数 学 竞 赛 资 料

一九七九年陕西省中学数学竞赛题解

陕西省数学会编

数 学 竞 赛 资 料

一 九 七 九 年

陕西省中学数学竞赛题解

出 版 说 明

为了培养青少年爱科学、学科学、用科学的积极性，培养和选拔优秀人才；推动教学工作，为实现新时期总任务，提高整个中华民族的科学文化水平作出贡献，教育部、全国科协、团中央将于今年五月间举行全国数学竞赛决赛。为了迎接全国决赛，我省于三月十八日在西安、咸阳、宝鸡、汉中、安康、商洛、渭南、铜川、延安、榆林等十个地（市）举行了复赛。在复赛前先由各地（市）普遍自下而上举行了县、地（市）初赛和预赛。现在我们把这次数学竞赛预赛和复赛的试题及其解答编辑出版，以供爱好数学的广大青少年和中小学教师及其他读者参考。

试题和解答是在陕西省数学会付理事长魏庚人教授直接指导下，由李珍焕教授和省数学竞赛命题阅卷小组及各地（市）有关方织同志共同努力完成的，题解中还吸收了参加竞赛学生中的优秀解答。

本书得到凤翔县印刷厂的大力支持，我们表示深切的谢意。

试题和解答仅供读者参考。殷切希望专家和读者批评指正。

一九七九年五月

内 容 提 要

本书汇集了一九七九年我省及各地（市）中学数学竞赛试题与题解，供广大青少年、中小学教师和广大数学爱好者参考。

陕 西 省 数 学 会 编

封面设计 赵钧龙

制　　图 陆献诚

目　　录

一九七九年陕西省中学数学竞赛复赛题解

第一试题解 （参考答案）

1．解不等式：

（1）$3x-1+\sqrt{x-5}>2x+3+\sqrt{x-5}$.

（2）$x^4-4x-1\geqslant 0$.

解：（1）原不等式与不等式组

$$\begin{cases} 3x-1>2x+3 & (1) \\ x-5\geqslant 0 & (2) \end{cases}$$

同解．由（1）得　$x>4$，由（2）得　$x\geqslant 5$.

∴　原不等式的解为　$x\geqslant 5$.

（2）$\because x^4-4x-1$

$$=(x^2+1+\sqrt{2}x+\sqrt{2})\cdot(x^2+1-\sqrt{2}x-\sqrt{2}),$$

$\therefore (x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})\geqslant 0.$

$\because x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$

$$=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}+\frac{1}{2}>0,$$

∴只要求解　$x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\geqslant 0$.

$\because x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}$

$$=\left(x-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cdot$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right),$$

∴原不等式的解为

$$x\geqslant\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},$$

或 $\quad x\leqslant\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

2．解方程组：

$$\begin{cases} 10^{3-\lg(x-y)}=2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7, & (1) \\ \sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}. & (2) \end{cases}$$

解：由（1），$\quad 10^{\lg\frac{1000}{x-y}}=2+\frac{8(1-2^5)}{1-2}$

$$=250,$$

$$\frac{1000}{x-y}=250,\quad x-y=4,\quad x=4+y.$$

代入（2），得$2+\frac{1}{2}\sqrt{4+2y}=\frac{26-y}{2}$，

$$y^2-46y+480=0.$$

由此得$\begin{cases} y_1=30, \\ x_1=34; \end{cases}$ $\begin{cases} y_2=16, \\ x_2=20, \end{cases}$

经检验知$\begin{cases} x_1=34 \\ y_1=30 \end{cases}$为增解，

∴原方程组的解为$\begin{cases} x=20, \\ y=16. \end{cases}$

3、已知a、b、c、d为四个正数，且abcd＝1，

求证：$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$的最小值是10．

证明一：
$$\begin{aligned}原式&=(a-b)^2+(c-d)^2+3ab+ac\\&\quad+ad+bc+bd+3cd\\&\geqslant 3ab+ac+ad+bc+bd+3cd\\&=3(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)\\&=3\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right).\end{aligned}$$

根据定理$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，得 $ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2$.

