非歐幾里得幾何學淺說

周爲羣編

非歐幾里得幾何學淺說

周　爲　羣　編

開　明　書　店

本書已照著作權法呈請內政部註册

"非歐幾里得幾何學淺說"

民國廿五年二月初版

有著作權

*

改正實價國幣〇七角五分
(外埠酌加匯費)

編者 周為羣

發行者 章錫琛
上海福州路開明書店

印刷者 美成印刷公司
上海梧州路三九〇號

總發行所
上海福州路二七八號
開明書店

分發行所
南京 廣州 北平 漢口 長沙
開明書店分店

51721

序

記得在中學時期,先生只對我說三角形三角之和等於二直角,沒有聽說小於或大於二直角,也許先生自己還不曉得。進了大學,才有一位先生在上課時偶然說到在非歐幾里得幾何學上,三角形三角之和小於或大於二直角;可是他沒有說出其所以然。那時我聽了很覺奇怪,以爲三角形三角之和等於二直角,不但在理論上絕無疑義,卽在事實上也百試百驗,這還得成爲問題嗎?若說小於或大於二直角,不曉得依據何種理由,理由暫且不管,只看事實就明明不合。况且幾何學是何等精嚴的科學,幾何學上證明的定理,還是靠不住,天下可信的道理還能有多少呢?不過非歐幾里得幾何學旣經公認,當然不會胡說亂道,我的好奇心不能自已,一定要把非歐幾里得幾何學來研究一番,看牠究具什麼本領,竟敢顚倒是非,發出這種驚人的怪論來。於是國內沒有,求之國外,一本,兩本,三

本四本,先後買了幾個學者著的非歐幾里得幾何學來看,無奈當初看來看去看不懂,表面上好像懂了,骨子裏還沒有懂;忍耐着,今天看不懂,明天再看,明天還看不懂,後天再看,接連幾天還看不懂,擱置起來,以後再看,這樣斷斷續續經過很長的時期,處心積慮,深思苦索,終得一旦豁然貫通,窺破了眞理的奧妙,感受着無窮的趣味。研究普通幾何學的人,我以爲不可不懂得非歐幾里得幾何學,不懂得非歐幾里得幾何學,其淺見寡聞,固不待言,而且也就不曉得幾何學是什麽(What is Geometry?),徒然記得許多定義,定理是沒有多大價值的。我因爲所看到的許多非歐幾里得幾何學書籍都很難懂,所以吃苦不少。在我看不懂的時候,就想等到自己澈底瞭解以後,必要編著一本使人極易看懂的非歐幾里得幾何學;現在我旣得了門徑,故履行宿願,編著這本非歐幾里得幾何學淺說。幾何學是演繹的科學,最基本最重要的在乎原理的闡明,把原理弄清楚了,以下就沒有多大困難了,所以這本小書專在闡明原理,我自學時所覺得難懂,很難懂而又非澈底懂得不可的地方,不憚反覆詳解,只要學過普通

幾何學而頭腦比較精密的人,就可以看懂我這本書。高中畢業生或高中三年級已學過解析幾何學的看這本書,尤其相宜。缺陷之處,知所難免,儻承識者指正,無任感激。

周爲羣

中華民國二十年十月一日識於江灣立達學園。

目　錄

第一章

導言

1. 幾何學的性質 幾何學是完全依據演繹法而組成的一種科學。演繹法好像泥水匠築牆一樣,先須把着地的一層磚頭鋪好,然後放上第二層,第三層,第四層,…的磚頭,一層一層堆上去,可以堆得很高而不至於倒坍。假使把第十層的磚頭抽去,那麼第十層以上的磚頭都要動搖了;假使把着地的一層磚頭抽去,那麼全牆要動搖了。凡依據演繹法組成的科學必有幾個原始的,基本的,至高無上的道理做出發點,這些道理就是全部的根柢。這幾個原始的,基本的,至高無上的道理,如果顛撲不破,則這科學整個的體系不得崩潰,否則根柢不固,全局可以推翻。幾何學是建築在幾條'公理'(Axiom或Postulate)和'定義'(Definition)上的,從公理和定義上引出'定理'(Theorem)來,再從已

