聚焦考研倾情大放送

赠书

凭《模拟考场15套数学三、四》现场领取

2007年考研数学

基础过关100道好题

（数学三、数学四适用）

聚骄公司专业策划

非卖品

第一部分　选择题

1. 设$f(x)$、$g(x)$ 连续，且当$x\to 0$时，$f(x)$与$g(x)$是同阶但不等价的无穷小，则当$x\to 0$时，$\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$ 是$\int_0^1 xg(xt)\,\mathrm{d}t$ 的

(A) 低价无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价无穷小　　【　】

2. 设$f(x)$, $g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且$g(x)<f(x)<m$(m为常数)，则曲线$y=g(x)$，$y=f(x)$，$x=a$及$x=b$所围平面图形绕直线$y=m$旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

(D) $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$　　【　】

3. 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则$f(x,y)$在点$(0,0)$处

(A) 极限存在但不连续.　　(B) 连续但偏导数不存在. ×

(C) 偏导数存在但不可微.　　(D) 可微.　　【　】

4. 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos(x+y)}=-1$，则

(A) 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的驻点.

(B) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，但不是极值点.

(C) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，且是极小值点.

(D) 点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，且是极大值点.　　【　】

*5. 设$a_n>0$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\lambda\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性与λ有关　　【A】

6. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=$

(A)3　　(B)7　　(C)8　　(D)9　　【C】

注:加“*”号的题，考数四的同学可以不用看.

7. 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α　　【　】

8. 函数 $y=x^3\cos3x$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ 上有

(A) 一个驻点,无极值点　　(B) 二个驻点,一个极值点

(C) 二个驻点,二个极值点　　(D) 三个驻点,二个极值点　　【　】

9. 设广义积分 $A=\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$　$B=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx$,则 A、B 满足的关系式为

(A) $A=B$　　(B) $A=2B$　　(C) $A=\ln2\cdot B$　　(D) $A=\frac{B}{2}$　　【　】

10. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{xy} & xy\neq0\\ x & xy=0\end{cases}$,则 $f'_x(0,1)$ 等于

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 不存在　　【　】

11. 方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的一个特解具有形式

(A) $(Ax+B)e^{2x}$　　(B) Axe^{2x}

(C) Ax^2e^{2x}　　(D) $x(Ax+B)e^{2x}$　　【　】

12. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分必要条件是:

(A) $f(a)=0$,且 $f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$,且 $f'(a)\neq0$

(C) $f(a)>0$,且 $f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$,且 $f'(a)<0$　　【　】

13. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$,则:

(A) $I_1<1<I_2$　　(B) $1<I_1<I_2$

(C) $I_2<1<I_1$　　(D) $I_1<I_2<1$　　【　】

14. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$,则 $\int_0^1 f(x)dx=$

(A) 0　　(B) 1

(C) $\frac{1}{2}e^{-1}$　　(D) $\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$　　【　】

15. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix}$,则平面上三条直线 $a_1x+a_2y+a_3=0,b_1x+b_2y+b_3=0,c_1x+c_2y+c_3=0$ 交于一点的充分必要条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$　　(D) α_1,α_2 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

【　】

16. 设 A 是 n 阶非零方阵且 $A^*=A^T$,则

(A) $|A|=1$ 或 $|A|=0$　　(B) $|A|=0$

(C) $|A|\neq0$　　(D) $|A|\neq1$　　【　】

17. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{44}&a_{41}\end{pmatrix},P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$,

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$

(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$　　【　】

18. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则向量组 $3\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4$，$-\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 - 5\alpha_4$，$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 5\alpha_4$，$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_4$，$5\alpha_1 + 4\alpha_2 - 7\alpha_3 + \alpha_4$ 的秩是

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4　　【　】

19. 当 $k \neq \frac{3}{5}$ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ kx_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 有解的情况是

(A) 无解　　(B) 不为零的唯一解

(C) 无穷多解　　(D) 唯一的零解　　【D】

20. 下列矩阵能相似于对角矩阵的是

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　【　】

21. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵，正确的法则是

(A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$　　(B) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

(C) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$　　(D) $(AB)^* = B^*A^*$　　【　】

22. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & a & -3 \end{bmatrix}$，$B$ 是 4×2 的非零矩阵，且 $AB = 0$，则

(A) $a = 1$ 时，B 的秩必为 2　　(B) $a = 1$ 时，B 的秩必为 1

(C) $a \neq 1$ 时，B 的秩必为 1　　(D) $a \neq 1$ 时，B 的秩必为 2　　【C】

23. 已知 A, B 是任意两个随机事件且 $A \subset B$，$P(B) > 0$，则下列选项必然成立的是

(A) A 和 B 互不相容.　　(B) A 和 B 互相对立.

