

大專升學必備
標準

高等代數學 上冊

陳明哲編著

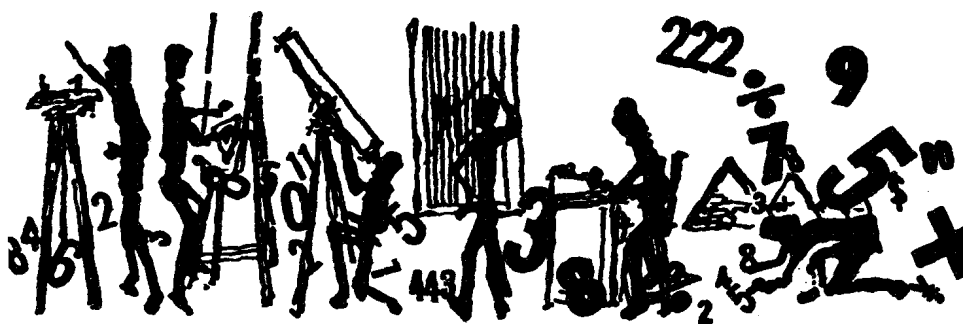


中央書局

標準

高等代數學 上冊

陳明哲編著



中央書局

編輯大意

- 一、本書係根據教育部最近頒佈中學課程標準編輯，而專供升學準備及課外補充之用。
- 二、本書分爲本論、附錄及補充問題，本論收錄現行教科書之重要題及各大學之入試題；附錄收錄以四十四年度中學代數科教科書共同刪減重點之教材，補充問題收集最近全國各大學之入學試題以及重要題，以使讀者明瞭其命題之中心與趨向。
- 三、高中學生雖曾學習代數學，然於代數之基本定理及定義，多未鞏固，馴致學生僅記公式及題解，而未能徹底了解，因此每遇較難之習題無法着手，本書特注意。故對於定義之解釋，力求詳盡，定理之證明務求嚴密，敘述簡明扼要，例題盡選代表性之題材，詳加解答，以養成學生正確之數學概念。
- 四、本書中演出之例題特多，俾使讀後可明瞭各種解題之方法，且例題及習題中多引用幾何、三角、理化之知識，求其融會貫通，藉以提高其學習興趣，培養其理解能力。又習題後附有答案，以便演算時作對照參考之用。
- 五、編本書時，所用參考書，記之於下：
 - 各書局出版之代數教科書。
 - 范氏大代數。霍氏大代數。
 - 代數學（著者范際平）。高等代數（著者彭商育）。
 - 高等代數學通論（著者山崎榮作）。
 - 高等代數學講義（著者田島一郎）。
 - 代數學問題演習（著者渡邊不二雄）。匯文、成功、遠東函授講義。
 - 大代數學講義（著者上野清）
- 六、本書雖經編輯者多次修改，惟以付梓匆促，難免掛漏，尙試教希海內先進，隨時賜教，俾臻完善。

本書之用法

爲了培養解題之能力，必徹底理解基本定理，即在本書各節所示之定義定理，而舉出之例題亦爲詳加研究之對象，故後讀者必須徹底研究。

但在研究例題時，千萬不可看其解答，必須先自解之，如雖經充分思考後，仍覺難解時，則可先看其解答之一部分再自解之，如尙覺難解者，始可觀其全解。爲徹底了解其解答，應重複默解之。

本書讀法一般步驟再詳述如下：

初讀時，例題中，如有回難者，附以省略號○。

如必要讀之例題，附以再讀號◎爲便。

習題在初讀時解之亦可，或再讀後解之亦可。

但，必須自力解之。雖在習題後附有解答，尙以不看爲要。

再讀之時，先讀附有再讀之記號者，如認爲不必再讀者，則附以×號，以消去之，如認爲必要三讀者，留之不作記號。次讀附有略號○者，其中認爲必要再讀之例題，填以小圈。在省略號內爲◎表示必再讀。如認爲不必再讀之時，附以×號消去之。仍感困難者留之。

