

谈笔算学

學算筆談

學算筆談卷九

金匱華蘅芳學

論代數中助變之數

前卷所論各種變化之法乃淺代數中尋常所用也惟至代數最深之處則算式極繁而但用前卷各法尙覺不易變化故必更立一種巧法以助其變化之事此助變之數所由名也

助變之數其立法之理卽從代數推廣而得並無甚深之意也惟因代數中已知未知之數既可代以各元則各元所成之式亦可更用他元或他式以代其式中之任幾項或任幾數而變其形則不易變化之式可以易於變化而不易明之理不易得之數不致束手無策矣

助變之數尋常之淺代數中不多見惟于代數最深之處則必用之而微分積分之中尤以此法爲最要之事學者不明此法則于微積之法亦難通曉故必于此先論之

助變之數亦可名之曰借代之法因其所用之式非本題應有之數而從題外借來也其所以必借之故因本題之式極難變化故借他元或他式他數以代其式中之若干項而變其形是于無可如何之時勉強挪移以濟其窮也惟旣名之曰借則終無不還之理故至變化旣迄必仍以原代之式還之則與不借而徑從本式求得者無異茲特于算學書中略引各種借代之式以明助變之例

一題有

$$\frac{\text{天} \text{二}}{\text{辰} \text{一} \text{一}}$$

式求其天之同數 見代數難題解法卷二第二十六頁

$$\frac{\text{辰} \text{一} \text{一}}{\text{辰} \text{一} \text{一}}$$

借地以代其辰則其式中之天可以辰代之而題式變形為

$$\frac{\text{地} \text{一}}{\text{一}}$$

$$\frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}}$$

用常法化之為

$$\frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}}$$

$$\frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}} = \frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}} \quad \frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}} = \frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}} \quad \frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}} = \frac{\text{地} \text{一}}{\text{地} \text{一}}$$

而二此式中之地以原代之數辰代

還之爲

二(甲一)
四(甲一)

則可得

$$\text{天} = \sqrt{-14} \quad (\text{甲丁})$$

辰下
天下一

四
二
 $\sqrt{-1}$

天_上天_下

二題有

式求其天之同數

見難題卷二
第二十七頁

$$\sqrt{-1} \text{甲} \left(\frac{-1 \text{天}}{-1 \text{天}} \right) \frac{4}{1}$$

借地以代其
 $\left(\frac{\sqrt{1} \cdot \text{天}}{\sqrt{1} \cdot \text{天}}\right)$ 則其
 $\left(\frac{\sqrt{1} \cdot \text{天}}{\sqrt{1} \cdot \text{天}}\right)$ 可以地
 一代之而題式變形為

$$\sqrt{1} \cdot \text{地} \sqrt{1} \cdot \text{地} = \sqrt{1} \cdot \text{天}$$

用常法化去分母而移其項為

$$\sqrt{1} \cdot \text{地} \sqrt{1} \cdot \text{地} = \sqrt{1} \cdot \text{天}$$

開平方得

$$\sqrt{1} \cdot \text{地} \sqrt{1} \cdot \text{地} = \sqrt{1} \cdot \text{天}$$

則

$$\text{地} = \sqrt{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}}$$

而

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

即

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

所以得

$$\text{天} = \sqrt{1} \cdot \text{天}$$

三題有

$$\frac{\frac{\frac{1}{2} \text{天}}{\frac{1}{2} \text{天}}}{\frac{1}{2} \text{天}}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \text{天}}{\frac{1}{2} \text{天}} \right)$$

式求其天之同數
見難題二卷
第二十八頁

借地以代其 $\frac{1}{2}$ 則變形為

$$\left(\frac{1}{2} \text{地} \right) = \frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}}$$

而

$$\frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}} = \frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}} = \frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}} = \frac{1}{2} \frac{\text{地}}{\text{地}}$$

所以

$$\frac{1}{2} \text{地} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{天乙}}{\text{甲乙}} = \frac{二}{一}$$

$$\text{而} \quad \text{天} = \frac{三}{一} \quad (\text{甲乙})$$

四題有

$$\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \frac{二}{一} \quad \text{天} = \frac{三}{一}$$

式求天之同數
第一頁
難題十卷

令

$$\frac{\text{甲}}{\text{甲}} = \frac{一}{一}$$

則

$$\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \frac{二}{一} \quad \text{天} = \frac{三}{一}$$