(C) A 和 B 互不独立.　　(D) A 和 B 相互独立.　　【　】

24. 设随机变量 X 服从指数分布，$Y = \min\{X, 2\}$，则 Y 的分布函数

(A) 是连续函数　　(B) 至少有两个间断点

(C) 是阶梯函数　　(D) 恰有一个间断点　　【　】

25. 将一枚硬币独立掷两次，引进事件 $A_1 = \{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2 = \{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3 = \{$正，反面各出现一次$\}$，$A_4 = \{$正面出现两次$\}$，则事件关系为

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立　　(B) A_1, A_2, A_4 相互独立

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立　　(D) A_1, A_3, A_4 两两独立　　【B】

26. 连续函数 $G(x)$ 是分布函数，$G(0) = 0$，下列可作为分布函数的是

(A) $F(x) = \begin{cases} 1 - G(\frac{1}{x}) & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$　　(B) $F(x) = \begin{cases} 1 + G(\frac{1}{x}) & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} G(x) - G(\frac{1}{x}) & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$　　(D) $F(x) = \begin{cases} G(x) + G(\frac{1}{x}) & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$　　【C】

27. 以下四个二元函数,哪个不能作为二维随机变量(X,Y)的分布函数

(A)$F_1(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & 0<x<+\infty,0<y<+\infty \\ 0 & 其他\end{cases}$

(B)$F_2(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & 其他\end{cases}$

(C)$F_3(x,y)=\begin{cases}1 & x+2y\geqslant 1 \\ 0 & x+2y\leqslant 1\end{cases}$

(D)$F_4(x,y)=1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}$ 【 】

28. 如果二维随机向量(X,Y)的协方差矩阵的行列式$\begin{vmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}\end{vmatrix}=0$,则

(A)$|\rho_{XY}|=1$　　(B)$\rho_{XY}=0$

(C)$|\rho_{XY}|=\frac{1}{3}$　　(D)$|\rho_{XY}|=\frac{1}{2}$ 【 A 】

29. 设随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$,其分布函数为$F(x)$,则对任意实数x,有

(A)$F(x)+F(-x)=1.$　　(B)$F(1+x)+F(1-x)=1.$

(C)$F(x+1)+F(x-1)=1.$　　(D)$F(1-x)+F(x-1)=1.$ 【 】

30. 已知随机变量X服从标准正态分布,$Y=2X^2+X+3$,则X与Y

(A) 不相关且相互独立.　　(B) 不相关且相互不独立.

(C) 相关且相互独立.　　(D) 相关且相互不独立. 【 D 】

第二部分　填空题

1. 已知当$x\to 0$时,$e^x-(ax^2+bx+1)$是x^2的高阶无穷小,则$a=$ 1 ,$b=$ 1 .

2. 函数$f(x)=(x^2+x-2)|x^3-x|\sin|x|$的不可导点是 -1 .

3. 设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=$ $\frac{\ln a}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=$ $\frac{1}{2}$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}x^a\arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$,其导函数在$x=0$处连续,则$a$的取值范围是______.

6. 计算不定积分$\int\frac{x^2e^{2x}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=$______.

7. 求$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=$______.

8. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$______.

9. 设$f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$,则$f(x)=$______.

10. 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且$f[\varphi(x)]=\ln x$,则$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=$______.

11. 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则$\frac{dy}{dx}=$ ______.

12. 设由 $F(x,y,z)=0$,确定二元函数 $z=f(x,y)$,且$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=-1$,$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=2$,$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=1$,则$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=$ ______.