解習題亦照前法讀之。

如此繼續反覆讀之。則難解之問題逐漸減少，而短時期中可讀完。

如有充分時間者，本書末之補充題再研究之，以期其徹底理解。

高三或畢業之讀者可按前法讀之爲便。

高二之讀者可作教科書之補充，尤以本書之定義及定理之證明比一般教科書爲詳細明瞭，例題豐富必可作讀者之好伴侶。

標準高等代數學

上 冊 目 次

第 一 章 綜合除法與剩餘定理

一、綜合除法	1
二、剩餘定理	5
三、利用剩餘定理分解因式	8

第 二 章 未定係數法

一、求 法	15
二、有關諸定理	15
三、用次數較低之多項式表次數較高之多項式	24

第 三 章 對稱式及交錯式

一、齊 次 式	29
二、對 稱 式	29
三、同 形 項	30
四、對稱式及交錯式之表示法	30
五、輪 換 式	33
六、完全對稱式與輪換對稱式之區別	33
七、一般之對稱式即非齊次對稱式與齊次對稱式	34
八、對稱式之定理	35
九、對稱式輪換式之因式分解法	37
十、交 錯 式	43
十一、交錯式之定理	43

十二、交錯式之分解因式法	44
十三、雜題	49

第四章 分解因式

一、因式	53
二、質因式	53
三、分解因式	53
四、直接應用公式法	54
五、集項法	56
六、二次三項式之分解法	61

第五章 最高公因式及最低公倍式

一、公因式及最高公因式	68
二、最高公因式之求法	68
三、二有理整式互質之充要條件	76
四、公倍式及最低公倍式	78
五、最低公倍式之求法	79
六、雜題	83

第六章 分式與部分分式

一、分式之定義	90
二、分式之基本性質	90
三、約分	91
四、通分	91
五、分式之加減法	94
六、分式乘除法	99
七、繁分式之化簡	102
八、求值問題	106

九、部分分式	110
十、有關部分分式之諸定理	110
十一、部分分式之類型	115
十二、分式方程式	123
十三、分式方程式之解法	123

第七章 根式與虛數

一、根式定義	133
二、不盡根式及不盡根數	133
三、根式之運算公式	134
四、根式之化簡	135
五、同類根式及同次根式	136
六、根式之加減	139
七、根式乘法	142
八、有理化因式	142
九、根式除法與根式之化簡	145
十、二次根式之平方根	150
十一、求值問題	154
十二、無理方程式之解法	158
十三、虛 數	165
十四、虛數之乘幕	166
十五、虛數之基本運算	167
十六、複數及共軛複數	167
十七、複數之算法	168
十八、複數之平方根	169

第八章 比、比例及變數

一、比及比例	174
二、比之性質	175

三、關於比例定理	175
四、變數法	126

第九章 不等式

一、不等式	192
二、基本運算定理	192
三、絕對不等式之證明	197
四、條件不等式之解法	208

第十章 二次方程式

一、一元二次方程式	227
二、一元二次方程式之解法	227
三、根之討論	230
四、根與係數之關係	235
五、根與係數之應用	236
六、二次式之極大與極小	253
七、利用二次方程式解一元高次方程式	268

第十一章 聯立方程式

一、一次聯立方程式	281
二、二元二次聯立方程式	285
三、多元聯立方程式	311
四、聯立無理方程式	323
五、聯立分式方程式	324
六、應用問題	325

第十二章 級數

一、等差級數	329
二、第 n 項	329

三、 n 項之和	329
四、性質	331
五、關於求項問題	331
六、等差中項	333
七、關於求和之問題	334
八、等比級數	343
九、第 n 項	343
十、 n 項之和	343
十一、等比中項	334
十二、關於求項問題	344
十三、關於求和之問題	347
十四、無窮項等比級數	354
十五、調和級數	358
十六、三級數 $A.P.$, $H.P.$, $G.P.$ 混合問題	361
十七、雜級數	369
十八、彈積	377
十九、三角級數之和	379

第十三章 指數與對數

一、指數律之擴張	389
二、負指數	389
三、分指數	387
四、對數	394
五、對數之性質	396
六、底數之變換	397
七、對數之種類	405
八、常用對數之性質	405
九、常用對數之首數及尾數	406
十、對數表之用法	409

第一章 綜合除法與剩餘定理

一、綜合除法 (Synthetic division)

