

初中数学

教学参考资料

代数第一册

武汉市革命委员会教育局教学辅导站编
湖北省中小学教学教材研究室校订

目 录

第一章 有 理 数..... (1)

第一节 有理数的概念..... (2)

第二节 有理数的运算..... (12)

第二章 整式的加减法..... (30)

第一节 代数式..... (31)

第二节 整式的加减法..... (39)

第三章 一次方程..... (47)

第一节 一元一次方程的解法..... (48)

第二节 用一元一次方程解应用题..... (56)

第三节 一次方程组的解法..... (65)

第四节 用一次方程组解应用题..... (71)

第一章 有 理 数

本章教材包括有理数的概念（正数和负数、数轴、相反数、数的绝对值、有理数大小的比较）和有理数的四则运算两大部分。

恩格斯指出：“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。”算术数只反映客观世界的某些量，例如人数、长度、重量等等。但是对那些具有相反意义的量，如上升500米，下降300米；前进8公里，后退2公里等等，就无法表示出它们的性质和区别。负数的引入，正是为了解决相反意义的量的客观存在与算术数的局限性的矛盾。这说明把算术数扩大到有理数是由于实际的需要，是从现实世界中具体的量抽象得来的，不是从天上掉下来的，也不是所谓“天才”的头脑里所固有的。

毛主席教导我们：“一切矛盾着的東西，互相联系着，不但在一定条件之下共处于一个统一体中，而且在一定条件之下互相转化”。正数和负数是一对矛盾，它们各以它对立着的一方作为自己存在的前提，共处于有理数这个统一体中。当我们改变相反意义量的正负规定时，它们就向着各自的反面转化。加法和减法是一对矛盾，在每个有理数都有相反数的条件下（算术数不具备这个条件），它们可以互相转化。乘法和除法也是一对矛盾，在每一个不等于零的数都有倒数的条件下，它们也可以互相转化。

本章教学重点是有理数的运算，因为它是学习代数知识

的基础；难点是负数概念的建立、有理数运算中异号两数相加和负数相乘法则的得出。

综上所述，本章教学要求是：

1. 通过教学使学生认识到有理数来源于实践，认识到正数与负数、加法与减法、乘法与除法矛盾的对立统一，从而受到辩证唯物主义教育。

2. 使学生明确有理数、数轴、相反数和数的绝对值的概念，并能正确地比较两个有理数的大小。

3. 使学生掌握有理数四则运算的法则，能正确、熟练地进行有理数的加、减、乘、除、乘方等运算，使学生认识算术里的运算规律和运算性质，也适用于有理数，且能运用这些定律和性质，简化有理数的计算。通过反复练习，提高学生的计算能力，能运用有理数的运算，解决生产实践中的一些简单计算问题。

第一节 有理数的概念

一 用辩证唯物主义观点分析教材

毛主席教导我们：“人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。”正数和负数反映了客观存在的具有相反意义的量，是劳动人民在长期社会实践中总结和发展起来的，决不是什么“脑髓产生思想”“头脑制造法则”，必须狠批刘少奇一类骗子所鼓吹的唯心论的先验论。

正数和负数是对立的，又是统一的，没有正就无所谓负，没有负也就无所谓正，它们各以和它对立着的一方作为自己存在的前提，并且在一定条件下相互转化，相反意义的量的正、负规定就是转化条件。例如，如果以汉口火车站为零点，把向北的方向规定为正向，那么京广线上的孝感车站就表示为+68公里；如果把向南的方向规定为正向，那么孝感车站就要表示为-68公里了。正和负是相对的。例如，某生产队在年终决算时付给某社员现金250元，就生产队来说是支出，应记为-250元；但就社员来说却是收入，应记为+250元。

引进了负数以后，零就不再象在算术里那样被理解为“没有”了，而是表示正数与负数之间的一种数。例如水在 0°C 时结冰，决不能说 0°C 是没有温度，它表示在正温度与负温度之间的唯一的温度，正如恩格斯指出的：“零是具有非常确定的内容的。作为一切正数和负数之间的界线，作为能够既不是正又不是负的唯一真正中性数，零不只是一个非常确定的数，而且它本身比其他一切被它所限定的数都更重要。”

