathcal{F}_t^0\}$是循序可测的。

证明：对每一个正整数n，定义一个过程$\{Y_t^n\}$如下：如果$t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})$，$Y_t^n=\sup_{s\in D_t} X_s$，其中$D_t=D\cap(t,\frac{k+1}{2^n})$。

当$\varepsilon>\frac{1}{2^n}$时，过程$\{Y_t^n\}$是适应于族$\{\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$的，又具有右连续性，因而关于这个族是循序可测的，当然过程

$$Y_t=\limsup_{s\in D\ s\searrow t} X_s=\lim_{n\to\infty} Y_t^n$$

关于族$\{\mathcal{F}_{t+\varepsilon}^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$也是循序可测的，依引理1下面的说明，$\{Y_t\}$关于族$\{\mathcal{F}_{t+}^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$是循序可测的。为要得到关于$\{\bar{Y}_t^+\}$

的结论，只需注意到

$$\overline{Y}_t^{+} = Y_t I_{\{t \bar{\in} D\}} + (Y_t \vee X_t) I_{\{t \in D\}}$$

即可。另外三个结论可以用同样的方法证明。

定理3、 a)、令

$W = \{\omega: X.(\omega)$ 是 R_+ 上的某一个 Cfr 映射

限于 $D\}$

则 W 是一个 $\mathcal{F}^{\circ}$-解析余集（从而属于 $\mathcal{F}^{\circ}$ 的“普遍完备化”——即是一个 $\mathcal{F}$-普遍可测集）。

b)、令

$W' = \{\omega: X.(\omega)$ 是 R_+ 上某一个 Cfr lfl 映射

限于 $D\}$

是 $\mathcal{F}^{\circ}$-可测集。

证明： a) 把过程的状态空间视为紧距离空间 $\overline{R} \cup \{\partial\}$，其中 $\overline{R} = [-\infty, \infty]$，$\partial$ 是“孤立点”。令

$$X_{t+}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s \in D, s \downarrow t} X_s(\omega) & \text{如果极限在 } \overline{R} \text{ 中存在} \\ \partial & \text{其余情形} \end{cases}$$

$$X_{t-}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s \in D, s \uparrow\uparrow t} X_s(\omega) & \text{如果极限在 } \overline{R} \text{ 中存在} \\ \partial & \text{其余情形} \end{cases}$$

对 $t \in D$，$X_{t+}(\omega)$ 的存在性（即如果按上述定义，$X_{t+}(\omega) \in \overline{R}$）意味着 $X_{t+}(\omega) = X_t(\omega)$。

再注意到（引用定理2的记号）

$$X_{t+}(\omega) = \begin{cases} \overline{Y}_t^{+}(\omega) & \text{如果 } \overline{Y}_t^{+}(\omega) = \underline{Y}_t^{+}(\omega) \\ \partial & \text{其余情形} \end{cases}$$

$\overline{Y}^+$、$\underline{Y}^+$都是$\{\mathcal{F}^0_{t+}\}$循序可测的，当然更是乘积可测的，从而X_{t+}是$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^0$可测的。同理利用函数$\overline{Z}^-$、$\underline{Z}^-$可以证明$X_{t-}$是$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^0$可测的。

令$A=\overline{\mathbb{R}}\cup\{\partial\}\setminus\mathbb{R}$，则$A$是解析集（事实上$A$是$\overline{\mathbb{R}}\cup\{\partial\}$的紧子集）。再令

$$H=\{(t,\omega):\ X_{t+}(\omega)\in A\}$$

$$H'=\{(t,\omega):X_{t+}(\omega)\in A\}\cup\{(t,\omega):X_{t-}(\omega)\in A\}$$

那么H和H'作为解析集经过可测映射的逆象或两个这种集之併，是$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^0$-解析的（其实它们还是$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^0$-可测的）。

