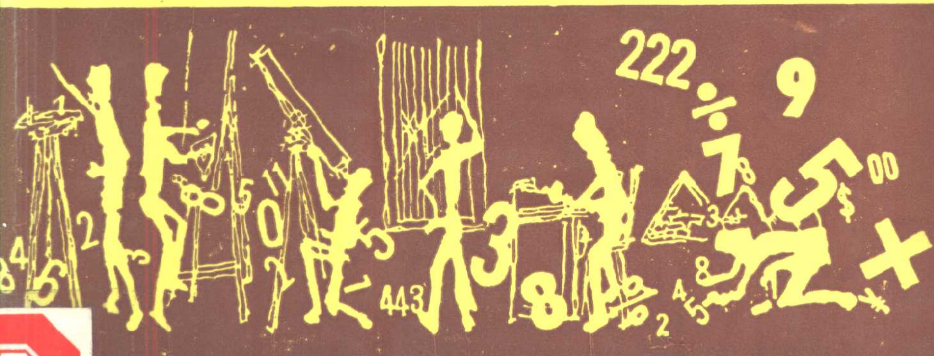
大專升學必備

標準
高等代數學 上册

陳明哲編著



中央書局

標準

高等代數學 上册

陳明哲編著

中央書局

編 輯 大 意

一、本書係根據教育部最近頒佈中學課程標準編輯，而專供升學準備及課外補充之用。

二、本書分爲本論、附錄及補充問題，本論收錄現行教科書之重要題及各大學之入試題；附錄收錄以四十四年度中學代數科教科書共同刪減重點之教材，補充問題收集最近全國各大學之入學試題以及重要題，以使讀者明瞭其命題之中心與趨向。

三、高中學生雖曾學習代數學，然於代數之基本定理及定義，多未鞏固，馴致學生僅記公式及題解，而未能徹底了解，因此每遇較難之習題無法着手，本書特注意。故對於定義之解釋，力求詳盡，定理之證明務求嚴密，敘述簡明扼要，例題盡選代表性之題材，詳加解答，以養成學生正確之數學概念。

四、本書中演出之例題特多，俾使讀後可明瞭各種解題之方法，且例題及習題中多引用幾何、三角、理化之知識，求其融會貫通，藉以提高其學習興趣，培養其理解能力。又習題後附有答案，以便演算時作對照參考之用。

五、編本書時，所用參考書，記之於下：

各書局出版之代數教科書。

范氏大代數。霍氏大代數。

代數學（著者范際平）。高等代數（著者彭商育）。

高等代數學通論（著者山崎榮作）。

高等代數學講議（著者田島一郎）。

代數學問題演習（著者渡邊不二雄）。滙文、成功、遠東函授講義。

大代數學講義（著者上野清）

六、本書雖經編輯者多次修改，惟以付梓匆促，難免掛漏，尚祈教希海內先進，隨時賜教，俾臻完善。

本書之用法

爲了培養解題之能力，必徹底理解基本定理，即在本書各節所示之定義定理，而舉出之例題亦爲詳加研究之對象，故後讀者必須徹底研究。

但在研究例題時，千萬不可看其解答，必須先自解之，如雖經充分思考後，仍覺難解時，則可先看其解答之一部分再自解之，如尙覺難解者，始可觀其全解。爲徹底了解其解答，應重複默解之。

本書讀法一般步驟再詳述如下：

初讀時，例題中，如有回難者，附以省略號○。

如必要讀之例題，附以再讀號◎爲便。

習題在初讀時解之亦可，或再讀後解之亦可。

但，必須自力解之。雖在習題後附有解答，尙以不看爲要。

再讀之時，先讀附有再讀之記號者，如認爲不必再讀者，則附以×號，以消去之，如認爲必要三讀者，留之不作記號。次讀附有略號○者，其中認爲必要再讀之例題，塡以小圈。在省略號內爲◎表示必再讀。如認爲不必再讀之時，附以×號消去之。仍感困難者留之。