凡能用分離係數演算之除法，其除式為一次式時，可用一種更簡便之方法演算，此一簡便之方法稱為綜合除法，(Synthetic division) 今舉例以闡明之。

【例1】以 $x-2$ 除 $2x^4-5x^2-7x+3$ 。

(解) 先用分離係數法演算如下：

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2+0-5-7+3 & 1 & -2 & & & & \\
 2-4 & & 2+4+3-1 & & & & \\
 \hline
 4-5 & & & & & & \\
 4-8 & & & & & & \\
 \hline
 3-7 & & & & & & \\
 3-6 & & & & & & \\
 \hline
 -1+3 & & & & & & \\
 -1+2 & & & & & & \\
 \hline
 1 & & & & & &
 \end{array}$$

於此所當注意者，被除式及諸餘式之第一項各與其減式之第一項相等，每行相減，其差為0，故各減式之第一項，均可略去不記。

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2+0-5-7+3 & 1 & -2 & & & & \\
 -4 & & 2+4+3-1 & & & & \\
 \hline
 4 & & & & & & \\
 -8 & & & & & & \\
 \hline
 3 & & & & & & \\
 -6 & & & & & & \\
 \hline
 -1 & & & & & & \\
 +2 & & & & & &
 \end{array}$$

縮短左式，且按下式排寫：

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 2+0-5-7+3 & 1 & -2 & & & & \\
 -4-8-6+2 & & 2+4+3-1 & & & & \\
 \hline
 2+4+3-1+1 & & & & & &
 \end{array}$$

又因除式第一項之係數始終為1，可省略去。而被除式第一項等於商式第一項，商式其他項又皆書出，故商式亦可省去，因此得，

$$\begin{array}{r}
 2+0-5-7+3 \quad | \quad -2 \\
 \underline{-4-8-6+2} \\
 2+4+3-1+1
 \end{array}$$

若再將 -2 改為 $+2$ ，則其減式中各項之符號悉行改變，即可施行加法，因得。

$$\begin{array}{r}
 2+0-5-7+3 \quad | \quad 2 \\
 \underline{+4+8+6-2} \\
 2+4+3-1+1
 \end{array}$$

上式第三列之最後一項之係數即為餘式。

$\therefore R=1$ 須與商式分開，其前面四項即為商式之係數。

$$\therefore Q=2x^3+4x^2+3x-1$$

其演算方法再詳述如下：

第一：將被除式依降冪式排列，略去其文字，僅記其係數，如有缺項。

則以 0 補充之。

第二：變除式第二項之符號，記於被除式之右旁是謂變法數。

第三：將被除式之第一項記於橫線之下，是為商中第一項之係數，以變法數乘之，得積記於被除式第二項之下相加，得商中第二項之係數。如此繼續進行，以至於盡。

第四：橫線下最後一項為剩餘，其餘各項，則為商中各項之係數。

【例 2】試用綜合除法以 $3x+2$ 除 $6x^4-5x^3+19x+19$ 。

$$(解) \quad 3x+2=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r}
 6-5+0+19+19 \quad | \quad \frac{2}{3} \\
 \underline{-4+6-4-10} \\
 3) 6-9+6+15+9 \\
 \underline{2-3+2+5}
 \end{array}$$

$$\therefore Q=2x^3-3x^2+2x+5 \quad R=9$$

【註】若除式爲 $ax+b$ 時，則因 $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)=a\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$ ，可先以 $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ 作綜合除法。

本例除式以 3 除，故商式亦必以 3 除之。

【例 3】試用綜合除法以 $x-a$ 除 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

$$\begin{array}{r} (解) \quad 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc \quad | \quad a \\ \quad \quad +a \quad \quad \quad -(ab+ca)+abc \\ \hline 1-(b+c) \quad \quad \quad +bc \quad \quad \quad +0 \end{array}$$

$$\therefore Q=x^2-(b+c)x+bc \quad R=0$$

【例 4】試用綜合除法以 $x+2$ 除 $\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{5}{3}x-1$ 。