W和W'的补集分别是H和H'在Ω上的投影，从而都是$\mathcal{F}^0$-解析的，我们已经证明了W和W'是$\mathcal{F}^0$-解析余集，从而是$\mathcal{F}^0$普遍可测集。特别，如果存在一个概率测度$\mathbb{P}$，使得$\mathcal{F}^0$是$\mathbb{P}$-完备的，那么W、$W'\in\mathcal{F}^0$。

b). 下面我们来证明W'是$\mathcal{F}^0$-可测集。对任给$\varepsilon>0$，令$T^\varepsilon_0(\omega)=0$

$$Z^\varepsilon_0(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D,\,s\downarrow 0} X_s(\omega) & \text{如果这个极限存在}\\ \partial & \text{其余情形}\end{cases}$$

并归纳地定义

$$T^\varepsilon_{n+1}(\omega)=\inf\{t\in D: t>T^\varepsilon_n(\omega), |X_t(\omega)-Z^\varepsilon_n(\omega)|>\varepsilon\}$$

（约定$\inf\varnothing=+\infty$，以及ε充分小，以致对任何实数a，$|a-\partial|\geq\varepsilon$）

$$Z^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D,\, s\searrow T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)} X_s(\omega) & \text{如果 } T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)<+\infty\text{，而且这个极限存在}\\ \partial & \text{其余情形}\end{cases}$$

从 $\{T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)<s\}=\bigcup\limits_{t\in D\cap[0,s)}\left[\{T^{\varepsilon}_{n}(\omega)<t\}\cap\{|X_t-Z^{\varepsilon}_{n}|>\varepsilon\}\right]$

$$Z^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)=\begin{cases}\bar{Y}^{+}_{T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)}(\omega) & \text{如果 } T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)<+\infty\text{，}\\ & \text{而且 } \bar{Y}^{+}_{T^{\varepsilon}_{n+1}}=Y^{+}_{T^{\varepsilon}_{n+1}}\\ \partial & \text{其余情形}\end{cases}$$

知 $\{T^{\varepsilon}_{n}\}_{n\geq 0}$，$\{Z^{\varepsilon}_{n}\}_{n\geq 0}$ 都是 $\mathcal{F}^0$-可测函数，故待证结论可以从下列的引理推出。

引理2、 $W'=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}T^{2^{-k}}_{n}(\omega)=+\infty\}$

证明：如果 $\omega\in W'$，$X.(\omega)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上的某一个 cfr 映射限于 D，因此，只要 $T^{\varepsilon}_{n}(\omega)<+\infty$，就有 $Z^{\varepsilon}_{n}(\omega)\in\mathbb{R}$，而且 $T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)>T^{\varepsilon}_{n}(\omega)$，及 $d(Z^{\varepsilon}_{n}(\omega),Z^{\varepsilon}_{n+1}(\omega))\geq\varepsilon$．特别如果 $T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)<+\infty$，$\omega$ 的轨道在 $[T^{\varepsilon}_{n}(\omega),T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega)]$ 上的振幅不小于 ε，但轨道的左极限存在性确保了在有限距离内，$\{T^{\varepsilon}_{n}(\omega)\}_{n\geq 0}$ 不能有极限点，从而对一切 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}T^{\varepsilon}_{n}(\omega)=+\infty$．

反之，设 $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}T^{\varepsilon}_{n}(\omega)=+\infty$，在 D 上定义一个 cfr lfl 映射 f_{ε} 如下：

$f_{\varepsilon}(t)=Z^{\varepsilon}_{n}(\omega)$ 如果 $t\in D\cap[T^{\varepsilon}_{n}(\omega),T^{\varepsilon}_{n+1}(\omega))$，那么