13. 设$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$,则 $df\Big|_{(1,1,1)}=$ ______.

14. 交换二重积分的积分次序:$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy=$ ______.

15. 已知 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$,试求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$ ______.

16. 当 $a=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时,$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}=$ ______.

17. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,$B=A^2-3A+2E$,则 $B^{-1}=$ ______.

18. 设 A,B 均为 3 阶矩阵,E 是 3 阶单位矩阵,已知 $AB=2A+3B$,$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$,则$(B-2E)^{-1}=$ ______.

19. 设 A 是三阶可逆矩阵,A^{-1} 是 A 的逆矩阵,E 是三阶单位矩阵,若 λ 是 A 的特征值,k 为非零实数,那么矩阵$(kA^{-1}+E)^2$ 的特征值是______.

20. 已知 ξ_1,ξ_2 是方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1 \\ -x_1+3x_2-x_3=2 \\ x_1+2x_2+tx_3=3 \end{cases}$的两个不同解,则 $t=$ ______.

21. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -\xi & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,其中 ξ 是服从$(0,6)$上均匀分布的随机变量,则 A 的特征值全为实数的概率______.

22. 有二次型 $f=X^TAX$,其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似,则 $a=$ ______,$b=$ ______.

23. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax^2x_2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是1,则 $a=$ ______.

24. 设10件产品中有4件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格,则另一件也是不合格品的概率为______.

25. 设有 n 个房间,分给 n 个人,每个人都以$\frac{1}{n}$的概率进入每一房间,而且每间房里的人数没

有限制,则不出现空房的概率______.

26. 设随机变量 X 服从 $B(2,p)$,Y 服从 $B(3,p)$ 的二项分布,若 $P(X \geqslant 1) = 5/9$,则 $P(Y \geqslant 1) =$ ______.

27. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数,则 $P\{Y = 2\} =$ ______.

28. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{8}, & x = -1 \\ ax + b & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \end{cases}$

且 $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$,则 $a =$ ______,$b =$ ______.

29. 设随机变量 X 和 Y 独立同正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$,则 $E|X - Y| =$ ______.

30. 已知 $X \sim N(\mu,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(2\mu,\sigma_2^2)$,$X$ 与 Y 相互独立,如果 $P\{X - Y \geqslant 1\} = \frac{1}{2}$,则 $\mu =$ ______.

31. 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为相互独立的随机变量序列,且 $X_i(i = 1,2,\cdots)$,服从参数为 λ 的泊松分布,则

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant x\right\} =$ ______.

*32. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本,其均值和方差分别为 $\bar{X}$ 与 S^2,则当 σ^2 已知时,统计量 $Y_n = \frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 的期望 $EY_n =$ ______,且 Y_n 服从参数为______的______分布.

第三部分　计算与证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内可导,且 $f(a) \neq 0$,求极限

$\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}\right]$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2}\right)$.

3. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + f(1 + \frac{1}{n})\right]^n$.

4. 计算不定积分:$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x - \cos x}$.

5. 设 $f(x)$ 为非负连续函数,当 $x \geqslant 0$ 时,有 $\int_0^x f(x)f(x-t)\,\mathrm{d}t = e^{2x} - 1$,求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数,且 $f(a) = f(b) = 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x.$$

7. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数,且$f(a)=0$,证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

8. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,且$f(x)<1$. 证明:$2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

9. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上有三阶导数,且$f(0)=f(1)=0$,设$F(x)=x^3f(x)$,试证在$(0,1)$内存在一个ξ,使$f'''(\xi)=0$.

10. 求证:$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

11. 求方程$e^{y^2}\mathrm{d}x-2xye^{y^2}\mathrm{d}y-4y\mathrm{d}y=0$的通解.

12. 设$u=f(x,y,xyz)$,函数$z=z(x,y)$由方程$\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)\,\mathrm{d}t=e^{xyz}$确定,其中$f$可微,$g$连续,求$x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

13. 求积分$I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

其中区域D为$y=x^3, y=1, x=-1$所围成的平面区域,f连续.