證明的定理上引出別的定理來,這樣從公理生定理,更從定理生定理,生生不已,遂組成了一部理論聯貫,四通八達的幾何學。所謂公理是一種在心理正常的人看來都能明瞭無疑而不必證也不能證的道理。因爲要證明一種道理必須引據另一種比這種道理更淺顯的道理,但比公理更淺顯而可用來證明公理的道理是沒有了,如果還有,則公理失去了牠的資格,要退居定理的地位,而讓比牠更淺顯的道理去充當公理了。公理的意義旣是如此,而幾何學的基礎就是公理,於是幾何學的批判有了標準了。

2. 眞理的體系 我們在探討眞理的時候,必須遵守三個先決的條件:一,從兩種已經承認的眞理出發,推論同一問題,不應得出相反的結論,結論如果相反,那麼前已承認的兩種,至少有一種不是眞理。二,從一種已經承認的眞理出發,依照推理的法則,引出許多別的眞理,再從這許多眞理回證過來,達到出發時的這個眞理,其中不應發生相互的矛盾;如果發生了相互的矛盾,那必有錯誤無疑。三,只要所根據的確是眞理,而所用的推理法則也無不合之處,那麼所得

結果,儘可十分奇異,儘可不爲吾人常識所能了解,我們總得認牠是合理的,是正確的;如果否認了這結果,那就連當初所根據的眞理也否認了,這是說不通的。總而言之,在眞理的體系中,不容有相互的矛盾,也不可承認其原理而否認其由原理推得的結論。幾何學不用說是研究眞理的,當然要遵守這些規條。

3. 歐幾里得幾何學 (Euclidean Geometry) 中的缺點 歐幾里得 (Euclid) 所下平行線的定義是:"平行線是在同一平面上的兩根或兩根以上的線,將各線的兩端任意引長終不能相遇。"他關於平行線的定理有如下各條:

"設有一線割截二線,其所成的內錯角或外錯角相等,則此二線互相平行。"

"設有一線割截二線,在同一邊的外角與其對內角相等,或在同一邊的兩內角之和等於二直角,則此二線互相平行。"

他爲要證明以上兩條定理的逆定理:"設有一線割截二平行線,則其所成的內錯角或外錯角必相等,在同一邊的外角與其對內角必相等,又在同一邊

的兩內角之和必等於二直角" 覺得非創立一個關於平行線的'臆說'(Hypothesis)不可,他便這樣說:

"設有一線割截二線,在同一邊的兩內角之和小於二直角,則此二線的兩端若無限引長,必相遇於兩內角之和小於二直角的一邊。"

這就叫做歐幾里得的'平行公理'(Parallel postulate)。

從上述的幾條定理和平行公理,就很容易引出以下兩條定理來:

1. 二線同垂直於一線必互相平行。

2. 二線平行,則其間距離處處相等。

公理必須簡單明顯,但如平行公理那樣,覺得未免太曖昧了,或者牠充當公理的資格不足,自身尚有待於證明,所以先後費盡許多算學大家的心血,想把牠證明,但終於徒勞無功

4. 非歐幾里得幾何學的產生 平行公理尚待證明,那就難成其為公理了,可是證明又做不到,因此我們不得不把研究的態度改變一下。我們確信平行公理是眞的,不能證明,只怪得我們的學力不夠,

