數理化自學叢書

代數

第二冊

香港三育圖書文具公司 出版

數理化自學叢書

代　　數

第二册

香港三育圖書文具公司出版

數理化自學叢書
代　　數
（第二冊）

出版 發行：三育圖書文具公司
香港九龍柯士甸道33號二樓
San Yu Stationery & Publishing Co.
33, Austin Road 1/F., Kowloon, Hong Kong

印刷：永生印刷公司
九龍馬頭圍道二三二號

1978年11月版

前　　言

本书是数理化自学丛书代数部分的第二册，其內容主要是研究方程和方程組．从一元一次方程开始，系統地研究了一次方程組，一元二次方程和二元二次方程組．与此有关的，还把数的范圍从有理数扩展到实数，研究根式和有理数指数幂的基本运算以及一元一次不等式，为学习代数第三册的一元二次不等式和函数作好准备．已具备有理数和有理代数式的基本运算知識的讀者，即可閱讀本书．

为了适应自学的需要，正文里有較多的“注”，“說明”和“分析”，用小号字排印，作为正文的补充，給讀者在理解基础知識和掌握解题技能技巧方面指出一些应予注意的事項和思考方法．每章之末有一簡单的提要，将这章內容作一概括，供讀者在复习时参考．某些带有 * 号的章节，初讀时如果感到困难，可以暫时略去，留在第二次再讀．

学习数学，一方面要透徹理解基本概念，另一方面要熟练掌握解题的技能技巧．为此，本书配有足够数量的习题；同时，还配有較多的例题．对思考途徑，解题方法，解题步驟，书写格式，注意事項等作了尽可能詳細的說明．希望讀者对本书中的习题，根据例题的示范，尽可能全做，至少亦应选做一半左右，从模仿到創造，逐步提高自己的解题技巧和独立思考能力．这样，可以用基本概念来指导解题，通过解题来巩固基本概念．除了較簡单的題目外，书末附有习题答案，供讀者核对．但切忌先看答案再行解题．带有 * 号的题目比較难些，初次练习时可以暫时不做．