解習題亦照前法讀之。

如此繼續反覆讀之。則難解之問題逐漸減少，而短時期中可讀完。

如有充分時間者，本書末之補充題再研究之，以期其徹底理解。

高三或畢業之讀者可按前法讀之爲便。

高二之讀者可作教科書之補充，尤以本書之定義及定理之證明比一般教科書爲詳細明瞭，例題豐富必可作讀者之好伴侶。

標準高等代數學

上冊目次

第四章　分解因式

第五章　最高公因式及最低公倍式

第六章　分式與部分分式

第七章　根式與虛數

第八章　比、比例及變數

第一章　綜合除法與剩餘定理

一、綜合除法 (Synthetic division)

凡能用分離係數演算之除法，其除式為一次式時，可用一種更簡便之方法演算，此一簡便之方法稱為綜合除法，(*Synthetic divsion*) 今舉例以闡明之。

〔例1〕以 $x-2$ 除 $2x^4-5x^2-7x+3$。

〔解〕先用分離係數法演算如下：

$$
\begin{array}{l|l}
2+0-5-7+3 & 1-2 \\ \cline{2-2}
\underline{2-4} & 2+4+3-1 \\
\quad 4-5 & \\
\quad \underline{4-8} & \\
\qquad 3-7 & \\
\qquad \underline{3-6} & \\
\qquad -1+3 & \\
\qquad \underline{-1+2} & \\
\qquad\qquad 1 &
\end{array}
$$

於此所當注意者，被除式及諸餘式之第一項各與其減式之第一項相等，每行相減，其差爲 0，故各減式之第一項，均可略去不記。

$$
\begin{array}{l|l}
2+0-5-7+3 & 1-2 \\ \cline{2-2}
\underline{\;\;-4} & 2+4+3-1 \\
\quad 4 & \\
\quad \underline{\;\;-8} & \\
\qquad 3 & \\
\qquad \underline{\;\;-6} & \\
\qquad -1 & \\
\qquad \underline{\quad +2} &
\end{array}
$$

縮短左式，且按下式排寫：

$$
\begin{array}{r|l}
2+0-5-7+3 & 1-2 \\ \cline{2-2}
-4-8-6+2 & 2+4+3-1 \\ \cline{1-1}
2+4+3-1+1 &
\end{array}
$$

又因除式第一項之係數始終為 1，可省略去。而被除式第一項等於商式第一項，商式其他項又皆書出，故商式亦可省去，因此得，

$$\begin{array}{l|l} 2+0-5-7+3 & \underline{-2} \\ \underline{\quad -4-8-6+2} & \\ 2+4+3-1+1 & \end{array}$$

若再將 -2 改爲 $+2$，則其減式中各項之符號悉行改變，即可施行加法，因得。

$$\begin{array}{l|l} 2+0-5-7+3 & \underline{2} \\ \underline{\quad +4+8+6-2} & \\ 2+4+3-1+1 & \end{array}$$

上式第三列之最後一項之係數即爲餘式。

$\therefore$　$R=1$　須與商式分開，其前面四項即爲商式之係數。

$\therefore$　$Q=2x^3+4x^2+3x-1$

其演算方法再詳述如下：

第一：將被除式依降冪式排列，略去其文字，僅記其係數，如有缺項。則以 0 補充之。

第二：變除式第二項之符號，記於被除式之右旁是謂變法數。

第三：將被除式之第一項記於橫線之下，是爲商中第一項之係數，以變法數乘之，得積記於被除式第二項之下相加，得商中第二項之係數。如此繼續進行，以至於盡。

第四：橫線下最後一項爲剩餘，其餘各項，則爲商中各項之係數。

〔例 2〕　試用綜合除法以 $3x+2$ 除 $6x^4-5x^3+19x+19$。

（解）　$3x+2=0$　　　$\therefore\ x=-\dfrac{2}{3}$

$$\begin{array}{l|l} 6-5+0+19+19 & \underline{\frac{2}{3}} \\ \underline{\quad -4+6-4-10} & \\ 3\overline{)6-9+6+15\ \ 9} & \\ \quad 2-3+2+5 & \end{array}$$

$\therefore\quad Q=2x^3-3x^2+2x+5 \qquad R=9$

〔註〕 若除式爲 $ax+b$ 時，則因 $ax+b=a(x+\frac{b}{a})=a[x-(-\frac{b}{a})]$，可先以 $x-(-\frac{b}{a})$ 作綜合除法。