（解）先將被除式化爲整式，因被除式分母之 L. C. M. 爲 6，故以 6 乘之，得

$$\begin{array}{r} 3x^3+18x^2+10x-6 \\ 3+18+10-6 \quad | \quad -2 \\ \hline 6-24+28 \\ 3+12-14+22 \end{array}$$

因被除式既以 6 乘之，故商式須以 6 除之。

$$\begin{array}{r} 6) \quad 3+12-14+22 \\ \quad \frac{1}{2}+2-\frac{7}{3}+\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\therefore Q=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{7}{3} \quad R=3\frac{2}{3}$$

習 題 一

試用綜合除法求下列各式之商及剩餘：

- (1) $(2x^3+3x^2-4x+1) \div (x+2)$
- (2) $(x^4-2x^2-5) \div (x-3)$
- (3) $(3x^3+16x^2-13x-6) \div (3x+1)$

(4) 設 $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 6x + 7$, 求 $f(1)$, $f(3)$, 及 $f(\frac{1}{2})$

(5) $(2x^4 - x^3y - 7x^2y^2 + 7xy^3 - 10y^4) \div (x - 2y)$

(6) $(x^6 + 4x^4 - 8x^2 - 12) \div (x^2 - 4)$

習題一解

(1) $2+3-4+1 \mid -2$

$$\frac{-4+2+4}{2-1-2+5}$$

$$Q = 2x^2 - x - 2$$

$$R = 5$$

(3) $3+16-13-6 \mid -\frac{1}{3}$

$$\frac{-1-5+6}{3)3+15-18}$$

$$1+5-6$$

$$Q = x^2 + 5x - 6$$

$$R = 0$$

(ii) $1+0-5+4-6+7 \mid 3$

$$\frac{+3+9+12+48+126}{1+3+4+16+42+133}$$

$$Q = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 16x + 42$$

$$R = 133$$

(5) $2-1-7+7-10 \mid 2$

$$\frac{4+6-2+10}{2+3-1+5+0}$$

$$Q = 2x^3 + 3x^2y - xy^2 + 5x^3$$

(2) $1+0-2+0-5 \mid 3$

$$\frac{3+9+21+63}{1+3+7+21+58}$$

$$Q = x^3 + 3x^2 + 7x + 21$$

$$R = 58$$

(4)(i) $1+0-5+4-6+7 \mid 1$

$$\frac{+1+1-4+0-6}{1+1-4+0-6+1}$$

$$Q = x^4 + x^3 - 4x^2 - 6$$

$$R = 1$$

(iii) $1+0-5+4-6+7 \mid \frac{1}{2}$

$$\frac{+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{19}{8}+\frac{13}{16}-\frac{83}{32}}{1+\frac{1}{2}-\frac{19}{4}+\frac{13}{8}-\frac{83}{16}+\frac{41}{32}}$$

$$Q = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{19}{4}x^2 + \frac{13}{8}x - \frac{83}{16}$$

$$R = \frac{141}{32}$$

(6) 因除式與被除式各項均為偶次, 設 $x^2 = y$, 則為 $(y^3 + 4y^2 - 8y - 12) \div (y - 4)$ 故此演算可以用綜合除法,

$$1+4-8-12 \mid 4$$

$$\frac{+4+32+96}{1+8+24+84}$$

$$Q = y^2 + 8y + 24 \text{ 即 } x^4 + 8x^2 + 24$$

$$R = 84$$

二、剩餘定理 (Remainder theorem)

剩餘定理為不用除法，而利用有理整式中係數間之關係，以求餘式之原則。

此定理關於分解因式，公因式，或解方程式時，其應用頗多，盼讀者以求徹底之理解。

定理一：設 $f(x)$ 為 x 之有理整式，如以 $x-a$ 除之，則其所得之剩餘等於以 a 代換後所得之值 $f(a)$ 。〔本定理稱為剩餘定理〕

(證) 設 $f(x)$ 為 $x-a$ 除得之商式為 $Q(x)$ ，餘式為 R 。

$$\text{則 } f(x) = Q(x)(x-a) + R \dots\dots\dots (1)$$

因 $x-a$ 為一次式， R 既為餘式，則其次數必低於一次，由是可知 R 為不含 x 之數，則為常數項。因 (1) 式為恆等式，故不論 x 與以任何值，其兩邊常相等。

