近世代数题解

扬州师院数学系代数教研室编

目 录

第一章　基本概念

练　习

§1　集合　子集　集合的运算

1. 设 $A=\{x|x\in\mathbf{R},\ |x|\geqslant 5\}$，$B=\{x|x\in\mathbf{R},$
$-6\leqslant x<0\}$，
求$A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$，$B\backslash A$，并用图形表示。

解　$A\cup B=\{x|x\in\mathbf{R},\ x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$；

$A\cap B=\{x|x\in\mathbf{R},\ -6\leqslant x\leqslant -5\}$；

$A\backslash B=\{x|x\in\mathbf{R},\ x<-6$ 或 $x\geqslant 5\}$；

$B\backslash A=\{x|x\in\mathbf{R},\ -5<x<0\}$。

图形略。

2. 证明：$(A\subset B)\Longleftrightarrow(A\cup B=B)\Longleftrightarrow(A\cap B=A)$。

证　先证　$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B$。

若 $A\subset B$，则 $\forall x\in A\cup B$，$x\in B$。$\therefore A\cup B\subset B$；显然 $A\cup B\supset B$，故 $A\cup B=B$。反之，若 $A\cup B=B$，则 $\forall x\in A$，$x\in A\cup B=B$，故 $A\subset B$。　$\therefore A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B$。

次证　$A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

若 $A\subset B$，则$\forall x\in A$，$x\in B$，于是$\forall x\in A$，有 $x\in A\cap B$，$\therefore A\subset A\cap B$，显然 $A\cap B\subset A$，$\therefore A\cap B=A$。反之，若 $A\cap B=A$，则 $\forall x\in A$，$x\in A\cap B$，于是 $\forall x\in A$，有 $x\in B$，故 $A\subset B$。$\therefore A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

综上证得，$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$。

3. 证明：$A=B \Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

证 若 $A=B$，则 $A\cup B=A$，$A\cap B=A$，$\therefore A\cup B=A\cap B$. 反之，若 $A\cup B=A\cap B$，则 $\forall x\in A$，有 $x\in A\cup B=A\cap B$，从而 $x\in B$，$\therefore A\subset B$；同理可证 $B\subset A$，故 $A=B$. $\therefore A=B \Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

4. 设 $A_n=(n,\infty)$，(n,∞) 表示实数轴上的开区间，即 $(n,\infty)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},\ n<x<\infty\}$，$n=0,1,2,\cdots$.

求 $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$，$\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}A_i$.

解 $\because$ $A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots$，$\therefore$ $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i=A_0=(0,\infty)$.

$\because$ $\forall x\in\mathbf{R}$，存在非负整数 n，使 $x\leqslant n$，于是 $x\bar{\in}A_n$，$x\bar{\in}\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}A_i$，$\therefore$ $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}A_i=\phi$.

5. 设 $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z}.\ x^2-3x+2=0\}$，写出 2^A.

解 $A=\{1,2\}$，故 $2^A=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

6. 设 A,B 是 U 的子集，规定

$A+B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$，证明：$a)$ $A+B=B+A$

$b)$ $A+\phi=A$，$c)$ $A+A=\phi$.

证 $a)$ $\because$ 集合的并适合交换律，故 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(B\backslash A)\cup(A\backslash B)$，即 $A+B=B+A$.

$b)$ $\because$ $A\backslash\phi=A$，$\phi\backslash A=\phi$，

$\therefore$ $(A\backslash\phi)\cup(\phi\backslash A)=A\cup\phi=A$，即 $A+\phi=A$.

$c)$ $\because A\backslash A=\phi$，$\therefore (A\backslash A)\cup(A\backslash A)=\phi$，即 $A+A=\phi$.

§2 映射 映射的合成

1. 对于下面给出的 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射 f,g,h

$$f: x \longmapsto 3x,$$
$$g: x \longmapsto 3x+1,$$
$$h: x \longmapsto 3x+2;$$

计算 $f\circ g$，$g\circ f$，$g\circ h$，$h\circ g$，$f\circ g\circ h$。

解 $f\circ g: x \longmapsto 9x+3$。 $g\circ f: x \longmapsto 9x+1$。

$g\circ h: x \longmapsto 9x+7$。 $h\circ g: x \longmapsto 9x+5$。

$f\circ g\circ h: x \longmapsto 27x+21$。

2. 对于上题的 f, g, h 分别求出它们的左逆映射。

解 f 的一个左逆映射为 f_L^{-1}：

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3}x, & \text{当 } x=3n, \\ x, & \text{当 } x\neq 3n. \end{cases}$$