$ad+\frac{1}{ad}\geqslant 2$, $ac+\frac{1}{ac}\geqslant 2$.

∴原式≥10，即原式的最小值是10．

证明二：由等差中项大于等于等比中项定理，得

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$\geqslant 10\sqrt[10]{(abcd)^5}=10$$

∴原式的最小值是10．

4、已知△ABC的内切圆在BC、CA、AB上的切点

分别为D、E、F，P为△ ABC内一点，PD平分∠BPC，PE平分∠CPA，求证：PF平分∠APB.

证明：

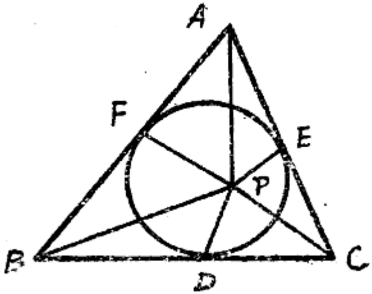

图 1

∵PD平分∠BPC，

∴PB：PC＝BD：DC

同理有

PC：PA＝CE：EA

∵DC＝CE，

∴PB：PA＝BD：EA.

又∵BD＝BF，　EA＝AF，

∴PB：PA＝BF：FA.

故PF平分∠APB.

5、设正四棱锥S－ABCD的棱SA的中点为M，平面MBD与底面所成二面角为60°，求这四棱锥的内切球的体积与这四棱锥体积之比。

解：设底面四边形边长为 a，由题设∠MGA＝60°，因M、G分别为SA、AC的中点，故MG∥SC，∠SAC＝∠SCA＝∠MGA＝60°.

∵△SAC是等边三角形，SA＝SC＝AC＝$\sqrt{2}a$，

$$SG=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

∴四棱锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

内切球同底面相切于该面的对角线，而与△SBC、△SAD必分别切于其底边中线SE、SF，因而同平面SEF的交线必为△SEF的内切圆，圆半径即球半径R，由于$\frac{\sqrt{6}}{4}a^2=\frac{1}{2}EF\cdot SG$

$=$△SEF的面积

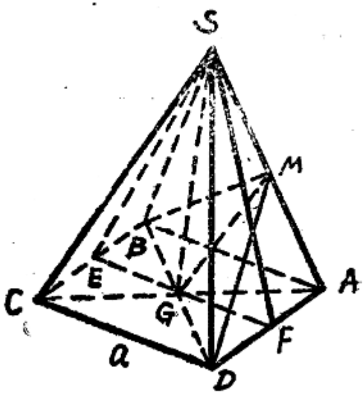

图 2

$$=\frac{R}{2}(EF+SE+SF)$$

$$=\frac{R}{2}(a+2\sqrt{EG^2+SG^2})$$

$$=\frac{R}{2}\left[a+2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2}\right]$$

$$=\frac{R}{2}(\sqrt{7}+1)a$$

$$\therefore\quad R=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2\Big/\frac{1}{2}(\sqrt{7}+1)a=\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{7}-1)a.$$

内切球的体积$v_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{6}}{108}(5\sqrt{7}-11)\pi a^3$

于是所求体积之比$v_1:v_2=\frac{\pi}{18}(5\sqrt{7}-11)$.

6．设以原点O为圆心的单位圆与x轴的正向交于A点，且$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$两点在⊙0上，如果$2\overset{\frown}{AP_1}=\overset{\frown}{AP_2}$，试求：（1）当$x_1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$时，弦$P_1P_2$的长；