教材介绍了正负数之后，接着引进了数轴。横放着的温度计便是数轴的一个很好的模型。数轴的引进是非常重要的，它从形的方面阐明了具有相反意义的量的本质，体现了形与数的结合，且为建立相反数与数的绝对值的概念以及有理数大小比较的法则提供了方便，也为今后建立实数与数轴上点的一一对应的关系以及直角坐标系打下基础。

从算术数发展到有理数，也必然要引起数的大小比较的法则的发展。有理数大小比较的法则，是在算术数大小比较的法则的基础上发展起来的。它如实地反映了具有相反意义

的量的大小关系，同时又把算术数大小比较的法则作为它的特殊情形。这样，根据客观实际，把有理数的大小关系确定下来，就为今后学习有理数的运算和解决三大革命运动中的实际问题作了必要的准备。

二 教学建议

1. 正数和负数

本节内容的重点是负数概念的引入。由于学生在日常生活中习惯用算术数，对负数不理解不习惯。例如，以前认为“0”是最小的数，而负数比0还小，就不可理解了。解决这个问题应通过实例丰富学生这方面的感性知识，使学生认识到具有相反意义的量是大量存在的，用算术数不能表示它们的实际意义。

教材首先举出一个例子：在万恶的旧社会里，贫农杨大伯在零下 15°C 的数九寒天，被迫为地主上山砍柴，而地主黄阎王却在零上 15°C 的屋子里，过着腐朽的生活。这个例子，揭露了地主阶级的剥削罪恶，批判了刘少奇一类骗子所鼓吹的“剥削有功论”。从这个例子进而可以看到：仅仅用算术里的数15，不能把这种相反意义的量（零上多少度与零下多少度）表达出来，必须用新的数 $+15^{\circ}\text{C}$ 和 -15°C 来表示，我们把 $+15$ 叫做正15， -15 叫做负15。这就说明了相反意义的量是客观存在的，而且可以用正负数来表示它。

理解正负数概念的关键，在于弄清相反意义的量。为了使弄清这个概念，还可结合教材的实例（温度是零上、零下多少度，水位上升、下降多少，货物运进、运出多少，土方填、挖若干等）进行讲解，使学生获得一个明确的认

识：在客观世界中，存在着相反意义的量，为了区别它们，劳动人民把其中的一种（零上的温度、水位上升、货物运进、重量增加、填土等），按照习惯规定为正量，而把另一种（零下的温度、水位下降、货物运出、重量减少、挖土等），则规定为负量。正量用正数来表示，负量用负数来表示。

为了加深学生对正负数概念的理解，应该鼓励学生自己举出三大革命实践中的一些具有相反意义的量，并用正、负数表示出来。

学生可能举出一些不是相反意义的量，而是列举了一些有相反意义的词，如新与旧、光明与黑暗、扩大与缩小等，应指出：它们都不是相反意义的量。

对用正、负数表示具有相反意义的量的练习要重视，应向学生指出：用正、负数表示具有相反意义的量时，可以把任何一种意义的量，规定为正的，但不能把两种相反意义的量，都同时规定为“正”或者“负”，而且通常要根据习惯来确定。

关于有理数的概念，学生往往发生如下错误：以为有理数就是正数和负数（把零不包含在有理数范围内），或者认为有理数就是负数等等；对整数、正整数、负整数、自然数、零这些概念的关系搞不清楚，为了纠正上述错误，可通过一些练习，使学生搞清楚自然数、整数、分数等概念，对整数概念，教师要着重指出，在算术中讲过的整数，当时只包含自然数和零，引入正、负数概念之后，整数包括正整数、负整数和零，正整数就是自然数。

2. 数轴、相反数、绝对值

教材在引出正负数概念之后，紧接着就讲述数轴的意义，数轴能够直观地反映比较抽象的正负数，对于讲解相反

数、绝对值等概念，比较有理数大小以及有理数的运算来说，都可借助数轴直观说明。因此数轴是有理数教学的有力工具，而且是形数结合的基础，直角坐标系的建立就是由它发展起来的。要充分认识到建立数轴的作用和它在数学中的地位，而且应使学生领会到利用数轴的好处。