对一切 $t\in D$，我们有 $d(X_t(\omega),f_\varepsilon(t))\le\varepsilon$. 如果这一性质对一串趋于 0 的 ε 值——例如 $\varepsilon=2^{-k}$——都成立，我们看到 $X_\cdot(\omega)$ 是 D 上 cfrlfl 映射一致收敛的极限。而 $f_\varepsilon(t)$ 显然可扩充成 $\mathbb{R}_+$ 上的 cfrlfl 映射，故 $X_\cdot(\omega)$ 是 $f_\varepsilon(t)$ 一致收敛极限这一个 $\mathbb{R}_+$ 上 cfrlfl 映射限于 D，即 $\omega\in W'$，引理得证。

在讨论以整个 $\mathbb{R}_+$ 为参数的随机过程时，相应于定理 2 的结果需要用到"通常条件"，而相应于定理 3 的结果则不需要，我们有：

定理 4．设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是乘积可测过程，令 Ω_{rl}，Ω_r，Ω_c 分别表示 Ω 的下列子集，其元素 ω 相应的轨道 $X_\cdot(\omega)$ 是 cfrlfl，cfr，和连续映射。那么这三个集的补都是 $\mathcal{F}^0$-解析的，即它们都是解析余集，从而是 $\mathcal{F}^0$ 普遍可测集。

证明：我们讨论 Ω_r 作为例子，另外两种情形证明方法相同，从略。用 D 表示 $\mathbb{R}_+$ 中全体有理数构成的可列稠集，并定义

$$X_{t+}(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\in D,\,s\downarrow t}X_s(\omega) & \text{如果此极限在 }\mathbb{R}\text{ 中存在}\\ \partial & \text{其余情形}\end{cases}$$

这个过程是可测的（取 $\mathcal{F}_t^0\equiv\mathcal{F}^0$，根据定理 2，

$$X_{t+}=\begin{cases}\overline{Y}_t^+ & \text{如果 }\overline{Y}_t^+=\underline{Y}_t^+\\ \partial & \text{其余情形}\end{cases}$$ 是 $\{\mathcal{F}_t^0\}$ 循序可测的，

但这时循序 σ-域就是乘积 σ-域）。$X_\cdot(\omega)$ 在整个 $\mathbb{R}_+$ 上右连续当且仅当 $X_t(\omega)=X_{t+}(\omega)$ 对一切 t 成立。而 Ω_r^c 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^0$ 可测集 $\{(t,\omega):X_t(\omega)\ne X_{t+}(\omega)\}$ 的投影，因此它是 $\mathcal{F}^0$-解析的。

§3. 可选时

和§2一样，本节我们继续固定$(\Omega, \mathcal{F}^0, \{\mathcal{F}_t^0\})$. 为了方便起见，添加两个σ-域$\mathcal{F}_{0-}^0$ $\mathcal{F}_\infty^0$到族$\{\mathcal{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$，适合$\mathcal{F}_{0-}^0 \subset \mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_\infty^0$对一切$t\in\mathbb{R}_+$，并约定对$t<0$，令$\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{0-}^0$，而$\mathcal{F}_{\infty-}^0 = \bigvee\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t^0$. 如未明确指出$\mathcal{F}_{0-}^0$和$\mathcal{F}_\infty^0$，可认为$\mathcal{F}_{0-}^0 = \mathcal{F}_0^0$，$\mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}_{\infty-}^0$或$\mathcal{F}_\infty^0 = \mathcal{F}^0$。

随机时间（或称可选时，停止时间等）

定义3. 定义在Ω上取值于$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$中的随机变量$T(\omega)$称为$\{\mathcal{F}_t^0\}$随机时间、或者是关于$\{\mathcal{F}_t^0\}$的可选时，如果对每一个$t\in\mathbb{R}_+$，

$$\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t^0 .$$

注：我们常称满足条件：

$$\{T<t\}\in\mathcal{F}_t^0, \qquad \text{对一切 } t\in\mathbb{R}_+$$

的T为宽可选时。但这并未引进实质性的新概念：为要T是宽可选时，当且仅当T是关于族$\{\mathcal{F}_{t+}^0\}$的可选时。当族$\{\mathcal{F}_t^0\}$右连续时，宽可选时的概念与可选时的概念等价。