g 的一个左逆映射为 g_L^{-1}：

$$x \longmapsto \begin{cases} x, & \text{当 } x\neq 3n+1, \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}, & \text{当 } x=3n+1. \end{cases}$$

h 的一个左逆映射为 h_L^{-1}：

$$x \longmapsto \begin{cases} x, & \text{当 } x\neq 3n+2, \\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}, & \text{当 } x=3n+2. \end{cases}$$

其中 n 为任意整数。

3. 对于上题的 f, g, h，找出 f, g, h 的共同的左逆映射，即找出 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射 k，使

$$k\circ f = k\circ g = k\circ h = I_{\mathbf{Z}}.$$

解 命 $k: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$,

$$
x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{3}x, & \text{当 } x = 3n, \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}, & \text{当 } x = 3n+1, \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}, & \text{当 } x = 3n+2。\text{其中 } n \text{ 为任意整数。} \end{cases}
$$

容易验证，k 是 f, g, h 的一个共同的左逆映射。

4。对于上题的 f, g, h，找出 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射，使其为 f, g 的共同的左逆映射，但不是 k 的左逆映射。

解 命 k：$\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$，

$$
x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{3}x, & \text{当 } x = 3n, \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}, & \text{当 } x = 3n+1, \\ x, & \text{当 } x = 3n+2。\text{其中 } n \text{ 为任意整数。} \end{cases}
$$

容易验证，k 为满足题中要求的映射。

5。设 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射，$g \circ f$ 有左逆映射，能否证明 f, g 都有左逆映射？

解 当 f, g 为题设，且 $g \circ f$ 有左逆映射，可以证明 f 有左逆映射，但 g 未必有左逆映射。

证 f 有左逆映射。

设 $g \circ f$ 有一个左逆映 k，于是对任一 $a \in A$，有 A 到 C 映射 $(k \circ (g \circ f))(a) = a = I_A(a)$。

根据映射合成满足结合律得，$((k \circ g) \circ f)(a) = a$，$\forall a \in A$。故 $k \circ g$ 为 f 的一个左逆映射。

g 未必有左逆映射。例 $A = \{1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，$C = \{1, 2\}$，

命 f：$A \longrightarrow B$， $x \longmapsto x$，

$$g: \quad B \longrightarrow C. \qquad i \longmapsto i,\ i=1,2.$$
$$3 \longmapsto 1.$$

容易验证，$g\circ f$ 存在左逆映射，但 g 不存在左逆映射。

6*. 设 f 是 A 到 B 的单射（满射），g 是 B 到 C 的单射（满射），则 $g\circ f$ 是 A 到 C 的单射（满射）。

证 设 f 是 A 到 B 的单射，g 是 B 到 C 的单射，则对任意 $a_1, a_2 \in A$，且 $a_1 \neq a_2$，有 $f(a_1) \neq f(a_2)$，从而 $(g\circ f)(a_1) \neq (g\circ f)(a_2)$，于是 $g\circ f$ 是 A 到 C 的单射。

设 f 是 A 到 B 的满射，则 $f(A)=B$；g 是 B 到 C 的满射，则 $g(B)=C$。

于是 $(g\circ f)(A)=g(B)=C$，$\therefore g\circ f$ 是 A 到 C 的满射。

7. 设 A 表示某四年制大学数学系全体学生所成集合，$B=\{1, 2, 3, 4\}$。对每一 $a\in A$，规定 $f(a)$ 表示 a 所在年级，这个 f 是不是 A 到 B 的映射？是单射？满射？任取 $a\in A$，$f^{-1}(f(a))=$？设 $b_1, b_2\in B$，$b_1\neq b_2$，问 $f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=$？ $\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=$？

解 根据题意，任一 $a\in A$，是且仅是某一个年级的学生，故 $f(a)$ 是 B 中唯一确定的元素，所以 f 是 A 到 B 的映射。

f 未必是满射，因为未必每个年级都有学生；一般说 f 不是单射，因为某年级如有学生，一般不会只有一人。

$f^{-1}(f(a))=\{a$ 所在年级的全体学生$\}$。

当 $b_1, b_2\in B$，$b_1\neq b_2$ 时，$f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=\phi$。