教材结合实例，使学生理解数轴的由来。把温度计横放，从而抽象出一条直线，再把温度计上的零和零上、零下等刻度标在直线上，并将正、负的规定用箭头在直线上表示出来，就是一条数轴。这是符合从具体到抽象的原则的。

讲解时，要使学生明确两点：第一，“数和形的概念不是从其它任何地方，而是从现实世界中得来的”。第二，构成数轴有三个要素，就是原点、正方向和长度单位，缺一不可。学生画数轴，往往漏画表示正方向的箭头和长度单位。教师要注意示范。长度单位，开始时画在数轴外面，以加深学生的印象，以后就可以不再画在外面了。还应当指出：在数轴建立以后，正数与负数之间对立统一的辩证关系就可形象地表示出来，因为它从形的角度阐明了具有相反意义的量的本质。

教材的例3和例4是以点表数和以数表点的基本练习，这是为了加深对数轴的理解。应当注意，任何一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，对于数轴上任意给出的一个点，却不一定能用有理数去表示它。因为在数轴上有很多表示无理数的点，不能用有理数表示，这是教师应该注意的。

讲完数轴之后，就可以结合数轴来定义相反数。相反数是讲绝对值的基础，在有理数的运算中也起着极为重要的作用。有了它，有理数的加减法才能互相转化，代数和这个重要概念才能建立。

讲相反数的概念时，可从分析例4着手，问学生在数轴上表示 $+2$ 和 -2 的两个点以及表示 $+3\frac{1}{2}$ 和 $-3\frac{1}{2}$ 的两个点与原点的位置有什么关系？然后指出：如果表示两个数的点在数轴上位于原点的两旁，且与原点的距离相等，这两个数便互称为相反数，这样可以使学生对相反数的概念有个直观的形象。应向学生指出， $+2$ 与 -2 互为相反数的意义包括两个方面： $+2$ 是 -2 的相反数， -2 亦是 $+2$ 的相反数，不能片面理解。此外还应着重指出，零的相反数就是它自己。有了这一规定后，任何一个有理数就都有而且只有一个确定的相反数。

教材还指出求一个数的相反数的方法是在这个数前面添一个“-”号。如求 $+4$ 的相反数，可在 $+4$ 前面添一个“-”号，得出 $-(+4)$ 。同样，求 -4 的相反数，可在 -4 前面添上一个“-”号，得出 $-(-4)$ 。

绝对值是数学中的一个重要概念，在这一章中，只有引出了绝对值，才有可能进行有理数的大小的比较，也才可能建立有理数的运算法则。

学生开始理解绝对值的概念是有困难的。最好先举实例，使学生感到在三大革命运动和日常生活中，确实存在不需考虑方向的量。例如，汽车司机，为了与帝、修、反争时间，加快社会主义建设步伐，日以继夜地在某公路上来回运输。来回往返，显见是有相反方向的。但为了计算某月耗油量而计算总路程，就只需把来回行驶的路程全部加起来，而不需要区分往返的方向，这说明不考虑相反意义的量是客观存在的。为了帮助学生理解有理数绝对值的概念，应先在数轴上标出表示互为相反数的两个点，指出它们有一个

共同特征：与原点的距离相等。于是我们规定，在数轴上表示一个数的点，它离开原点的那段距离叫做这个数的绝对值。这样直观地用距离说明绝对值的意义，学生易于接受。但应加以概括：正数和零的绝对值就是它们自己，负数的绝对值是它的相反数。

例5和例6是讲解求已知数的绝对值和求已知绝对值的有理数。应当注意，在求已知绝对值的有理数时，学生往往回答不完全。例如：求绝对值等于3的有理数时，常常只得出一个3，而忽略了-3。讲完例6之后，让学生多作一点这样的习题，以加深认识。