宽可选时的另一个特征质量是：对一切$t\in\mathbb{R}_+$，$T\wedge t$是$\mathcal{F}_t^0$可测的。

与随机时间相联的σ-域。

定义4. 设T是关于$\{\mathcal{F}_t^0\}$的可选时，我们称由具有下列性质的事件$A\in\mathcal{F}_\infty^0$：

$$A\cap\{T\leq t\}\in\mathscr{F}_t^0 \qquad \text{对一切 } t\in R_+,$$

所构成的 σ-域为"T前事件 σ-域，并用 $\mathscr{F}_T^0$ 表示之。

当T是一个非负常数r时，$\mathscr{F}_T^0$ 就是 σ-域 $\mathscr{F}_r^0$，因此概念和名称是合适的。

对每一个 $t\in R_+$，令 $\mathscr{G}_t^0=\mathscr{F}_{t+}^0$ ($\mathscr{G}_{0-}^0=\mathscr{F}_{0-}^0$, $\mathscr{G}_\infty^0=\mathscr{F}_\infty^0$)，并设$T$是一个 $\{\mathscr{G}_t^0\}$ 可选时，即 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 宽可选时，那么为要事件A属于 $\mathscr{G}_T^0$ 当且仅当 $A\in\mathscr{G}_\infty^0=\mathscr{F}_\infty^0$，而且

$$A\cap\{T<t\}\in\mathscr{F}_t^0,\ \text{对一切} t\in R_+ \text{成立}$$

用记号 $\mathscr{F}_{T+}^0$ 来表示 σ-域 $\mathscr{G}_T^0$ 是完全自然的。

定理5、设T是一个 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 可选时，为要 $A\in\mathscr{F}_T^0$，当且仅当 $A\in\mathscr{F}_\infty^0$，而且如下定义的随机变量 T_A：

$$T_A(\omega)=\begin{cases} T(\omega) & \omega\in A \\ +\infty & \omega\bar{\in} A\end{cases}$$

是一个 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 可选时。

其证明是不足道的，根据 $\mathscr{F}_T^0$ 的定义即可推出，从略。

定义5、设T是一个 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 可选时，我们称由 $\mathscr{F}_{0-}^0$ 及形如

$$A\cap\{t<T\},\ t\geq 0,\ A\in\mathscr{F}_t^0$$

的事件所生成的 σ-域为"严格T前事件 σ-域"，并用 $\mathscr{F}_{T-}^0$ 来表示之。

读者能够证明 $\mathscr{F}_{T-}^0$ 也是由下形的集：

$$A\cap\{t\leq T\},\quad t\geq 0,\quad A\in\mathscr{F}_{t-}^0$$

所生成的，但该用起来不甚方便。

此定义不仅对可选时有意义，而且对一切非负随机变易 $T \geq 0$ 都有意义。

如果我们令 $\mathscr{G}_t^0 = \mathscr{F}_{t+}^0$，$t \in R_+$；$\mathscr{G}_{0-}^0 = \mathscr{F}_{0-}^0$，我们有 $\mathscr{G}_{T-}^0 = \mathscr{F}_{T-}^0$ 对一切 T 成立（不仅对一切 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 可选时，而且对一切 $\{\mathscr{G}_t^0\}$ 可选时——即 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 宽可选时都成立，其实对一切非负随机变易 $T \geq 0$ 成立）

随机时间的初等性质

定理 6. a) 设 S、T 是两个可选时，那么 $S \wedge T$ 和 $S \vee T$ 是可选时。

b) 设 $\{S_n\}$ 是可选时的增序列，则 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是可选时。

c) 设 $\{S_n\}$ 是可选时的降序列，则 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 是宽可选时，如果序列 $\{S_n\}$ 是"尾定"的，即对每一个 ω，存在一个整数 n，使得当 $m \geq n$ 时，总有 $S_m(\omega) = S_n(\omega)$，那么 S 是可选时。