学习必須打好基础，逐步深入．閱讀时要用心鉆研，耐心研究，循序漸进，持之以恒，不应見异思迁，知难而退．这样，就一定能够学好这門功課．

这里附带說明，閱讀本书时須备一本《普通中学适用四位数学用表》．不仅本书需要，继續閱讀《代数第三册》和《三角》时也要用到．

編　者

目　录

前言

第一章　一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程 ……………………… 1

§1·1　等式 ……………………… 1

§1·2　方程 ……………………… 3

§1·3　同解方程 ……………………… 6

§1·4　方程的两个基本性质 …… 8

§1·5　一元一次方程的解法 ……14

§1·6　列出方程来解应用题 ……27

§1·7　分式方程 ……………………46

§1.8　列出分式方程来解应用题 ……………………54

本章提要 ……………………58

复习题一 ……………………59

第二章　一元一次不等式 ………63

§2·1　不等式 ……………………63

§2·2　不等式的性质 ……………66

§2·3　一元一次不等式和它的解法 ……………………70

本章提要 ……………………78

复习题二 ……………………79

第三章　一次方程組 ……………81

§3·1　二元一次方程的意义 ……81

§3·2　二元一次方程組的意义…83

§3·3　用代入消元法解二元一次方程組 ……………………85

§3·4　用加减消元法解二元一次方程組 ……………………90

§3·5　含有字母系数的二元一次方程組的解法 …………95

*§3·6　二元一次方程組的解的三种情况 ……………………98

§3·7　三元一次方程和三元一次方程組的意义 ………100

§3·8　用代入消元法解三元一次方程組 ………………101

§3·9　用加减消元法解三元一次方程組 ………………103

§3·10　可以化为二元一次方程組或者三元一次方程組来解的分式方程組 ……107

§3·11　列出方程組解应用题 …113

本章提要 ……………………121

复习题三 ……………………122

第四章　方根 ……………………125

§4·1　方根的意义 ………………125

§4·2　方根的性质 ………………127

§4·3　方根的記法 ………………129

§4·4　算术根 ……………………131

§4·5　完全平方数的开平方 …135

§4·6　开平方的一般方法 ……137

§4·7　近似平方根 ………………144

§4·8　平方根表和它的用法 …147

§4·9　立方根表和它的用法 …152

本章提要 ……………………155

复习题四 ……………………155

第五章　实数 ……………………158

§5·1　无理数 ……………………158

§5·2　实数 ……………………163

§5·3 近似数概念 ……………167
§5·4 近似数的加法和减法 …174
§5·5 近似数的乘法和除法 …177
§5·6 近似数的乘方和开方 …180
§5·7 近似数的混合运算 ……181
§5·8 几个常用的求近似值的公式 ……………………187
本章提要 ………………………191
复习题五 ………………………192
第六章 根式……………………194
§6·1 根式的意义 ……………194
§6·2 根式的基本性质 ………197
§6·3 同次根式 ………………199
§6·4 乘积的算术根 …………201
§6·5 分式的算术根 …………203
§6·6 根式里面和外面的因式的移动 …………………205
§6·7 化去根号里的分母 ……208
§6·8 最简根式 ………………211
§6·9 同类根式 ………………214
§6·10 根式的加减法 …………216
§6·11 根式的乘法 ……………219
§6·12 根式的乘方 ……………224
§6·13 根式的除法 ……………226
§6·14 把分母有理化 …………228
§6·15 根式的开方 ……………233
§6·16 $a\pm2\sqrt{b}$ 的算术平方根 ……………………………235
本章提要 ………………………238
复习题六 ………………………240
第七章 有理数指数幂…………243
§7·1 正整数指数幂 …………243
§7·2 零指数幂 ………………245
§7·3 負整数指数幂 …………246
§7·4 分数指数幂 ……………250
本章提要 ………………………259
复习题七 ………………………259
第八章 一元二次方程和可以化成一元二次方程来解的方程……………………261
§8·1 一元二次方程 …………261
§8·2 不完全一元二次方程的解法 ……………………263
§8·3 完全一元二次方程的解法(一)——因式分解法 270
§8·4 完全一元二次方程的解法(二)——配方法 ……273
§8·5 完全一元二次方程的解法(三)——公式法 ……276
§8·6 一元二次方程的根的判别式 ……………………280
§8·7 列出方程解应用题 ……284
§8·8 一元二次方程的根与系数的关系(韦达定理) …288
§8·9 韦达定理的应用 ………292
§8·10 二次三項式的因式分解 …………………………298
§8·11 利用十字相乘法分解二次三項式的因式 ………303
§8·12 二元二次多項式的因式分解 ……………………307
§8·13 双二次方程 ……………309
§8·14 可以化成一元二次方程来解的其他特殊的整式方程 ……………………312
§8·15 分式方程 ………………315
§8·16 无理方程 ………………320
本章提要 ………………………329
复习题八 ………………………330
第九章 二元二次方程組………333
§9·1 二元二次方程組 ………333
§9·2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所組成的方程組的解法 ……335
§9·3 由两个二元二次方程所組成的方程組的解法(一)——可以消去二次項的 ……………………344

§9·4 由两个二元二次方程所組成的方程組的解法(二)——可以消去一个未知数的 ……347
§9·5 由两个二元二次方程所組成的方程組的解法(三)——一个（或者两个）方程可以分解成两个一次方程的 ……350
§9·6 由两个二元二次方程所組成的方程組的解法(四)——两个方程都沒有一次項的 ……353
§9·7 由两个二元二次方程所組成的方程組的解法(五)——可以用除法降低方程的次数的 ……355
本章提要 ……357
复习題九 ……358
总复习題……360
习題答案……367

第一章　一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1·1 等　　式

在代数第一册里，我們已經学过代数式．我們知道，用运算符号把由数字或者字母表示的数連結起来所得的式子，叫做代数式．例如，$3a$，$-\frac{1}{2}x^2y$，$5x+7$，$\frac{5}{x-2}$，$(x+y)^2$ 等．我們还知道，单独的一个用数字或者字母表示的数，例如，x，a，3，5.4 等，也可以看做是代数式．

用等号連結两个代数式所成的式子，叫做**等式**．例如，

$m+2m=3m$；　　　　$\frac{4x^2}{2x}=2x$；

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；　　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