我們還應該努力求證,終可有證明的一天,這是我們以前所抱的態度。不能證明也許不是我們的學力不夠,而是平行公理自身有缺陷,甚至有錯誤,那麼根本上無證明之可能性;我們以前太迷信牠了,現在應該拋開了牠而另闢蹊徑。果然不錯,這麼一來有了出路了。在百餘年前,俄國有個算學家羅伯奇斯凱(Lobatschewsky)和匈牙利的算學家鮑爾伊(Bolyai),不用歐幾里得的平行公理,另創一個平行公理,於是成就了一部體系精嚴,理論圓滿的新幾何學。在六十多年前,更有德國算學家李曼(Riemann),既不用歐幾里得的平行公理,也不用羅鮑二氏的平行公理,另創一個無平行線公理,於是也成就了一部體系精嚴,理論圓滿的新幾何學。從前歐幾里得獨霸幾何學的領土有二千餘年之久,自從這兩種新幾何學成立後,幾何學的領土內便成了'三國'的局面,這是歐幾里得所萬想不到的。羅伯奇斯凱和鮑爾伊的幾何學,李曼的幾何學既都不用歐幾里得的平行公理,而各用其自創的公理,那自然與歐幾里得幾何學大不相同,所以他們的幾何學統稱'非歐幾里得幾何學'(Non-Euclidean Geometry),或簡稱非歐幾何學。但非歐幾何學上只不用歐幾里得的平行公理,此外則歐幾里得幾何學上所有的公理定理無所不用。所以歐幾里得幾何學上的定理凡與平行公理有關者,都和非歐幾何學上的不同,凡與平行公理無關者,都和非歐幾何學上的一致。這三種幾何學的區別,固然在於所用平行公理的不同,但最便莫如把三角形來講,在歐幾里得幾何學上,凡三角形三角之和等於二直角;在羅伯奇斯凱和鮑爾伊的幾何學上,凡三角形三角之和小於二直角;在李曼的幾何學上,凡三角形三角之和大於二直角。這三種幾何學還各有簡便的名稱,羅伯奇斯凱和鮑爾伊的幾何學叫做'雙曲線幾何學' (Hyperbolic geometry),李曼的幾何學叫做'橢圓幾何學'(Elliptic geometry),歐幾里得的幾何學叫做'抛物線幾何學' (Parabolic geometry),我們以後就照這樣稱呼牠們;至於何以定下這三種名稱,暫時無庸解釋了。

第二章

雙曲線幾何學

5. 羅伯奇斯凱的一段理論 羅伯奇斯凱說:

“在一平面上指定一點和一直線,通過這一點的一切直線對於這一直線說起來,可分為兩類:一類是割這根直線的,還有一類是不割這根直線。這裏必有這樣的一根線,牠介於這兩類線之間而成為一根‘界線’,我們就說牠和指定的一直線平行,也就說牠是指定的那根直線的一根平行線。”

“試看下圖(圖1),從A點作垂線AD到直線BC,並在A點作AE垂直於AD。在直角EAD內,自A點引出的一切直線,或是都與DC相交,如AF那樣;或是其中有的不與DC相交,如垂線AE那樣。”

“這還不能斷定,垂線AE是不是不與DC相交的

唯一無二的線。容我們來假定這是可能的:除 AE 外,還有別的線,如 AG 那樣,無論如何引長,終不能與 DC 相交。"

"從割 DC 的 AF 轉到不割 DC 的 AG, 我們必能遇到一根線 AH, 牠是平行於 DC 的。這就是說,這裏必有這樣的一根線,在牠的一邊,所有一切直線,如 AG 那樣,都不與 DC 相交,而在牠的另一邊,所有一切直線,如 AF 那樣,都與 DC 相交。"

"這個角 HAD 介於平行線 AH 與垂直線 AD 之間,叫做'平行角.'我們用 Π (p) 來表示牠, p 就是表明 AD 之長。"

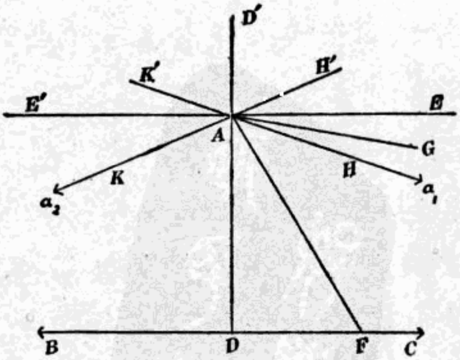

圖 1.

羅伯奇斯凱更有如下的意見,他以爲對於 A 點,