定理中以及今后（在这一章里），凡与 σ—域族有关的概念和性质而未指明哪一个 σ—域族时，均指本节一开始固定下来的 σ—域族 $\{\mathscr{F}_t^0\}$，例如说"S 是可选时"乃指"S 是 $\{\mathscr{F}_t^0\}$ 可选时"等等。

证明：a) 从 $\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$ 及 $\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$ 分别推出。

b) $\{S \leq t\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{S_n \leq t\} \in \mathscr{F}_t^0$.

c) $\{S<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n<t\}$，在严格的情形有
$\{S\leq t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n\leq t\}\in\mathcal{F}_t^0$.

由此我们立即得出结论：所有可选时构成的集对运算（$\vee c$）是封闭的，所有宽可选时构成的集对运算（$\vee c$、$\wedge c$）以及可列 lim inf 和 lim sup 都是封闭的。

定理7．a）对每一个可选时S，我们有$\mathcal{F}_{S-}^0\subset\mathcal{F}_S^0$，而且$S$是$\mathcal{F}_{S-}^0$可测的。

b）设S和T是两个可选时，满足$S\leq T$，那么$\mathcal{F}_S^0\subset\mathcal{F}_T^0$，$\mathcal{F}_{S-}^0\subset\mathcal{F}_{T-}^0$；如果$S<T$处处成立，那么我们有$\mathcal{F}_S^0\subset\mathcal{F}_{T-}^0$（若$\mathcal{F}_{0-}^0=\mathcal{F}_0^0$则仅在$\{T>0\}$处$S<T$即可推出$\mathcal{F}_S^0\subset\mathcal{F}_{S-}^0$，若$\mathcal{F}_{\infty-}^0=\mathcal{F}_\infty^0$则仅在$\{S<+\infty\}$上$S<T$即可推出$\mathcal{F}_S^0\subset\mathcal{F}_{T-}^0$）

c）设S和T是两个可选时，那么

(i) 对每一个$A\in\mathcal{F}_S^0$，$A\cap\{S\leq T\}\in\mathcal{F}_T^0$

(ii) 对每一个$A\in\mathcal{F}_S^0$，$A\cap\{S<T\}\in\mathcal{F}_{T-}^0$

特别$\{S\leq T\}$，$\{S=T\}$属于$\mathcal{F}_S^0$和$\mathcal{F}_T^0$，$\{S<T\}$属于$\mathcal{F}_S^0$和$\mathcal{F}_{T-}^0$.

d）设$\{S_n\}$是可选时的增（对应地：降）序列$S=\lim_{n\to\infty}S_n$，那么$\mathcal{F}_{S-}^0=\bigvee_n\mathcal{F}_{S_n-}^0$（对应地：$\mathcal{F}_{S+}^0=\bigcap_n\mathcal{F}_{S_n+}^0$）。

e）设S是可选时，$A\subset\Omega$．如果我们有$A\in\mathcal{F}_{\infty-}^0$（对应地：$A\in\mathcal{F}_\infty^0$），那么集$A\cap\{S=+\infty\}$属于$\mathcal{F}_{S-}^0$（对应地$\mathcal{F}_S^0$）．

证明：a）前半只需证明$\mathcal{F}_{S-}^0$的“生成元”都属于$\mathcal{F}_S^0$，

若 $B\in\mathcal{F}^0_{0-}$，$B\cap\{S\le t\}\in\mathcal{F}^0_t$ 是显然的，若 $B=A\cap\{r<S\}$，$A\in\mathcal{F}^0_r$，则

$$B\cap\{S\le t\}=A\cap\{r<S\}\cap\{S\le t\}$$
$$=\begin{cases}\emptyset & t\le r\\ A\cap\{S\le t\}\setminus A\cap\{S\le r\} & r<t\end{cases}$$
$$\in\mathcal{F}^0_t$$