所以變題式爲

$$\frac{\text{天}}{\text{天}} = \frac{三}{一} \quad \text{天} = \frac{三}{一}$$

而

$$\frac{\text{天}}{\text{天}} = \frac{三}{一} \quad \text{天} = \frac{三}{一}$$

用開方之法可得

$$\text{天} = \frac{一}{一}$$

一

五題

有

(天九天上八)(天九天上〇) = 二四

式求其天之同數

難題十卷
第二頁

天 = 三 { 天 天 天 天 }

② 還其所代之數則得

天 = 甲 理

又

天 = 三 { (甲 甲) 天 (甲 甲) }

借地代其

$\frac{天}{天} \frac{九}{九}$

則變形為

$(\frac{地}{地} \frac{一}{一}) (\frac{地}{地} \frac{一}{一}) = \frac{二}{二} \frac{四}{四}$

即

$\frac{地}{地} \frac{三}{三} \frac{八}{八} \frac{地}{地} = \frac{一}{一} \frac{三}{三} \frac{六}{六}$

從此可得地之二同數為

$\frac{地}{地} \frac{一}{一} \frac{四}{四}$
 $\frac{地}{地} = \frac{一}{一} \frac{二}{二} \frac{四}{四}$

即

$\frac{天}{天} \frac{九}{九} \frac{一}{一} \frac{四}{四}$
 $\frac{天}{天} \frac{九}{九} \frac{一}{一} \frac{四}{四}$

所以可得

$\frac{天}{天} \frac{一}{一} \frac{七}{七}$
 $\frac{天}{天} \frac{一}{一} \frac{二}{二}$

$\frac{天}{天} = \frac{二}{二} (\frac{九}{九} \frac{一}{一} \frac{五}{五})$

六題

有

$\frac{天}{天} \frac{三}{三} \frac{一}{一} = \frac{一}{一}$

式求其天之同數

難題十一
卷第一頁

以^二代其天則

而

所以

而

天

七題有

八^四天^三一^四—^三八^四天^四五^三天

式求其天之同數

難題十三卷
第二次考題

令^四地代天則式變爲

八地^一八^一——八地^四五地

從此得

地^一陽^四
地^一三^三
地^一三^三

而

天^一(^四九)

天^一三^四

天^一(^三三)

八題

有

天^上天^四 | 天^下天^三 = 二^三
天^上天^三 | 天^上天^四

式求其天之同數

難題十五卷
第八次考題

令地代其

$\frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{上}}{\text{下}} \frac{\text{二}}{\text{三}} \frac{\text{四}}{\text{三}}$

則式變為

地 $\frac{\text{地}}{\text{地}} \frac{\text{一}}{\text{二}} \frac{\text{三}}{\text{三}}$

從此得

地 $\frac{\text{一}}{\text{二}}$

①

地 $\frac{\text{一}}{\text{二}}$

②

從①式得

$(\frac{\text{五}}{\text{五}} \frac{\text{一}}{\text{四}})$

從③式得

天 $\frac{\text{二}}{\text{二}}$

又

天 $\frac{\text{三}}{\text{四}}$

天 $\frac{\text{二}}{\text{三}}$

$(\frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{一}}{\text{一}})$

九題

有

式其天之同數

難題十五卷
第八次考題

$\frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{三}}{\text{二}}$

令地代

$\frac{\text{天}}{\text{三}}$

則式變為

$\frac{\text{天}}{\text{二}} = \frac{\text{地}}{\text{三}}$

從此可得

$\frac{\text{地}}{\text{二}} = \frac{\text{天}}{\text{三}}$

則地為已知之數

可以甲代其

$\frac{\text{天}}{\text{三}}$

所以

$\frac{\text{天}}{\text{二}} = \frac{\text{甲}}{\text{三}}$

而

$\frac{\text{天}}{\text{二}} = \frac{\text{甲}}{\text{三}} \left\{ \frac{\text{天}}{\text{二}} = \frac{\text{甲}}{\text{三}} \right\}$

十題

有一

$\frac{\text{天}}{\text{三}}$

求其天之同數

代數術第
百十三款

以丙代其未則式變為

$\frac{\text{天}}{\text{天}} = \frac{\text{丙}}{\text{丙}}$ 而 $\frac{\text{天}}{\text{天}} = \frac{\text{丙}}{\text{丙}}$ 化之為 $(\frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{丙}}{\text{丙}}) = 1$ 則其兩箇乘數一為

天_丙一為

天_丙必有一數為○然後其乘得之積能等于○如令

天_丙 = ○

則可得天之一箇同數為

天_丙 = 丙

①如令

天_丙 = 丙 = ○

則

天_丙 = 丙

配成正方為

天_丙 = 丙 = 丙

兩邊各開平方則得

$$\begin{aligned} \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{而} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{即} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{即} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{即} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \end{aligned}$$

所以又得天之兩箇同數爲二

$$\begin{aligned} \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \\ \text{天} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} \end{aligned}$$

十一題

有

$$\text{天} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\text{丙}}}}{\frac{2}{\text{丙}}} = 0$$

式求其天之同數

代數術第一百十四款