本例除式以 3 除，故商式亦必以 3 除之。

〔例 3〕 試用綜合除法以 $x-a$ 除 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

（解）
$$\begin{array}{l|l} 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc & \underline{a} \\ \underline{\quad +a \qquad\quad -(ab \qquad +ca)+abc} & \\ 1-(b+c) \qquad\qquad +bc \qquad\quad +0 & \end{array}$$

$\therefore\quad Q=x^2-(b+c)x+bc \qquad R=0$

〔例 4〕 試用綜合除法以 $x+2$ 除 $\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{5}{3}x-1$。

（解） 先將被除式化爲整式，因被除式分母之 $L.C.M.$ 爲 6，故以 6 乘之，得

$3x^3+18x^2+10x-6$

$$\begin{array}{l|l} 3+18+10-6 & \underline{-2} \\ \underline{\quad -6-24+28} & \\ 3+12-14+22 & \end{array}$$

因被除式既以 6 乘之，故商式須以 6 除之。

$$\begin{array}{l} 6\underline{)\,3+12-14+22} \\ \quad \frac{1}{2}+2-\frac{7}{3}+3\frac{2}{3} \end{array}$$

$\therefore\quad Q=\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{7}{3} \qquad R=3\frac{2}{3}$

習　題　一

試用綜合除法求下列各式之商及剩餘：

（1） $(2x^3+3x^2-4x+1)\div(x+2)$

（2） $(x^4-2x^2-5)\div(x-3)$

（3） $(3x^3+16x^2-13x-6)\div(3x+1)$

(4) 設 $f(x)=x^5-5x^3+4x^2-6x+7$，求 $f(1)$，$f(3)$，及 $f(\frac{1}{2})$

(5) $(2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4)\div(x-2y)$

(6) $(x^6+4x^4-8x^2-12)\div(x^2-4)$

習　題　一　解

(1)

$$\begin{array}{l|l} 2+3-4+1 & -2 \\ \quad -4+2+4 & \\ \hline 2-1-2+5 & \end{array}$$

$Q=2x^2-x-2$

$R=5$

(2)

$$\begin{array}{l|l} 1+0-2+0-5 & 3 \\ \quad 3+9+21+63 & \\ \hline 1+3+7+21+58 & \end{array}$$

$Q=x^3+3x^2+7x+21$

$R=58$

(3)

$$\begin{array}{l|l} 3+16-13-6 & -\frac{1}{3} \\ \quad -1-5+6 & \\ \hline 3)\,3+15-18 & \\ \quad 1+5-6 & \end{array}$$

$Q=x^2+5x-6$

$R=0$

(4) (i)

$$\begin{array}{l|l} 1+0-5+4-6+7 & 1 \\ \quad +1+1-4+0-6 & \\ \hline 1+1-4+0-6+1 & \end{array}$$

$Q=x^4+x^3-4x^2-6$

$R=1$

(ii)

$$\begin{array}{l|l} 1+0-5+4-6+7 & 3 \\ \quad +3+9+12+48+126 & \\ \hline 1+3+4+16+42+133 & \end{array}$$

$Q=x^4+3x^3+4x^2+16x+42$

$R=133$

(iii)

$$\begin{array}{l|l} 1+0-5+4-6+7 & \frac{1}{2} \\ \quad +\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{19}{8}+\frac{13}{16}-\frac{83}{32} & \\ \hline 1+\frac{1}{2}-\frac{19}{4}+\frac{13}{8}-\frac{83}{16}+\frac{141}{32} & \end{array}$$

$Q=x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{19}{4}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{83}{16}$

$R=\frac{141}{32}$

(5)

$$\begin{array}{l|l} 2-1-7+7-10 & 2 \\ \quad 4+6-2+10 & \\ \hline 2+3-1+5+0 & \end{array}$$

$Q=2x^3+3x^2y-xy^2+5y^3$

(6) 因除式與被除式各項均爲偶次，設 $x^2=y$，則爲 $(y^3+4y^2-8y-12)\div(y-4)$ 故此演算可以用綜合除法。

$$\begin{array}{l|l} 1+4-8-12 & 4 \\ \quad +4+32+96 & \\ \hline 1+8+24+84 & \end{array}$$

$Q=y^2+8y+24$ 即 x^4+8x^2+24

$R=84$

二、剩餘定理 (Remainder theorem)