后半只需注意到对每一个 $t\in\mathbb{R}_+$，$\{S>t\}$ 是 $\mathcal{F}^0_{S-}$ 的一个生成元。

下面我们先证明 c)，再回过头来证明 b)。

c) (i) 对每一个 t，我们有下列恒等式：

$A\cap\{S\le T\}\cap\{T\le t\}=(A\cap\{S\le t\})\cap\{T\le t\}\cap\{S\wedge t\le T\wedge t\}$。若 $A\in\mathcal{F}^0_S$，则 $A\cap\{S\le t\}\in\mathcal{F}^0_t$，$\{T\le t\}\in\mathcal{F}^0_t$，而

$$\{T\wedge t\le s\}=\begin{cases}\Omega\in\mathcal{F}^0_t & \text{当 } t\le s\\ \{T\le s\}\in\mathcal{F}^0_s\subset\mathcal{F}^0_t & \text{当 } s<t\end{cases}$$

表明 $T\wedge t$ 是 $\mathcal{F}^0_t$ 可测的，同理 $S\wedge t$ 是 $\mathcal{F}^0_t$ 可测的，故 $\{S\wedge t\le T\wedge t\}\in\mathcal{F}^0_t$，我们证明了

$$A\cap\{S\le T\}\cap\{T\le t\}\in\mathcal{F}^0_t$$

对一切 $t\in\mathbb{R}_+$ 成立，故 $A\cap\{S\le T\}\in\mathcal{F}^0_T$。

(ii) 用 $\mathbb{Q}$ 表示全体非负有理数，我们有恒等式

$A\cap\{S<T\}=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}\left((A\cap\{S\le r\})\cap\{r<T\}\right)$，如果 $A\in\mathcal{F}^0_S$，那么 $A\cap\{S\le r\}\in\mathcal{F}^0_r$，

$$(A\cap\{S\le r\})\cap\{r<T\}\in\mathcal{F}^0_{T-}$$

对一切 $r\in Q$ 成立，故 $A\cap\{S<T\}\in\mathcal{F}^0_{T-}$.

b) 当 $S\leq T$ 时，从 $A\in\mathcal{F}^0_S$ 知 $A=A\cap\{S\leq T\}\in\mathcal{F}^0_T$；如果 $S<T$ 处处成立，从 $A\in\mathcal{F}^0_S$ 知 $A=A\cap\{S<T\}\in\mathcal{F}^0_{T-}$（如果 $\mathcal{F}^0_{0-}=\mathcal{F}^0_0$，$S<T$ 仅在 $\{T>0\}$ 上处处成立，表 $A=[A\cap\{S<T\}]\cup[A\cap\{T=0\}]$，$A\cap\{T=0\}\in\mathcal{F}^0_0=\mathcal{F}^0_{0-}\subset\mathcal{F}^0_{T-}$；类似地可证 $\mathcal{F}^0_{\infty-}=\mathcal{F}^0_\infty$ 时，$S<T$ 仅在 $\{S<\infty\}$ 上处处成立的情形）.

最后需要证明 $\mathcal{F}^0_{S-}$ 的每一个生成元都属于 $\mathcal{F}^0_{T-}$，只要 $S\leq T$，形如 $B\in\mathcal{F}^0_{0-}$ 的 $\mathcal{F}^0_{S-}$ 的生成元不待证。设 $B\in\mathcal{F}^0_t$，考察 $B\cap\{t<S\}$，注意 $B\cap\{t<S\}\in\mathcal{F}^0_t$，故

$$B\cap\{t<S\}=B\cap\{t<S\}\cap\{t<T\}\in\mathcal{F}^0_{T-}$$

d) 在增序列的情形，由 b)，我们有

$$\bigvee_n\mathcal{F}^0_{S_n-}\subset\mathcal{F}^0_{S-}.$$

另一方面 σ-域 $\mathcal{F}^0_{S-}$ 除了 $\mathcal{F}^0_{0-}\subset\bigvee_n\mathcal{F}^0_{S_n-}$ 以外的生成元 $A\cap\{t<S\}$，可表成 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap\{t<S_n\}\in\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}^0_{S_n-}$，其中 $A\in\mathcal{F}^0_t$，$t\in\mathbb{R}_+$.