設 $x=a$

$$\text{則 } f(a) = Q(a)(a-a) + R$$

$$\text{即 } f(a) = R$$

即以 $x-a$ 除 $f(x)$ ，其剩餘為 $R=f(a)$

〔例〕以 $x+2$ 除 $f(x)=x^4-2x^3+10x^2-5x+1$ ，求其餘式。

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad f(-2) &= (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + 10 \cdot (-2)^2 - 5(-2) + 1 \\ &= 16 + 16 + 40 + 10 + 1 \\ &= 83 \quad \therefore R=83 \end{aligned}$$

定理二：設 $f(x)$ 為 x 之有理整式，則 $x-a$ 能整除 $f(x)$ 之充要條件 $f(a)=0$ ，此定理有時稱為因式定理。

(證) (1) 充分性：設 $f(a)=0$ ，則由剩餘定理得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)Q(x) + f(a) \\ &= (x-a)Q(x) \end{aligned}$$

故 $x-a$ 能整除 $f(x)$ 。

(ii) 必要性: 若 $f(x) \equiv (x-a)Q(x)$

$$\text{則 } f(a) = (a-a)Q(a) = 0$$

〔例〕試證 x^3+2x^2-x-2 能以 $x-1$ 整除。

(證) $f(x) = x^3+2x^2-x-2$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3+2\cdot(1)^2-(1)-2 \\ &= 1+2-1-2=0 \end{aligned}$$

$\therefore f(1)=0$ 即 $x-1$ 能整除 $f(x)$

定理三: 如 $f(a)=0, f(b)=0$, 且 $a \neq b$, 則 $(x-a)(x-b)$ 能整除 $f(x)$ 。

(證) 因依假設 $f(a)=0$, 故 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除, 設其商式為 $\phi_1(x)$

$$\text{則 } f(x) = \phi_1(x)(x-a) \quad [\phi_1(x) \text{ 最低爲一次式}] \dots\dots\dots (1)$$

令 $x=b$ 代入

$$f(b) = \phi_1(b)(b-a)$$

又依假設 $f(b)=0, b \neq a$, 即 $b-a \neq 0$, 故 $\phi_1(b)=0$;

則 $x-b$ 可整除 $\phi_1(x)$

〔按定理二〕, 設其商式為 $\phi_2(x)$

$$\text{則 } \phi_1(x) = \phi_2(x)(x-b) \quad [\phi_2(x) \text{ 爲整式}] \dots\dots\dots (2)$$

將 (2) 代入 (1), 得

$$f(x) = \phi_2(x)(x-a)(x-b)$$

即 $(x-a)(x-b)$ 可整除 $f(x)$

再推廣之

$$\text{如 } f(a)=f(b)=f(c)=\dots\dots=0$$

且 $a \neq b \neq c \dots\dots$

則 $(x-a)(x-b)(x-c)\dots\dots$ 可整除 $f(x)$

〔例 1〕求 $f(x)=3x^2-5x+7$ 被 $(x-1)(x+1)$ 除得之餘式。

(解) $f(x)=3x^2-5x+7$ 爲二次式,

$(x-1)(x+1)$ 爲二次式, 故除得之商式爲常數, 餘式爲一次式,

設分別爲 $m, ax+b$,

$$\text{則 } 3x^2-5x+7 = m(x-1)(x+1) + (ax+b)$$

$$\text{設 } x=1 \text{ 時, 則得 } 5=a+b \dots\dots\dots (1)$$

設 $x = -1$ 時，則得 $15 = -a + b \dots\dots\dots (2)$

(1)+(2) 得 $20 = 2b$ ，故 $b = 10$ ， $a = -5$

故所求之餘式為 $-5x + 10$

【例2】 若以 $x-a$ 除 $f(x)$ 得剩餘為 A ， $x-b$ 除之得剩餘為 B ，求以 $(x-a)(x-b)$ 除之剩餘。(臺南工院)

【解】 因 $(x-a)(x-b)$ 為二次式，故設 $f(x)$ 為 $(x-a)(x-b)$ 除得之商式為 Q ，餘式為 $mx+n$ (m, n 為常數)