$x-5=8$；　　　　$x^2=9$

等都是等式．

在等式里，等号左边的代数式，叫做**左边**；等号右边的代数式，叫做**右边**．例如，在等式 $m+2m=3m$ 里，左边是 $m+2m$，右边是 $3m$．

我們来看上面的几个等式．在等式 $m+2m=3m$ 里，不論 m 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的．

等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是代数第一册里已經学过的乘法公式，它是多項式乘法的結果，不論 a 和 b 等于任何数值，左边和右边的值总是相等的．例如，当 $a=-\frac{1}{2}$，$b=0$ 时，左边等于 $\frac{1}{4}$，

右边也等于 $\frac{1}{4}$.

等式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式,不論 a 和 b 等于任何数值,左边和右边的值也总是相等的.

等式 $\frac{4x^2}{2x}=2x$, 这是根据分式的基本性质, 从約分所得的結果.当 $x=0$ 时,分母 $2x$ 等于 0, 分式沒有意义,所以 x 的数值不允許等于 0. 但是除了 $x=0$ 时分式沒有意义以外, 不論 x 等于其他任何数值,左边的值总是等于右边的值.

这就是說,在上面的四个等式里,不論用任何允許取的数值代替其中的字母,等式总是成立的.

一个等式,不論用任何允許取的数值代替其中的字母,它的左右两边的值总是相等的,这样的等式叫做**恒等式**. 例如,上面所讲的四个等式都是恒等式.

由数字組成的等式,也都是恒等式. 例如, 下面这些等式, 都是恒等式:

$-(7-2)=-7+2$; $\qquad (-2)^3=-8$;

$3^2+4^2=5^2$; $\qquad (7+3\times2-3)\div2=4+1$.

我們再来看等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$. 在等式 $x-5=8$ 里, x 并不是可以取任何数值都能使左右两边的值相等. 例如, 当 $x=1$ 时, 左边等于 -4, 而右边等于 8, 两边的值就不相等. 所以 $x-5=8$ 虽然是等式,但不是恒等式.

同样,在等式 $x^2=9$ 里, x 也不是可以取任何数值都能使等式成立. 例如,当 $x=-5$ 时,左边等于 25, 而右边等于 9, 两边的值就不相等,所以 $x^2=9$ 也不是恒等式.

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$.

【解】 (1) 因为不論 a 和 b 等于任何数值，左右两边的值总相等．所以 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 是恒等式．

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，例如，当 $x=5$ 时，左边等于 15，而右边等于 14，两边的值就不相等．所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式．

习 题 1·1

1．等式和代数式有什么区别？举两个例子来說明．

2．什么叫做恒等式？举两个例子．

3．指出下列等式中，哪些是恒等式？哪些不是恒等式？

(1) $4+7=11$; (2) $x+7=11$;

(3) $3x-5=-2$; (4) $-(x-4)=4-x$;

(5) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; (6) $x^2=x\cdot x$;

(7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; (8) $x^2=2x$;

(9) $9-2x=x-6$; (10) $3x-y=1$;

(11) $x+y=y+x$; (12) $x^2+y=x+y^2$;

(13) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$; (14) $(x-2)(x+1)=0$;

(15) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$; (16) $x^3-y^3=1$.

§1·2 方 程

我們来看下面这个問題：

什么数减去 2 等于 3？

如果用 x 表示这个数，那末可以写出等式

$$x-2=3.$$

因为这里 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等，所以 $x-2=3$ 不是恒等式．

在这个等式里，2 和 3 是問題中已經告訴我們的数，这种数叫做**已知数**．而字母 x 的值，需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之間的关系来确定的．

等式里字母的值，需要根据它与等式里的已知数之間的关系来确定的，这样的字母叫做**未知数**.

含有未知数的等式，叫做**关于这个未知数的方程**，簡称**方程**. 方程中不含未知数的項叫做**常数項**.

例如，$x-2=3$ 就是方程. 又如，$5y=2$，$x^2=9$，$x+y=10$ 等也都是方程.

在方程 $x-2=3$ 里，如果用 5 代替未知数 x，那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的**解**.