剩餘定理為不用除法，而利用有理整式中係數間之關係，以求餘式之原則。

此定理關於分解因式，公因式，或解方程式時，其應用頗多，盼讀者以求徹底之理解。

定理一： 設 $f(x)$ 為 x 之有理整式，如以 $x-a$ 除之，則其所得之剩餘等於以 a 代換後所得之值 $f(a)$。〔本定理稱為剩餘定理〕

(證) 設 $f(x)$ 爲 $x-a$ 除得之商式爲 $Q(x)$，餘式爲 R。

則 $f(x)=Q(x)(x-a)+R$ ……………………………………………(1)

因 $x-a$ 爲一次式，R 既爲餘式，則其次數必低於一次，由是可知 R 爲不含 x 之數，則爲常數項。因 (1) 式爲恒等式，故不論 x 與以任何值，其兩邊常相等。

設 $x=a$

則 $f(a)=Q(a)(a-a)+R$

即 $f(a)=R$

即以 $x-a$ 除 $f(x)$，其剩餘爲 $R=f(a)$

〔例〕以 $x+2$ 除 $f(x)=x^4-2x^3+10x^2-5x+1$，求其餘式。

(解) $f(-2)=(-2)^4-2\cdot(-2)^3+10\cdot(-2)^2-5(-2)+1$

$=16+16+40+10+1$

$=83 \qquad \therefore\ R=83$

定理二： 設 $f(x)$ 為 x 之有理整式，則 $x-a$ 能整除 $f(x)$ 之充要條件 $f(a)=0$，此定理有時稱為因式定理。

(證) (1) 充分性：設 $f(a)=0$，則由剩餘定理得

$$f(x)\equiv(x-a)Q(x)+f(a)$$
$$=(x-a)Q(x)$$

故 $x-a$ 能整除 $f(x)$。

(ii) 必要性: 若 $f(x)\equiv(x-a)Q(x)$

則 $f(a)=(a-a)Q(b)=0$

〔例〕試證 x^3+2x^2-x-2 能以 $x-1$ 整除。

(證) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$f(1)=1^3+2\cdot(1)^2-(1)-2$

$=1+2-1-2=0$

$\therefore f(1)=0$ 即 $x-1$ 能整除 $f(x)$

定理三: 如 $f(a)=0$, $f(b)=0$, 且 $a\neq b$, 則 $(x-a)(x-b)$ 能整除 $f(x)$。

(證) 因依假設 $f(a)=0$, 故 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除, 設其商式爲 $\phi_1(x)$

則 $f(x)=\phi_1(x)(x-a)$ 〔$\phi_1(x)$ 最低爲一次式〕……………(1)

令 $x=b$ 代入

$f(b)=\phi_1(b)(b-a)$

又依假設 $f(b)=0$, $b\neq a$, 即 $b-a\neq 0$, 故 $\phi_1(b)=0$;

則 $x-b$ 可整除 $\phi_1(x)$

〔按定理二〕, 設其商式爲 $\phi_2(x)$

則 $\phi_1(x)=\phi_2(x)(x-b)$ 〔$\phi_2(x)$ 爲整式〕……………(2)

將 (2) 代入 (1), 得

$f(x)=\phi_2(x)(x-a)(x-b)$

即 $(x-a)(x-b)$ 可整除 $f(x)$

再推廣之

如 $f(a)=f(b)=f(c)=\cdots\cdots=0$

且 $a\neq b\neq c\cdots\cdots$

則 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots$ 可整除 $f(x)$

〔例1〕求 $f(x)=3x^2-5x+7$ 被 $(x-1)(x+1)$ 除得之餘式。

(解) $f(x)=3x^2-5x+7$ 爲二次式,

$(x-1)(x+1)$ 爲二次式, 故除得之商式爲常數, 餘式爲一次式,

設分別爲 $m, ax+b$,

則 $3x^2-5x+7=m(x-1)(x+1)+(ax+b)$

設 $x=1$ 時, 則得 $5=a+b$ ……………(1)

設　$x=-1$ 時，則得 $15=-a+b$ ……………………………………(2)

(1)+(2)　得　$20=2b$，故 $b=10$，$a=-5$

故所求之餘式爲 $-5x+10$

〔例2〕 若以 $x-a$ 除 $f(x)$ 得剩餘爲 A，$x-b$ 除之得剩餘爲 B，求以 $(x-a)(x-b)$ 除之剩餘。(臺南工院)