3. 有理数大小的比较

毛主席教导我们：“有比较才能鉴别。”从温度计上的刻度看得很清楚，从零度起越往上边的刻度表示的温度越高，越往下边的刻度表示的温度越低。因此，正的温度比零度高，零度又比负的温度高；从两个正的温度来看，绝对值较大的正数所表示的温度较高；从两个负的温度来看，绝对值较大的负数所表示的温度反而较低。教学时，先应通过温度计上气温高低的比较，抽象出有理数的大小关系，再结合数轴进一步说明：表示有理数的点，越往右边所代表的数越大。最后再利用这种位置关系和绝对值概念，归纳出比较有理数大小的法则。为了使学生深刻理解这个法则，可以利用气温的比较来说明。如武汉市一九七三年元月份某一天五个时间的温度是：

时 间	早上 6 时	上午 10 时	下午 2 时	下午 4 时	晚上 9 时
温 度	- 5 °C	+ 3 °C	+ 9 °C	+ 5 °C	0 °C

把每两个时间的温度相比较时，哪个温度高？

“两个负数，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大”是个难点，应当结合数轴进行说明，否则学生往往容易搞错。对于例7（3），应指出如下的解题步骤：第一，先求出两个数的绝对值（如果是异分母分数，就化成同分母分数；如果一个是分数，一个是小数，就把小数化成分数或把分数化成小数）；第二，再比较两个绝对值的大小；第三，最后根据法则判定原来两数的大小。

学生对于不等号“ $>$ ”和“ $<$ ”的用法，也容易弄错，必须强调符号里的尖角必须对准较小的数。如比较 -3 和 -5 的大小时，有两种写法：

$$-3 > -5 \text{ 或 } -5 < -3.$$

学生有时还会把小于的符号“ $<$ ”与表示角的符号“ $\angle$ ”混同起来，应向学生指出这两个符号的区别。

三 习题处理

（一）习题一提示

第3题： -0.02 表示成品直径最小只能比5毫米小0.02毫米。

说明：某种轴的直径在图纸上注明为 $\phi 5 \begin{smallmatrix} +0.01 \\ -0.02 \end{smallmatrix}$ ，它表示加工这种轴时，直径只要在 $5 - 0.02 = 4.98$ （mm）到 $5 + 0.01 = 5.01$ （mm）之间就是合格的，通常用 $5 \begin{smallmatrix} +0.01 \\ -0.02 \end{smallmatrix}$ 表示最大界限的尺寸， $5 - 0.02$ 表示最小界限尺寸，或者合写为 $5 \begin{smallmatrix} +0.01 \\ -0.02 \end{smallmatrix}$ ，这里 $+0.01$ 叫做上偏差， -0.02 叫做下

偏差.

第9题:

x	+2.5	$-3\frac{1}{2}$	-10	$+4\frac{2}{3}$	+31.5
x的相反数	-2.5	$+3\frac{1}{2}$	+10	$-4\frac{2}{3}$	-31.5
x	2.5	$3\frac{1}{2}$	10	$4\frac{2}{3}$	31.5

第10题: $-19 < 0$; $-56 > -97$; $0.3 > -0.4$;

$-\frac{5}{6} < -\frac{7}{9}$; $-4 < -3\frac{4}{5}$; $-\frac{5}{6} < -0.8$

第14题: 零不是最小的有理数, 因为零大于一切负数.
零不是最小的整数, 因为零大于一切负整数. 没有最小的有理数, 也没有最小的整数.

第15题: (1) 绝对值最小的有理数是零;

(2) 最小的正整数是1;

(3) 最大的负整数是-1;

(4) 绝对值最小的整数是零.

第16题: (1) 小于6的正整数是5, 4, 3, 2, 1;

(2) 大于-5的负整数是-4, -3, -2, -1;

(3) 绝对值不大于4的整数是0, ± 1 , ± 2 , $\pm 3 \pm 4$.