則 $f(x) = (x-a)(x-b)Q + mx + n \dots\dots\dots (1)$

對於 x 為任何值時均能成立，故將 $x=a$ 及 $x=b$ 代入，按題意

得 $f(a) = ma + n = A \dots\dots\dots (2)$

$f(b) = mb + n = B \dots\dots\dots (3)$

聯立 (2), (3) 解之得

$$m = \frac{A-B}{a-b}, n = \frac{aB-bA}{a-b} \quad [\because a-b \neq 0]$$

$$\therefore mx + n = \frac{A-B}{a-b}x + \frac{aB-bA}{a-b}$$

【例3】 若 $x^4 - 3ax^2 + bx + 4$ 同時為 $x+1$ 與 $x-2$ 除盡，試求 a, b 之值。

(臺灣大學)

【解】 設 $f(x) = x^4 - 3ax^2 + bx + 4$

$$\begin{aligned} \text{則 } f(-1) &= (-1)^4 - 3a(-1)^2 + b(-1) + 4 \\ &= +1 - 3a - b + 4 = -3a - b + 5 = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } f(2) &= (2)^4 - 3a(2)^2 + b(2) + 4 \\ &= 16 - 12a + 2b + 4 = -12a + 2b + 20 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

聯立 (1) 及 (2) 解之，得

$$a = \frac{5}{3}, \quad b = 0$$

【例4】 設 n 為正整數，試證 $nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}$ 可為 $(x-1)^2$ 整除。

【證】 $nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}$

$$= nx^{n+1} - nx^n - x^{n+1}$$

$$= nx^n(x-1) - (x^{n+1} - x^n)$$

$$= (x-1)[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)] \dots\dots\dots (1)$$

而 (1) 式右邊之第二因式，當 $x=1$ 時

$$\begin{aligned}
 & nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \\
 &= n - (1 + 1 + \cdots + 1) = n - n = 0
 \end{aligned}$$

故原式可為 $(x-1)^2$ 整除。

【例5】設 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 以 $x-\alpha$ 除之，得其餘式為 R ，以 $x-\beta$ 除之，得其餘式為 R' ，試證 $R-R'$ 可被 $\alpha-\beta$ 整除。（交通大學）

（證）設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$$R=f(\alpha)=\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d \cdots \cdots (1)$$

$$R'=f(\beta)=\beta^4+a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d \cdots \cdots (2)$$

$$(1)-(2)$$

$$\begin{aligned}
 R-R' &= (\alpha^4-\beta^4)+a(\alpha^3-\beta^3)+b(\alpha^2-\beta^2)+c(\alpha-\beta) \\
 &= (\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c]
 \end{aligned}$$

故 $R-R'$ 可被 $\alpha-\beta$ 整除。

【例6】如 $x^4+Px^2+qx+a^2$ 可被 x^2-1 整除，則，試證亦可被 x^2-a^2 整除。

（證）設原式為 $f(x)$ 。因 $x^2-1=(x+1)(x-1)$

故 $f(x)$ 可為 $x-1$ 及 $x+1$ 整除。

$$\therefore f(1)=1+P+q+a^2=0 \cdots \cdots (1)$$

$$f(-1)=1+P-q+a^2=0 \cdots \cdots (2)$$

聯立(1)及(2)就 P 與 q 解之，得 $P=-(a^2+1)$ ， $q=0$

$$\therefore f(x) \equiv x^4 - (a^2+1)x^2 + a^2 = (x^2-a^2)(x^2-1)$$

故 $f(x)$ 可為 x^2-a^2 整除。

三、利用剩餘定理分解因式

常藉下列二定理：

定理一： $x-\alpha$ (α 為整數) 為 x 之有理整式。

$f(x)=x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+\cdots+P_n$ ($P_1, P_2, \cdots, P_n$ 均為整數) 之因式，則 α 必為 P_n 之因數。

（證）如 $x-\alpha$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $x-\alpha$ 必能整除 $f(x)$

$$\text{故 } f(x)=a^n+P_1a^{n-1}+\cdots+P_n=0$$

$$a(a^{n-1}+P_1a^{n-2}+\cdots)=-P_n$$