$\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=A$。

8. 设 $A=B=\mathbf{Z}$，m 是取定的正整数，对每一 $a\in A$，规

定 $f(a)=r$，此处 r 是 a 被 m 除所得非负余数：$a=qm+r$，$0\leqslant r<m$。f 是不是 A 到 B 的映射，是单射？满射？

若取 $B=\{0,1,2,\cdots m-1\}$，问 $f^{-1}(0)$，$f^{-1}(1)$，$\cdots$，$f^{-1}(m-1)$ 分别由哪些数所组成？设 $i,j\in B$，$i\neq j$，$f^{-1}(i)\cap f^{-1}(j)=$？$\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=$？

解 依题意且根据整数的带余除法知，f 是 A 到 B 的映射。f 不是单射，也不是满射。

设 $B=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，则依题意，

$f^{-1}(0)=\{x|x=\mathrm{k}m,\quad \mathrm{k}=0\pm1,\pm2,\cdots\}$，

$f^{-1}(1)=\{x|x=\mathrm{k}m+1,\ \mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，

…………

$f^{-1}(m-1)=\{x|x=\mathrm{k}m+(m-1),\ \mathrm{k}=0,\pm1,\pm2\cdots\}$。

$i,j\in B$，$i\neq j$ 时，$f^{-1}(i)\cap f^{-1}(j)=\phi$。

$\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=\mathbf{Z}$。

9．设 A 是座标平面上所有点的集合，B 是 x 轴上所有点的集合，对每一 $a\in A$，规定 $f(a)$ 表示 a 向 x 轴作垂线的垂足，这个 f 是不是 A 到 B 的映射？是单射？满射？设 b_1，$b_2\in B$，$b_1\neq b_2$，$f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=$？$f^{-1}(f(a))=$？$\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=$？

解 依题意，f 是 A 到 B 的映射，显然 f 是满射，f 不是单射。

设 b_1，$b_2\in B$，$b_1\neq b_2$，则 $f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=\phi$。

$f^{-1}(f(a))=\{$通过点 $f(a)$，且平行于 y 轴的直线上的所有点$\}$。

$\bigcup\limits_{b\in B} f^{-1}(b)=A$。

10. 设 f: $A \longrightarrow B$，$S \subseteq A$，证明 $f^{-1}(f(S)) \supseteq S$，举例说明“=”不一定成立。

证 设 f: $A \longrightarrow B$，$S \subseteq A$，则对任意 $s \in S$，$f(s) \in f(S)$，$\therefore s \in f^{-1}(f(S))$，$f^{-1}(f(S)) \supseteq S$。

例：取 $A = B = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$S = \{0\} \subseteq A$，作 A 到 B 的映射 f：$\forall a \in A$，$f(a) = 0$，显然 $f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(0) = A \neq S$。

§3 有限集与可数集

1. 证明，有限集的任一子集都是有限集；无限集的任一扩集都是无限集。

证 设 A 为有限集，若 $A = \phi$，则结论成立。现在设 A 不空，则 A 的元素可以如下列举出来：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

A 的空子集显然是有限集，若 B 是 A 的非空子集，则 B 的元素可以如下列举出来：

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_m.$$

于是 B 与自然数集的一个断片 $|1, m| = \{1, 2, \cdots, m\}$ 等浓，B 是有限集。

设 A 为无限集，B 是 A 的任一扩集。若 B 不是无限集，则 B 为有限集，从而由前半部证明，B 的任一子集，特别的 B 的子集 A 为有限集，此与假设不合。$\therefore$ B 是无限集。

2. 证明，一个有限集与一个可数集的并是可数集。

证 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为有限集，$B = \{b_1, b_2, \cdots$

$b_n, \cdots\}$为可数集，则 $A\cup B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$。

作　f：$A\cup B \longrightarrow \mathbf{Z}^+$，

$$a_i \longmapsto i \quad 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$b_j \longmapsto n+j \quad j=1, 2, \cdots.$$

显然f是$A\cup B$到$\mathbf{Z}^+$上的一一映射，$\therefore A\cup B$与$\mathbf{Z}^+$等浓，从而$A\cup B$为可数集。