（2）$x_2=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$时，$x_1^6+y_1^6$的值．

解：（1）分两种情况：i）AP_1与AP_2同向；ii）AP_1与AP_2反向

i）$\because 2\overset{\frown}{AP_1}=\overset{\frown}{AP_2}$，

$\therefore \overset{\frown}{AP_1}=\overset{\frown}{P_1P_2}$，$|AP_1|=|P_1P_2|$．

又$\because$ P_1在⊙0上，$\therefore x_1^2+y_1^2=1$．

$\therefore$当$x_1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$时，

$$|P_1P_2|=|AP_1|$$

$$=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2-2x_1+1+y_1^2}$$

$$=\sqrt{2-2x_1}$$

$$=\sqrt{2-2(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2})}$$

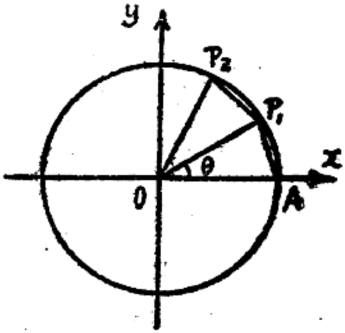

图　3

$$=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

即当AP_1与AP_2同向时，

弦P_1P_2的长为$\sqrt{2}-1$.

ii)设$\angle AOP_1=\theta$,

则$\angle AOP_2=2\theta$,

$\cos\theta=x_1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

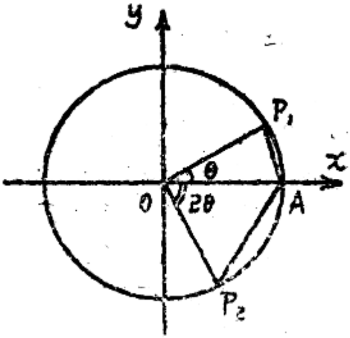

图 4

根据余弦定理

$$|P_1P_2|=\sqrt{P_1O^2+P_2O^2-2P_1O\cdot P_2O\cos3\theta}$$
$$=\sqrt{1+1-2\cos3\theta}$$
$$=\sqrt{2-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)}$$
$$=\sqrt{2-2[4(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2})^3-3(\sqrt{2}-\tfrac{1}{2})]}$$
$$=2(2-\sqrt{2})$$

即当AP_1与AP_2反向时,弦P_1P_2的长为$2(2-\sqrt{2})$

(2)$\because x_1^6+y_1^6=\cos^6\theta+\sin^6\theta$

$$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta)$$
$$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-\tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta$$
$$=1-\tfrac{3}{4}(1-\cos^2 2\theta)$$
$$=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}\cos^2 2\theta$$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x_2^2$

$\therefore$ 当 $x_2 = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，　　$x_1^6 + y_1^6 = \dfrac{11}{12}$.

7．已知A（1，1），B（5，3），C（4，5）．直线L平分△ABC的面积且L∥AB，求L的方程。

解：设L与AC相交于P（X，Y）

$\because CP^2 : CA^2 = 1 : 2$，$\therefore CP : CA = 1 : \sqrt{2}$

$CP : PA = 1 : (\sqrt{2} - 1)$

$= \sqrt{2} + 1$．

于是，得

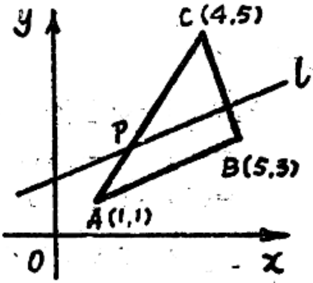

图　5

$$X = \frac{4 + (\sqrt{2} + 1)}{1 + (\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}},$$

$$Y = \frac{5 + (\sqrt{2} + 1)}{2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{6 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

故L的方程为

$$y - \frac{6 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 - 1}{5 - 1}\left(x - \frac{5 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)$$

即 $\qquad 2x-4y+12-5\sqrt{2}=0$.

8．解方程组：

$$\begin{cases} \cos x+\dfrac{1}{\cos x}=18\operatorname{tg}y, & (1) \\ \sin x+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}y . & (2) \end{cases}$$

解：（1）×（2）得

$$\cos x\sin x+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x\sin x}=\frac{9}{2} .$$

$$\therefore \cos x\sin x+\frac{2}{\cos x\sin x}=\frac{9}{2}$$

$\sin^2 2x-9\sin 2x+8=0$.