在降序列的情形，由于 $\mathcal{F}^0_{S+}$ 是满足

$$A\cap\{S<t\}\in\mathcal{F}^0_t$$

对一切 $t\in\mathbb{R}_+$ 成立的 $\mathcal{F}^0_\infty$ 可测集 A 所构成的，从 $A\cap\{S<t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A\cap\{S_n<t\}$ 我们看到 $\mathcal{F}^0_{S+}\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}^0_{S_n+}$，相反的包含关系从 b) 推出，故

$$\mathcal{F}^0_{S+}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}^0_{S_n+}。$$

e) 使得 $A\cap\{S=\infty\}\in\mathcal{F}^0_{S-}$ 的集 $A\in\mathcal{F}^0_{\infty-}$ 形成一个σ-域，但如果 $A\in\mathcal{F}^0_t$，则 $A\cap\{n<S\}$ 当 $n\geq t$ 时是 $\mathcal{F}^0_{S-}$ 的生成元，故

$$A\cap\{S=\infty\}=\bigcap_{n=[t]+1}^{\infty}(A\cap\{n<S\})\in\mathcal{F}^0_{S-}$$

这样，该σ-域包含了一切 $\mathcal{F}^0_t$，当然就只能等于 $\mathcal{F}^0_{\infty-}$

若 $A\in\mathcal{F}^0_\infty$，$A\cap\{S=\infty\}\in\mathcal{F}^0_\infty$. 对任给的 $t\in\mathbb{R}_+$，$A\cap\{S=\infty\}\cap\{\cap\{S\leq t\}=\emptyset\in\mathcal{F}^0_t$，故 $A\cap\{S=\infty\}\in\mathcal{F}^0_S$。

定理8. a) 设 S 是可选时，T 是满足 $S\leq T$ 的一个 $\mathcal{F}^0_S$ 可测随机变量，那么 T 本身也是一个可选时。如果 S 是宽可选时（即关于族 $\{\mathcal{F}^0_{t+}\}$ 的可选时），T 是 $\mathcal{F}^0_{S+}$ 可测的，且在 $\{S<\infty\}$ 上，$S<T$，那么 T 是可选时。

特别这可以应用到随机变量 $T=S+t$，$t>0$，和形如 $T=S^{(n)}=\sum_{k\geq1}k2^{-n}I_{\{(k-1)2^{-n}\leq S<k2^{-n}\}}$ 的随机变量上。

b) 假设族 $\{\mathcal{F}^0_t\}$ 右连续。设 S 是可选时，$\mathcal{G}^0_t=\mathcal{F}^0_{S+t}$，$T$ 是一个 $\mathcal{F}^0_\infty$ 可测的随机变量，则为要 $U=S+T$ 是一个 $\{\mathcal{F}^0_t\}$ 可选时，当且仅当 T 是一个 $\{\mathcal{G}^0_t\}$ 可选时。

证明：a) 对每一个 $u\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\{T\leq u\}=\{T\leq u\}\cap\{S\leq u\}$$

由于 $\{T\leq u\}\in\mathcal{F}^0_S$，故右边，从而左边属於 $\mathcal{F}^0_u$，即 T 是可选时。在 S 是宽可选时的情形，由于在 $\{S<\infty\}$ 上，$S<T$，故 $0<T$，考虑正的 u，即 $u>0$，我们有

$$\{T\leq u\}=\{T\leq u\}\cap\{S<u\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T\leq u\}\cap\{S\leq(1-\tfrac{1}{n})u\}.$$