3．找出自然数集P的三个与P等浓的真子集A_1, A_2, A_3。

解　设$P=\{1, 2, 3, \cdots\}$，命$A_1=\{$全体正奇数$\}$，$A_2=\{$全体正偶数$\}$，$A_3=P\backslash\{1\}$。A_1, A_2, A_3为P的真子集，容易看出存在$A_i(i=1, 2, 3)$到P上的一一映射，$\therefore A_i(i=1, 2, 3)$与$P$等浓。

4．证明，坐标平面上所有格子点（即坐标均为整数的点）的集合是可数集。

证　记所有格子点之集为A，即$A=\{(a, b)|, a, b\in\mathbf{Z}\}$。可将$A$的元素排成一个方阵，再按下图所予箭头方向给$A$中元素按自然数顺序编号：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(0,0) & \to & (0,1) & & (0,-1) & \to & (0,2) & & (0,-2) & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,-1) & & (1,2) & & (1,-2) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(-1,0) & & (-1,1) & & (-1,-1) & & (-1,2) & & (-1,-2) & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & (2,-1) & & (2,2) & & (2,-2) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
(-2,0) & & (-2,1) & & (-2,-1) & & (-2,2) & & (-2,-2) & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

这样，A 的元素可利用自然数排列出来，故 A 是可数集。

✓ 5. 证明，开区间 (a, b) 与闭区间 $[a,b]$ 等浓。

证 映射 $f: x \longmapsto (b-a)x+a$ 显然是 $(0,1)$ 到 (a,b)，$[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射。由 P.18 例 4 知，$(0,1)$ 与 $[0,1]$ 等浓。设 φ 是 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的双射，则 $f\varphi f^{-1}$ 是 (a,b) 到 $[a,b]$ 的双射，所以 (a,b) 与 $[a,b]$ 等浓。

也可以用类似 P.18 例 4 的方法，直接做 (a,b) 到 $[a,b]$ 的双射。

6. 利用例 3 的方法，证明全体"自然数的无限序列"作成的集合是不可数集。

证 设 $\{A = X \mid X = (a_1, a_2 \cdots, a_n \cdots), a_i \in \mathbf{Z}^+\}$，显然 A 为无限集。假定 A 为可数集，则 A 的元素可用自然数予以编号，于是 $A = \{X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots\}$，其中

$$X_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots)$$
$$X_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots$$

作自然数的无限序列 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，其中 $a_i = a_{ii}$，$i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$。显然 $X \in A$，但 X 与 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 中的任一个都不相同，从而产生矛盾。故 A 为不可数集。

§4 加氏积 二元关系与等价关系

1. 设 $\mathbf{R}^*$ 表示一切非零实数作成的集合，数目的 +、－、×、÷ 是不是 $\mathbf{R}^*$ 的代数运算？为什么？n 次方幂，n

次方根是不是 R^* 的一元运算？为什么？ $logx$ 是不是一元运算？为什么？构造 R^* 的两个三元运算。

解 数目的 $\times$、$\div$ 是 R^* 的代数运算。$\because \forall a,b\in R^*$ $a\times b$，$a\div b$ 是 R^* 中唯一确定的元素。数目的 $+$、$-$ 不是 R^* 的代数运算。$\because$ $\forall a\in R^*, -a\in R^*$，但 $a+(-a)=0\bar{\in} R^*$。$a-a=0\bar{\in} R^*$。n 次方幂是 R^* 的一元运算。$\because$ $a\in R^*$，a^n 是 R^* 中唯一确定的元素。当 n 是奇数时，n 次方根是 R^* 的一元运算。当 n 为偶数时，n 次方根不是 R^* 的一元运算。$\because$ 负数在实数范围内不能开偶次方。$logx$ 不是 R^* 的一元运算。$\because 1\in R^*$，而 $log1=0\bar{\in} R^*$。构造 R^* 的两个三元运算 f_1，f_2 如下：

$f_1(x, y, z)=x$，$f_2(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$，x, y, z 为 R^* 中的任意元。

2．设 $A=\{a, b\}$，$R=\{(a, a)\}$，R 是否具有反身性？对称性？传递性？反对称性？

解 R 不具有反身性，$\because$ $bR'b$。但 R 具有对称性，传递性，反对称性。

3．设 $A=\{$平面上所有直线$\}$，规定 A 中的二元关系 $\sim$ 为：$l_1, l_2\in A$，$l_1\sim l_2 \Longleftrightarrow l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1=l_2$。证明，$\sim$ 是 A 的一个等价关系，决定相应的等价类。