〔解〕 因 $(x-a)(x-b)$ 爲二次式，故設 $f(x)$ 爲 $(x-a)(x-b)$ 除得之商式爲 Q，餘式爲 $mx+n$ (m，n 爲常數)

則 $f(x)=(x-a)(x-b)Q+mx+n$ ……………………………………(1)

對於 x 爲任何值時均能成立，故將 $x=a$ 及 $x=b$ 代入，按題意

得 $f(a)=ma+n=A$ ……………………………………(2)

$f(b)=mb+n=B$ ……………………………………(3)

聯立 (2)，(3) 解之得

$$m=\frac{A-B}{a-b},\ n=\frac{aB-bA}{a-b}\ [\because\ a-b\neq 0]$$

$$\therefore mx+n=\frac{A-B}{a-b}x+\frac{aB-bA}{a-b}$$

〔例3〕 若 x^4-3ax^2+bx+4 同時爲 $x+1$ 與 $x-2$ 除盡，試求 a，b 之值。

(臺灣大學)

〔解〕 設 $f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$

則 $f(-1)=(-1)^4-3a(-1)^2+b(-1)+4$

$=+1-3a-b+4=-3a-b+5=0$ ……………………………(1)

同理 $f(2)=(2)^4-3a(2)^2+b(2)+4$

$=16-12a+2b+4=-12a+2b+20=0$ ……………………(2)

聯立 (1) 及 (2) 解之，得

$$a=\frac{5}{3},\qquad b=0$$

〔例4〕 設 n 爲正整數，試證 $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ 可爲 $(x-1)^2$ 整除。

〔證〕 $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$

$=nx^{n+1}-nx^n-x^n+1$

$=nx^n(x-1)-(x^n-1)$

$=(x-1)[nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)]$ ……………………(1)

而 (1) 式右邊之第二因式，當 $x=1$ 時

$nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$

$=n-(1+1+\cdots\cdots+1\cdots\cdots+1)=n-n=0$

故原式可為 $(x-1)^2$ 整除。

〔例5〕設 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 以 $x-\alpha$ 除之，得其餘式為 R，以 $x-\beta$ 除之，得其餘式為 R'，試證 $R-R'$ 可被 $\alpha-\beta$ 整除。(交通大學)

(證) 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$$R=f(\alpha)=\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\cdots\cdots(1)$$

$$R'=f(\beta)=\beta^4+a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d\cdots\cdots(2)$$

(1)－(2)

$$R-R'=(\alpha^4-\beta^4)+a(\alpha^3-\beta^3)+b(\alpha^2-\beta^2)+c(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c]$$

故 $R-R'$ 可被 $\alpha-\beta$ 整除。

〔例6〕如 $x^4+Px^2+qx+a^2$ 可被 x^2-1 整除則，試證亦可被 x^2-a^2 整除。

(證) 設原式為 $f(x)$。因 $x^2-1=(x+1)(x-1)$

故 $f(x)$ 可為 $x-1$ 及 $x+1$ 整除。

$$\therefore\ f(1)=1+P+q+a^2=0\cdots\cdots(1)$$

$$f(-1)=1+P-q+a^2=0\cdots\cdots(2)$$

聯立(1)及(2)就 P 與 q 解之，得 $P=-(a^2+1)$，$q=0$

$$\therefore\ f(x)\equiv x^4-(a^2+1)x^2+a^2=(x^2-a^2)(x^2-1)$$

故 $f(x)$ 可為 x^2-a^2 整除。

三、利用剩餘定理分解因式

常藉下列二定理：

定理一：$x-\alpha$ (α 為整數) 為 x 之有理整式。

$f(x)=x^n+P_1x^{n-1}+P_2x^{n-2}+\cdots\cdots+P_n$ ($P_1, P_2,\cdots\cdots P_n$ 均為整數) 之因式，則 α 必為 P_n 之因數。

(證) 如 $x-\alpha$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $x-\alpha$ 必能整除 $f(x)$

故 $f(x)=\alpha^n+P_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+P_n=0$

$\alpha(\alpha^{n-1}+P_1\alpha^{n-2}+\cdots\cdots)=-P_n$