14. 设生产某种产品必须投入两种要素,x_1和x_2分别为两要素的投入量,Q为产出量;若生产函数为$Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中$\alpha,\beta$为正常数,且$\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为$p_1$和$p_2$,试问:当产出量为12时,两要素各投入多少可以使得投入总费用最小.

15. 由于折旧等因素,某机器转售价格$R(t)$是时间t(周)的减函数$R(t)=\dfrac{3A}{4}\cdot e^{-\frac{1}{96}}$,其中$A$是机器的最初价格. 在任何时间$t$,机器开动就能产生$P=\dfrac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$的利润. 问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大?

16. 已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导,$f(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,且满足$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$,求$f(x)$.

17. 证明:方程$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$,当$n$为奇数时,只有一个实根,当$n$为偶数时,没有实根.

18. 已知抛物线$y=px^2+qx$(其中$p<0,q>0$)在第一象限内与直线$x+y=5$相切,且抛物线与x轴所围成的平面图形的面积为S.

(1) 问p和q为何值时,S达到最大值?

(2) 求出此最大值.

*19. 求与直线$y=0,z=a$和直线$\begin{cases}x=0\\z=-a\end{cases}$均相切的球面中心的轨迹.

20. 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

*21. 将函数 $f(x) = \arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

22. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数,试求 a,b 的值.

23. 设 $f(x),g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续增函数 $(a,b>0)$,证明

$$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

24. 求摆线 $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ 一拱与直线 $y = a$ 围成的图形绕直线 $y = a$ 旋转而成的旋转体体积 $(a>0)$.

25. 设函数在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$,又 $f'(a) = f'(b) = 0$,试证明:在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 满足.

$$|f''(\xi)| \geqslant 4\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}$$

26. 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix}$,证明:方程 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根.

27. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,求 A^{-1}.

28. 设 A 为 4×3 矩阵,B 为 3×3 矩阵,且 $AB = 0$,其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$,证明:$B$ 的列向量组线性相关.

29. 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$,试求矩阵 A 的秩.

30. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $Ax = b$ 的一个解,试求 $Ax = b$ 的通解.

31. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$,行列式 $|A| = -1$,又 A^* 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha = (-1,-1,1)^T$,求 a,b,c 及 λ_0 的值.

32. 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 =$

$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，求$a,b$的值.

33. 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geqslant 2)$$

试问：a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

34. 设$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & 2k & 3k & & k^2 \end{pmatrix}$，求可逆阵$C$，使得$C^{-1}BC = \Lambda$.

35. 解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

36. 判定矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$是否可对角化，若能则求出可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP = \Lambda$.

37. 甲、乙两人进行射击比赛，每回射击胜者得1分. 每回射击中甲胜的概率为α，乙胜的概率为β，$\alpha + \beta = 1$，比赛进行到有一人比对方多2分为止，多2分者最终获胜. 求甲最终获胜的概率.

38. 设随机变量Y_1,Y_2,Y_3相互独立，且均服从参数为p的0－1分布. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & Y_1 + Y_2 + Y_3 = k, \\ -1, & Y_1 + Y_2 + Y_3 \neq k. \end{cases} \quad k = 1,2.$$

1）求(X_1,X_2)的联合分布律；

2）问p为何值时，$E(X_1,X_2)$取最小值？

39. 设X与Y相互独立，它们都服从几何分布

$$P\{X = i\} = q^{i-1}p, i = 1,2,\cdots$$
$$P\{Y = j\} = q^{j-1}p, j = 1,2,\cdots$$

求$Z = \max(X,Y)$的分布律.

40. 设随机变量X的概率密度为$f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$-\infty < x < +\infty$. 求$E[\min(|X|,1)]$

41. 已知X的密度函数为$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，$Y = X^2 + 1$

(1) 求Y的分布函数$F_Y(y)$和密度函数$f_Y(y)$.

(2) 求$P\left\{\dfrac{5}{4} < Y \leqslant \dfrac{7}{4}\right\}$.

42. 随机变量(X,Y)的分布密度为$\varphi(x,y)=\begin{cases}A(1-\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & x^2+y^2>1\end{cases}$

求:(1) 常数A,

(2)(X,Y)落在$x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$内的概率.