证 依题意，$\forall l\in A$，有 $l=l$，故 $l\sim l$。

任意 $l_1, l_2\in A$，若 $l_1\sim l_2 \Rightarrow l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1=l_2 \Rightarrow l_2 /\!/ l_1$ 或 $l_2=l_1 \Rightarrow l_2\sim l_1$。

任意 $l_1, l_2\ l_3\in A$，若 $l_1\sim l_2$ 且 $l_2\sim l_3 \Rightarrow l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1=l_2$ 且 $l_2 /\!/ l_3$ 或 $l_2=l_3 \Rightarrow l_1 /\!/ l_3$ 或 $l_1=l_3 \Rightarrow l_1\sim l_3$。

可见 $\sim$ 具有反身性、对称性、传递性，$\therefore \sim$ 是 A 的一个等价关系。

当 $l\in A$ 时，由 l 决定的等价类为：

直线 $y=\mathrm{k}x=\{l|l\in A，l\parallel$ 直线 $y=\mathrm{k}x$，或 l 就是直线 $y=\mathrm{k}x\}$，k 为任意实数，直线 $x=0=\{l|l\in A, l\parallel$ 直线 $x=0$，或 l 就是直线 $x=0\}$。

4. 在复数集 **C** 中，规定二元关系～为：

$$a\sim b\iff a\text{ 的幅角}=b\text{ 的幅角}.$$

证明，～是 **C** 的一个等价关系，决定相应的等价类。

证 $\forall a\in\mathbf{C}$，有 $\arg a=\arg a$，故 $a\sim a$。

任意 $a, b\in\mathbf{C}$，若 $\arg a=\arg b\Rightarrow\arg b=\arg a$，即由 $a\sim b\Rightarrow b\sim a$。

任意 $a, b, c\in\mathbf{C}$，设 $a\sim b$，$b\sim c$，则 $\arg a=\arg b$，$\arg b=\arg c\Rightarrow\arg a=\arg c$，故 $a\sim c$

可见～是 **C** 的一个等价关系。

等价类为：$\bar{a}_\varphi=\{z|z\in\mathbf{C}，\arg z=\varphi+2\mathrm{k}\pi，\mathrm{k}\in\mathbf{Z}\}\ 0\leqslant\varphi<2\pi$；与 $\bar{0}=\{0\}$。

5. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，在 2^A 中规定二元关系～：$S\sim T\iff S, T$ 含有元素个数相同，证明，这是一个等价关系，写出商集 $2^A/\sim$。

证 记 2^A 的元素 S 所含元素个数为 $|S|$。$\forall S\in 2^A$，则 $|S|=|S|$，依题意 $S\sim S$。

对任意的 $S, T\in 2^A$，若 $S\sim T$，则 $|S|=|T|\Rightarrow|T|=|S|$，即 $T\sim S$。

任意的 $S, T, V\in 2^A$，由 $S\sim T$ 和 $T\sim V\Rightarrow|S|=|T|$，$|T|=|V|\Rightarrow|S|=|V|$，即 $S\sim V$。

$\therefore$ ～是 2^A 的一个等价关系。

商集 $2^A/\sim=\{\phi, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 其中

$A_1=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$,

$A_2=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$,

$A_3=\{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$,

$A_4=A$。

√6. $(F)_n$ 表示数域F上全部n阶方阵的集合，f是$(F)_n$到$\{0,1,2,\cdots,n\}$上的满射。

$$f: (a_{ij}) \longmapsto 秩(a_{ij})$$

求f决定的等价关系，决定等价类。

解 由f确定的$(F)_n$中的等价关系为：

$(a_{ij})\sim(b_{ij}) \Longleftrightarrow f((a_{ij}))=f((b_{ij}))$，即秩$(a_{ij})=$秩$(b_{ij})$。

等价类为：

$\overline{A}_r=\{X\,|\,X=(x_{ij})\in(F)_n, 秩X=r\}, r=0,1,2,\cdots,n$。

7. 设R_1，R_2是A的两个等价关系，$R_1\cap R_2$是不是A的二元关系？是不是等价关系？为什么？$R_1\cup R_2$是不是A的二元关系？

解 集A的二元关系，实际上是$A\times A$的子集，而$A\times A$的两个子集之交、之并仍然是$A\times A$的子集，故$R_1\cap R_2$，$R_1\cup R_2$都是A的二元关系。