例如，5 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如，在方程 $5y=2$ 里，用 $\frac{2}{5}$ 代替未知数 y，方程左右两边的值相等，所以 $\frac{2}{5}$ 是方程 $5y=2$ 的解. 在方程 $x^2=9$ 里，用 3 或者 -3 代替未知数 x，方程左右两边的值都相等，所以 3 和 -3 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的**根**. 例如，方程 $x-2=3$ 的解是 5，我們也可以說，方程 $x-2=3$ 的根是 5. 同样可以說，方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$；方程 $x^2=9$ 的根是 3 和 -3.

求方程的解或根的过程，叫做**解方程**.

例 1. 根据下面所說的数量关系，列出方程：

(1) x 加上 3 等于 7；

(2) x 的 4 倍减去 2 等于 x 的 2 倍；

(3) x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8.

【解】 (1) $x+3=7$；

(2) $4x-2=2x$；

(3) $5x-3x=8$.

說明 x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8，就是說，x 的 5 倍减去 x 的 3 倍等于 8.

例 2. 檢驗下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根：

(1) 1;　　　(2) -1;　　　(3) 2.

【解】 (1) 用 1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

$$左边=1^2=1,\qquad 右边=1+2=3,$$

$\because$ 左边$\neq$右边, $\therefore$ 1 不是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(2) 用 -1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

$$左边=(-1)^2=1,\qquad 右边=-1+2=1,$$

$\because$ 左边$=$右边, $\therefore$ -1 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(3) 用 2 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x, 这时,

$$左边=2^2=4,\qquad 右边=2+2=4,$$

$\because$ 左边$=$右边, $\therefore$ 2 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

注 符号"$\neq$"讀做"不等于". 有些书上写成"$\mp$", 是通用的.

习 题 1·2

1. 用方程来表示下列数量关系:

(1) x 减去 6 等于 3;

(2) x 的 4 倍加上 5 等于 13;

(3) x 的 2 倍加上 7 等于它的 5 倍减去 8;

(4) x 的 3 倍比 x 的 5 倍小 4;

(5) y 比 y 的 $\frac{1}{4}$ 大 12;

(6) x 的 $\frac{1}{3}$ 与 x 的 $\frac{2}{5}$ 的和等于 22;

(7) x 与 2 的差的 5 倍等于 15;

(8) x 与 3 的和的平方等于 x 的 10 倍与 6 的和.

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数, 指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

(1) $x+2=0$, $(2, -2)$;

(2) $2x-5=1$, $(3, 4)$;

(3) $2x=6$, $(3, -3)$;

(4) $x^2=9$, $(3, -3)$;

(5) $x^2-x=6$, $(3, -2)$;

(6) $(x-3)(x+3)=0$, $(-3, 3, 0)$;

(7) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, $(8, -8)$;

(8) $2x(3x+2)=0$, $\left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$;

(9) $x(x-2)=8$, $(-2, 2, -4, 4)$;

(10) $x^3-7x=6$, $(1, 2, -3)$.

§1·3 同解方程

我們来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \tag{1}$$

$$3x=6. \tag{2}$$

如果用 $x=2$ 代入方程(1)时, 方程两边的值都等于 4, 所以 2 是方程 (1) 的根. 如果用 2 以外的任何数值代替方程 (1) 里的 x, 例如用 5 代替 x, 左边的值等于 13, 右边的值等于 4, 这时方程两边的值就不相等,所以 5 不是方程(1)的根. 因此,方程(1)只有一个根 2.

用同样的方法, 我們可以知道方程 (2) 也只有一个根 2. 这就是說,方程(1)的根和方程(2)的根完全相同.

两个方程,如果第一个方程的根都是第二个方程的根,并且第二个方程的根也都是第一个方程的根, 那末这两个方程叫做**同解方程**.

例如,方程(1)和方程(2)是同解方程.

又如,在习题 1·2 的第 2 题里,我們已經做过,知道方程 $2x-5=1$ 的根是 3, 方程 $2x=6$ 的根也是 3, 所以方程 $2x-5=1$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程.

方程 $x^2=9$ 有两个根 -3 和 3, 方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根 -3 和 3, 所以方程 $x^2=9$ 和方程 $(x-3)(x+3)=0$ 是同解方程.