(二) 供选用的习题:

1. 用正负数表示下列具有相反意义的量:

(1) “只有社会主义能够救中国”. 红焰大队在合作化以前, 每年平均缺粮60000斤. 通过农业合作化和人民公社化运动, 特别是经过无产阶级文化大革命, 粮食产量大大

增加，一九六九年有余粮240000斤。

(2) 南京长江大桥桥头堡上的红旗顶端高出地面70米，桥头堡的地基打入地下30米。

(3) 工人师傅加工直径为65mm的轴，规定轴的直径不能比65mm大0.018mm，也不能比65mm小0.012mm。

(4) 在建筑工程图上，一般都以地平面为基准面。某高压线塔高出地面20米，塔脚深到地面以下4米。

(5) 工人师傅将某机床手柄顺时针摇5圈，逆时针摇2圈。

2. 某钟表厂工人，试制成功面向工农兵的晶体管闹钟，24小时误差为 ± 15 秒，试说明 $+15$ 秒、 -15 秒的意义。

3. 工人师傅校正某机床床身是否水平时，用水准仪在床身各段检验，有一处写着“ -0.05 mm ”，另一处写着“ $+0.02\text{ mm}$ ”。问 -0.05 mm 和 $+0.02\text{ mm}$ 各表示什么意义？

4. 水结成冰的温度是 0°C ，酒精凝固的温度是 -114°C ，水银凝固的温度是 -39°C ，用符号“ $<$ ”把这三个数连接起来。

5. 在房屋建筑图上，一般都以内地平面为基准面。基准面以上的建筑物高度用正数表示，基准面以下的建筑物深度用负数表示。某建筑图上有下列一些表示高度的尺寸数（单位是米）： 37.5 ， 0.0 ， 29.3 ， -2.0 ， -2.7 等，把这些数按由小到大的顺序用“ $<$ ”连结。

6. 为什么要引进负数？怎样利用正负数表示具有相反意义的量？举例说明。

7. (1) 两个互为相反的数的绝对值有什么关系？

(2) -25 的绝对值是多少？绝对值是25的数一定是 $+25$ 吗？为什么？

(3) 已知一个负数的绝对值是5能够判定这个数是

- 5 吗? 为什么?

8. 什么数的相反数比它本身大? 比它本身小? 等于它本身?

9. 什么叫数轴? 画数轴时应注意什么?

10. 写出 - 2 和 3 之间包括 - 2 与 3 在内的一切整数, 一切正整数, 一切负整数以及任意五个分数.

第二节 有理数的运算

一 用辩证唯物主义观点分析教材

恩格斯指出: “数服从一定的规律”. 有理数也不例外. 有理数运算有两点必须注意, 一是符号法则, 二是绝对值的计算. 进行有理数的运算, 确定了运算结果的符号之后, 就是绝对值的计算, 而绝对值的计算实质上就是算术数的运算, 这是有理数运算与算术数运算的共同点. 而符号法则是有理数运算的特殊点. 可见, 重点抓住“符号法则”的变化规律, 是理解和掌握有理数运算的关键.

毛主席教导我们: “一切矛盾都依一定条件向它们的反面转化着.” 在有理数的运算中, 加与减的矛盾, 由于引进了相反数, 减法可转化为加法; 乘与除的矛盾, 由于引进了倒数, 除法可转化为乘法.

有理数的乘方, 可看成是相同因数的乘法, 因此它是有理数乘法运算的特殊情况, 由有理数乘法法则很容易推导出有理数乘方的法则.

这样，从算术数发展到有理数，从算术运算发展到代数运算，正如恩格斯所说的，“代数的运算却进步了很多。每一个减法 $(a-b)$ 都可以用加法 $(-b+a)$ 表示出来，每一个除法 $\frac{a}{b}$ 都可以用乘法 $a \times \frac{1}{b}$ 表示出来，至于用幂来运算，就更进步得多了。计算方法的一切固定差别都消失了，一切都可以用相反的形式表示出来。”

有理数的混合运算是有理数的运算中加、减、乘、除、乘方五种运算的综合，其运算顺序与算术数的运算顺序相同。

二 教学建议

1. 加法

(1) 有理数的加法法则

有理数的加法法则，分为同号两数相加，异号两数相加，与零相加三类。其中，异号两数相加法则是教学难点。

毛主席教导我们：“一切真知都是从直接经验发源的。”教材通过水库在蓄洪和灌溉时水位变化的实例来研究有理数的加法。根据水位上升和下降的各种情况，归纳出有理数加法的法则。学生容易理解，有利于突破异号两数相加这个难点。教学时，应绘出水位升降示意图（教材上的图1—7至图1—10）。让学生通过对图形的观察，得出运算的结果，并注意：