43. 设(X,Y)的概率密度为:$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2(1-x)\\ 0, & 其他\end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度.

44. 已知随机变量X,Y相互独立,且都服从正态分布$N\left(0,\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$,则求随机变量$|X-Y|$的数学期望.

※ 详细解答

第一部分　选择题

1. 应选（**D**）

【详解】 令 $x-t=u$，$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

令 $xt=u$，$\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t=\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，

所以，当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t$ 是同阶但不等价的无穷小，故选(D).

【评注】 讨论无穷小的阶最基本的方法是按无穷小阶的定义，但若能熟练应用的几个常见等价无穷小，会使做题的过程大为简便，特别如果只是比较几个无穷小的阶，也可以利用同样的方法讨论.

2. 应选（**B**）

【详解】 $V=\int_a^b\pi[m-g(x)]^2\mathrm{d}x-\int_a^b\pi[m-f(x)]^2\mathrm{d}x$

$=\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$. 所以(B)为正确选项.

3. 应选（**D**）

【分析】 已知抽象函数 $f(x,y)$ 的有关极限存在，考查其极限、连续、偏导数及可微性，一般利用定义来分析.

【详解】 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$，又 $f(0,0)=0$，所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处极限存在且连续.

又由　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$ 得

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,0)}{x^2}=1$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(0,y)}{y^2}=1$，

所以：$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}\cdot x=0$

同理 $f'_y(0,0)=0$. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在.

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$　$(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=0$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. 因此选(D).

【评注】 一般地，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A\Rightarrow$

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y=y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=A,$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y=y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=A,$$

但反之不然. 这里$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 的某邻域内有定义.

4. 应选（**D**）

【**详解**】 因为已知极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\frac{1}{2}(x+y)^2}=-1$,

得 $$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{f(x,0)}{\frac{1}{2}x^2}=-1,\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to0}}\frac{f(0,y)}{\frac{1}{2}y^2}=-1.$$

即 $$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}=-\frac{1}{2},\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)}{y^2}=-\frac{1}{2}.$$

另外，$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{1-\cos(x+y)}[1-\cos(x+y)]=0.$$

于是，$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}\cdot x=0,$$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$

$$=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)}{y^2}\cdot y=0.$$

即$(0,0)$ 是$f(x,y)$ 的驻点.

又由极限与无穷的关系，得 $\dfrac{f(x,y)}{\frac{1}{2}(x+y)^2}=-1+\alpha\quad(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0)$

即 $f(x,y)=-\dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{2}\alpha\cdot(x+y)^2$,

因此，在点$(0,0)$ 的某邻域内，$f(x,y)<0=f(0,0)$.

即点$(0,0)$ 是$f(x,y)$ 的极大值点，故选(D).

【评注】 (1) 本题也可利用极限的符号性判断极值情况. 由极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\frac{1}{2}(x+y)^2}=-1$,

存在点$(0,0)$ 的一个邻域，使在该邻域内有$\dfrac{f(x,y)}{\frac{1}{2}(x+y)^2}<0$,

即$f(x,y)<0=f(0,0)$.

(2) 对于多元极限，有与一元极限类似的保号性及极限与无穷小的关系.

(3) 如将本题中的极限改为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=A,(A\neq0)$，则点$(0,0)$ 不是$f(x,y)$ 的驻点($f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处的偏导数不存在)，但是$f(x,y)$ 的极值点，如$A>0$，是极小值点，如$A<0$是极大值点，读者可自己验证.

*5. 应选（A）

【详解】 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，且 $\left|(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}\right| \sim \lambda a_{2n}$，

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛，应选(A).

6. 应选（C）

【详解】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$，

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + \cdots$，

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 5 - 2 = 3$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 + 3 = 8$. 应选(C).

7. 应选（B）.

【详解】 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \cos u \mathrm{d}\sqrt{u} = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}\sin u}{\sqrt{u}} \sim \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}\Big|_0^{x^2} = x$

$\beta = \int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t \sim \int_0^{x^2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2} = \frac{2}{3}x^3$

$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t \sim \int_0^{\sqrt{x}} t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}x^2$

比较 x 的指数可得升阶排序为 α,γ,β，选(B).