$\therefore (\sin 2x-1)(\sin 2x-8)=0$.

$\because \sin 2x-8\neq 0$. $\qquad \therefore \sin 2x=1$.

故 $2x=(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

$\therefore x_1=\dfrac{\pi}{4}+2m\pi$.

或 $x_2=\dfrac{5}{4}\pi+2m\pi$

当 $x=\dfrac{\pi}{4}+2m\pi$ 时，

$\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，代入（2）得

$$\operatorname{ctg}y=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=6\sqrt{2} .$$

$\therefore y=\operatorname{arcctg}6\sqrt{2}+n\pi$；

当$x=\frac{5}{4}\pi+2m\pi$时，

$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入（2）得

$\operatorname{ctg} y=-6\sqrt{2}$

$\therefore\ y=\operatorname{arcctg}(-6\sqrt{2})+n\pi$

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{4}+2m\pi, \\ y_1=\operatorname{arcctg}6\sqrt{2}+n\pi \end{cases}$$

$$x_2=\frac{5}{4}\pi+2m\pi,$$

$$y_2=\operatorname{arcctg}(-6\sqrt{2})+n\pi$$

9、设a_1，a_2，a_3……，a_n都是正数，且构成等比数列，求证：

$$\frac{1}{\lg a_1\lg a_2}+\frac{1}{\lg a_2\lg a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lg a_{n-1}\lg a_n}=\frac{n-1}{\lg a_1\lg a_n}.$$

证明：设公比为r，则$a_2=a_1r$、$\lg a_2=\lg a_1+\lg r$

$$\frac{1}{\lg a_1\lg a_2}=\frac{1}{\lg a_1(\lg a_1+\lg r)}$$

$$=\frac{1}{\lg r}\left(\frac{1}{\lg a_1}-\frac{1}{\lg a_1+\lg r}\right)$$

$$=\frac{1}{\lg r}\left(\frac{1}{\lg a_1}-\frac{1}{\lg a_2}\right)$$

同理$\dfrac{1}{\lg a_2 \lg a_3}=\dfrac{1}{\lg r}\left(\dfrac{1}{\lg a_2}-\dfrac{1}{\lg a_3}\right)$，

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\lg a_{n-1}\lg a_n}=\frac{1}{\lg r}\left(\frac{1}{\lg a_{n-1}}-\frac{1}{\lg a_n}\right)$$

又因 $\quad a_n=a_1 r^{n-1}$

$$\lg a_n=\lg a_1+(n-1)\lg r$$

$$\therefore \frac{1}{\lg a_1 \lg a_2}+\frac{1}{\lg a_2 \lg a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lg a_{n-1}\lg a_n}$$

$$=\frac{1}{\lg r}\left(\frac{1}{\lg a_1}-\frac{1}{\lg a_2}+\frac{1}{\lg a_2}-\frac{1}{\lg a_3}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lg a_{n-1}}-\frac{1}{\lg a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{\lg r}\left(\frac{1}{\lg a_1}-\frac{1}{\lg a_n}\right)=\frac{\lg a_n-\lg a_1}{\lg r\lg a_1\lg a_n}$$

$$=\frac{(n-1)\lg r}{\lg r\lg a_1\lg a_n}=\frac{n-1}{\lg a_1\lg a_n}.$$

10．P为正方形ABCD内一点，P到A、B、D距离分别为1，3，$\sqrt{7}$．求正方形ABCD的面积。

解一：

作$EA\perp AP$，

且 $EA=1$，

则$\triangle ADE\cong\triangle ABP$，

$DE=BP=3$，

又$\triangle AEP$为等腰Rt$\triangle$

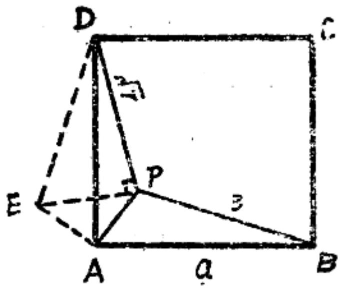

图 6