① 使学生理解，水库水位第一次上升2厘米，第二次又上升3厘米，问两次水位共上升多少？这是加法问题。第二

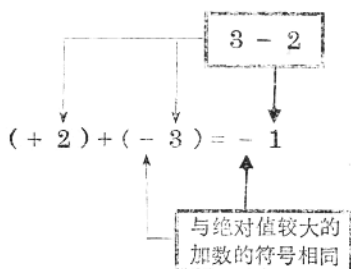
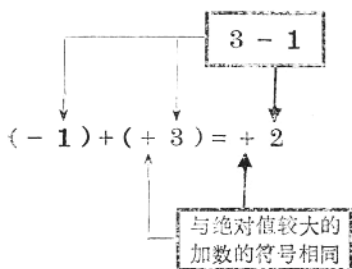
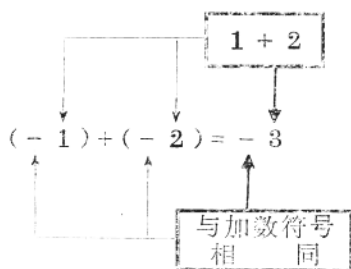
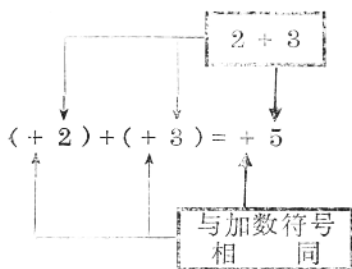
种情况，水库水位第一次下降 1 厘米，第二次又下降 2 厘米，问两次水位共上升多少？也是个加法问题，因我们规定上升为正，所以下降 1 厘米，2 厘米，可以说成是上升 -1 厘米， -2 厘米。列式计算时都是按上升而言的，所以是加法问题。对于第三、第四两种情况也应作类似的分析。

② 先讲同号两数相加，后讲异号两数相加。

③ 要结合实例讲清楚和的符号与加数的绝对值之间的关系，并得出同号两数相加以及异号两数相加的法则。

④ 两相反数之和等于零；一个数与零相加，仍得这个数，是加法运算中的特例，也可以通过水库水位变化的情况加以说明。

对于同号两数相加与异号两数相加的法则图示如下：



学生对异号两数相加最容易产生错误，可多作几个象例 1 (3)、(4) 这样的习题，对于分数、小数的加减法如果不熟练，应结合例 2 适当复习。

(2) 有理数的加法运算律

加法的运算律，通过例 3，着重说明算术里的加法运算律对于有理数的加法同样适用。教学中，可用实际问题加以说明，如水库第一次水位上升 8 厘米，第二次下降 2 厘米的和，与第一次下降 2 厘米，第二次上升 8 厘米的和是相等的。

在用字母表示加法运算律时，应指出字母 a 、 b 、 c 都是表示任意的有理数，既可以是正数或负数，也可以是零。在教学中强调字母的取值范围，对学生以后的学习是重要的。

加法的运算律可以简化加法运算。讲例 4 时，应引导学生进行审题，对于具体情况作具体的分析，找出使运算简便的方法。如在 (1) 中先把符号相同的数分别结合在一起；在 (2) 中先把两个相反的数结合在一起；在 (3) 中先把分母相同的数结合在一起，然后再相加，计算就比较简便。必要时还可以由学生不用加法的交换律和结合律，按本来的顺序计算例 4 的各题，通过比较，就可以清楚地看到利用运算定律简化计算的优点。

2. 减 法

这一部分的重点是有理数的减法法则与代数和的概念。

(1) 有理数的减法法则

有理数的减法比加法简单一些，有理数减法的定义与算术里减法的定义是相同的（减法是已知两个加数的和与其中一个加数求另一个加数的运算），根据这个定义可以得出