但是, 方程 $x+2=0$ 的根是 -2, 方程 $x^2-x=6$ 的根是 -2 和 3, 虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程 $x^2-x=6$ 的根, 但是方程

$x^2-x=6$ 的两个根里，只有一个根 -2 是方程 $x+2=0$ 的根，而另一个根 3 却不是方程 $x+2=0$ 的根，所以这两个方程就不是同解方程。

例 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根：-2 和 $\frac{1}{2}$，方程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根：$\frac{1}{2}$ 和 -2，判别这两个方程是同解方程嗎？

【解】 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根，它們都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根，并且方程 $2x^2+3x=2$ 有两个根，它們也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根，所以这两个方程是同解方程。

习 題 1·3

1．(1) 什么叫做同解方程？

(2) 方程 $5x=10$ 和方程 $x+1=3$ 是不是同解方程？

2．(1) 第一个方程的根是 3 和 5，第二个方程的根是 5 和 3，这两个方程是不是同解方程？

(2) 第一个方程的根是 3 和 5，第二个方程的根是 3 和 -5，这两个方程是不是同解方程？

(3) 第一个方程的根是 3 和 5，第二个方程的根是 5，这两个方程是不是同解方程？

(4) 第一个方程的根是 3 和 5，第二个方程的根是 3，5 和 6，这两个方程是不是同解方程？

3．下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根，指出下列方程中哪些是同解方程：

(1) $2x-3=x$，(3)； (2) $2x-1=3x$，(-1)；

(3) $(x+1)(x-3)=0$，$(-1, 3)$； (4) $5x-8=2x+1$，(3)；

(5) $x^2-3x=0$，$(0, 3)$； (6) $x^2-3=2x$，$(3, -1)$。

[解法举例：方程 $2x-3=x$ 的根是方程 $5x-8=2x+1$ 的根，方程 $5x-8=2x+1$ 的根也是方程 $2x-3=x$ 的根，所以这两个方程是同解方程。]

4．(1) $\frac{1}{2}$ 和 -3 是方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 的根嗎？

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程？

(3) 方程$(2x-1)(x+3)=0$和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) 5 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根嗎? 4 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根嗎?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

§1·4 方程的两个基本性质

在上一节里,要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程,我們需要把两个方程的根一一代入檢驗,这样的方法是很麻煩的.为了解决这个問題,并且能够正确地掌握解方程的方法,我們先来研究方程的两个基本性质.

1. 方程的第一个基本性质 我們看下面一个問題:

什么数减去 3 等于 7?

如果設某数为 x, 可以列出方程

$$x-3=7.$$

我們如果用算术方法来考虑:某数减去 3 所得的差是 7, 大家都知道,这个某数(即被减数)等于差 7 与减数 3 的和. 列出方程,可以得到

$$x=7+3.$$

这里,当 $x=10$ 的时候, 方程 $x-3=7$ 的两边都等于 7, 方程 $x=7+3$ 的两边都等于 10. 这就是說, 10 是方程 $x-3=7$ 的根,也是方程 $x=7+3$ 的根. 所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程.

从这个例子,我們可以得出一个性质:

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数, 所得的方程和原方程是同解方程.

再看下面这个方程:

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式 $2x-1$, 得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候，方程 $3x-2=10$ 的两边相等，这时 $2x-1=7$，所以两边都减去整式 $2x-1$，实际上就是两边都减去 7，因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等．所以我們知道方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程．

根据上面所說的，我們得到方程的第一个基本性质：

方程的两边都加上（或者都减去）同一个数或者同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程．

例 1． 把下列方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x，而右边是用数字表示的数：

(1) $x-5=8$；

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$．

分析 利用方程的第一个基本性质，我們可以把原方程变形成它的最簡单形式的同解方程．

【解】 (1) $x-5=8$．

方程的两边都加上 5，得

$$x=8+5,$$

就是
$$x=13.$$

(2) $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$．

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$，得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项，得

$$x=1\frac{3}{10}.$$

注意 把方程逐步变形成它的同解方程时，不可以用"="把前后两个方程連結起来．例如，从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$，不能錯誤