8. 应选（D）.

【详解】 $y = x^3\cos 3x$　　令 $y' = 3x^2\cos 3x - 3x^3\sin 3x = 0$

显然 $x = 0$ 时，$y' = 0$

$\Rightarrow$　　$x^2\cos 3x - x^3\sin 3x = 0$

即　　$x^2(\cos 3x - x\sin 3x) = 0$

令 $G(x) = \cos 3x - x\sin 3x$

$G'(x) = -3\sin 3x - \sin 3x - 3x\cos 3x = -4\sin 3x - 3x\cos 3x$

$G'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0$

$G'(0) = 0$

$G'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = -4 < 0$

$\therefore$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 上 $G'(x) > 0$，$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上 $G'(x) < 0$

可知 y 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 内有三个驻点，在 $x = 0$ 两侧 y' 同号，所以不是极值点，且在 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 内 y 的驻点两侧 y' 变号，在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 内 y 的驻点两侧 y' 变号，所以有二个极值点.

9. 应选（B）.

【详解】 考虑 $A - B = \int_0^1\left(\frac{\ln x}{1-x} - \frac{\ln x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{2x\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$

令 $x = \sqrt{t}$，则 $A - B = \int_0^1\frac{2\sqrt{t}\cdot\ln\sqrt{t}}{1-t}\mathrm{d}\sqrt{t} = \int_0^1\frac{\ln\sqrt{t}}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{A}{2}$，

即 $A = 2B$　故选(B).

10. 应选（B）.

【详解】 $f(0,1)=0, f'_x(0,1)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ y=1\\ x=0}}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}=1.$

11. 应选（**D**）.

【详解】 由 $r^2-2r=0$，得 $r=0$ 或 2

$\therefore$ 齐次方程对应的特解为 $y^*=C_1+C_2e^{2x}\quad C_1,C_2\in R$

$\because r=2\quad\therefore$ 设 $y=x\cdot e^{2x}(B_1x+B_0)\quad\therefore$ 选(D).

【评注】 本题也可用代入法.

12. 应选（**B**）.

【详解】 若$f(a)\neq 0$，由复合函数求导法则有$[\,|f(x)|'\,]\Big|_{x=a}=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x)\Big|_{x=a}=\dfrac{f(a)}{|f(a)|}f'(a)$，因此不选(C) 和(D).（当$f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且$f(a)\neq 0$时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导）.

当$f(a)=0$时

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

上两式分别是$|f(x)|$ 在 $x=a$ 点的右、左导数，因此，当$f(a)=0$时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充要条件是上两式不相等，即$f'(a)\neq 0$时，于是选(B).

【评注】 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $(|x|)'=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}=\dfrac{x}{|x|}$，所以，当$f(x)\neq 0$且$f(x)$ 可导，由复合函数的导数法则，有$(|f(x)|)'=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x)$.

13. 应选（**A**）.

【详解】 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$\sin x$ 是单调增加，$\cos x$ 是单调减小，又因 $\sin x\leqslant x$，

所以，当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\sin x<\sin x\quad \cos\sin x>\cos x$，因此

$I_1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$

$I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

于是有 $I_1<1<I_2$.

14. 应选（**D**）.

【详解】 由分部积分法

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\int_1^x e^{-t^2}dt\right]dx=\left[x\int_1^x e^{-t^2}dt\right]\Big|_0^1-\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2)=\dfrac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(e^{-1}-1).$

因此选(D).

【评注】 注意，$\int_1^1 e^{-t^2}dt=0$.

15. 应选（**D**）

【详解】 三条直线交于一点的充要条件是方程组

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3 = 0 \end{cases}$$

有唯一解，即 $r(\alpha_1,\alpha_2) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 2$，可见(D) 为正确选项.