若R_1，R_2皆A的等价关系，$R_1\cap R_2$仍是A的等价关系。事实上，$\forall a\in A$，$(a,a)\in R_1$，$(a,a)\in R_2 \Rightarrow (a,a)\in R_1\cap R_2$。

对任意a，$b\in A$，若$(a,b)\in R_1\cap R_2\Rightarrow(a,b)\in R_1$，$(a,b)\in R_2$，但$R_1$，$R_2$为等价关系，故$(b,a)\in R_1$，$(b,a)\in R_2$，于是$(b,a)\in R_1\cap R_2$。

同样可证，$R_1\cap R_2$具有传逆性，所以$R_1\cap R_2$是A的

等价关系。

8. 设 R_1，R_2 是A的两个二元关系，规定

$R_1 \circ R_2 = \{(a, b) \mid \exists x \in A: (a, x) \in R_1, (x, b) \in R_2\}$.

证明，“$\circ$”是A的一切二元关系所成集合B的一个二元运算。

证∵$R_1 \circ R_2$ 是 $A \times A$ 的一个子集，即 $R_1 \circ R_2$ 确定了A的一个二元关系。∴“$\circ$”：$(R_1, R_2) \longmapsto R_1 \circ R_2$ 是 $B \times B$ 到B的一个映射，故它是B的一个二元运算。

9. 设 $(\mathbf{R})_n$ 表示实数域 $\mathbf{R}$ 上一切 n 阶方阵的集合。

a）对于 $A, B \in (\mathbf{R})_n$，规定

$AR_1B \Longleftrightarrow \exists P, Q \in (\mathbf{R})_n, |P| \neq 0, |Q| \neq 0: PAQ = B$.

证明，R_1 是 $(\mathbf{R})_n$ 的一个等价关系。等价元素类取怎样的方阵作为代表元，形式最简单？

b）对于 $A, B \in (\mathbf{R})_n$，规定

$AR_2B \Longleftrightarrow \exists P \in (\mathbf{R})_n, |P| \neq 0: PAP^{-1} = B$.

证明，R_2 是 $(\mathbf{R})_n$ 的一个等价关系。等价元素类的代表元是怎样的方阵，形式最简单？

c）对于 $A, B \in (\mathbf{R})_n$，规定

$AR_3B \Longleftrightarrow \exists P \in (\mathbf{R})_n, |P| \neq 0: PAP' = B$.

证明，R_3 是 $(\mathbf{R})_n$ 的一个等价关系。等价元素类取怎样的代表元形式最简单？

d）对于 $A, B \in (\mathbf{R})_n$，规定

$AR_4B \Longleftrightarrow \exists P \in (\mathbf{R})_n, PP' = I$（单位方阵）：$PAP' = B$.

证明，R_4 是 $(\mathbf{R})_n$ 的一个等价关系。等价元素类可以取怎样的代表元？

证 由线性代数知识可知，实数域上 n 阶方阵的等价、相似以及实对称矩阵的合同、正交合同皆具有反身性、对称性、传递性，故本题中的 R_1，R_2，R_3，R_4 皆是等价关系。

关于 R_1，等价元素类的代表取如下方阵，形式最简单：

$$E_r = diag(\underbrace{1,1,\cdots 1}_{r},0,\cdots,0),\ (0\leqslant r\leqslant n)$$

由等价关系R_2所划分的等价类，其代表元可取矩阵的有理标准形（详见张远达，熊全淹的《线性代数》第五章）

关于等价关系 R_3，等价元素的代表可取：

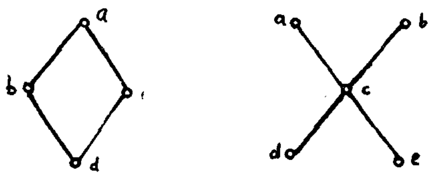
$$E_{st} = diag(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{s},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{t},0,\cdots,0)$$，s，t为非负整数，且 $s+t\leqslant n$。

关于等价关系 R_4，等价元素类的代表元可取：

$E_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_j\in\mathbf{R}$，且满足 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$。

§5 有序集 Zorn 引理

1. 写出下面图形表示的偏序关系：



指出其极大元，极小元，最大元，最小元。