16. 应选（**C**）

【**详解**】 假设 $|A| = 0$，则 $AA^* = |A|E = AA^T$

$$\therefore AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}^2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore |A| \neq 0.$

17. 应选（**C**）

【**详解**】 $\because B = AP_2P_1 \quad \therefore B^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}.$

18. 应选（**C**）

【**详解**】 $r(3\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 + 7\alpha_4, -\alpha - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 - 5\alpha_4, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 5\alpha_4, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_4, 5\alpha_1 + 4\alpha_2 - 7\alpha_3 + \alpha_4) = r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\because r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 4$

$$\therefore r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5) = r\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

19. 应选（**D**）

【**详解**】 $\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-2k & -1 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5k, k \neq \dfrac{3}{5}, 3 - 5k \neq 0$，只有零解

20. 应选（**B**）

【**详解**】 选项 B 的特征值为 1,2,3，有三个不同的特征值，一定相似于对角矩阵. 选项 A,C,D 的特征值均为 1,1,2；1 为二重根，而 $r(E - A) = r(E - C) = r(E - D) = 2$，从而 1 仅有一个线性无关的特征向量与其相对应，从而选项 A、C、D 不能对角化.

21. 应选（**D**）

【**详解**】 矩阵的乘法没有交换律，A、B 可逆不能保证 $AB = BA$，例如

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，有 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 而 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

可知(A)、(C) 均不正确.

A、B 可逆时，$A + B$ 不一定可逆，即使 $A + B$ 可逆，其逆一般也不等于 $A^{-1} + B^{-1}$. 例如

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，有 $(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

而 $A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$，所以(B) 不正确.

因为 A 可逆时，$A^* = |A|A^{-1}$，故

$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*$ 即(D)正确.

【评注】 矩阵乘法没有交换律,但$(A+E)^n$可用乘法公式展开.

22. 应选 (**C**)

【详解】 当$a=1$时,易见秩$r(A)=1$.当$a\neq 1$时,由于

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 4(a-1)^2 \neq 0$$

知$r(A)=3$.

由于$AB=0$,A是3×4矩阵,有$r(A)+r(B)\leqslant 4$.

那么当$a=1$时,$r(A)=1$,$1\leqslant r(B)\leqslant 3$

B是4×2矩阵,所以B的秩可能为1也可能为2,因此(A)、(B)均不正确.

当$a\neq 1$时,$r(A)=3$,所以必有$r(B)=1$,(D)不正确.

【评注】 当$a=1$时,你能否写出几个4×3的矩阵B,让其秩为1,为2,为3?

23. 应选 (**B**)

【详解】 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A)$,应选(B).

24. 应选 (**D**)

【详解】 $F_Y(y) = P(Y\leqslant y)$

$= P(\min\{X,2\}\leqslant y)$

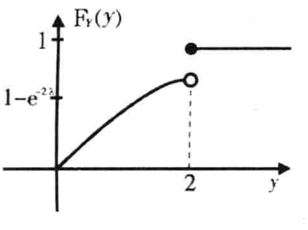
$= 1-P(\min\{X,2\}>y)$

$= 1-P(X>y,2>y)$

1) 当$y\geqslant 2$时,$F_Y(y)=1$,

2) 当$y<2$时,$F_Y(y)=1-P(X>y)=P(X\leqslant y)$

$$= \begin{cases} 1-e^{-\lambda y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$



即 $$F_Y(y) = \begin{cases} 1, & y\geqslant 2, \\ 1-e^{-\lambda y}, & 0<y<2, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$

故选(D)

25. 应选 (**C**)

【详解】 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$,$P(A_3)=\dfrac{1}{2}$,$P(A_4)=\dfrac{1}{4}$

因为$A_1A_2A_3=\varnothing$,所以$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,故(A)错

而 $P(A_1A_2A_4)=\dfrac{1}{4}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_4)=\dfrac{1}{16}$,故(B)错

同理 $P(A_3A_4)=0\neq P(A_3)P(A_4)=\dfrac{1}{8}$,故(D)错

而:$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\dfrac{1}{4}$,$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)=\dfrac{1}{4}$

$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)=\dfrac{1}{4}$,所以(C)正确.

26. 应选 (**C**)

【详解】 根据分布函数的连续性可知,若$F(x)$可以作为分布函数则其必须满足在定义域上连续,而选项中的函数均为分段函数,则只要验证其在分界点处的连续性即可