欧发论文选集

——祝贺欧发先生八十华诞

欧发论文选集

祝贺欧发先生八十华诞

前　言

1951 年开始作为导师的助教在小班上习题课，次年登上大班的讲台，到 2001 年发表最后三篇文章，从事物理工作整整 50 年。这 50 年主要从事基础物理的教学工作：前 30 年在哈尔滨工业大学，后 20 年在华南理工大学。

不幸生于乱世，首先是抗日战争，使我没有机会读小学，小学以至于学前教育完全为死记硬背四书五经的私塾所代替。1941-1944 年在颠沛流离中，时断时续地受了两年半的中学教育，可学的课程支离破碎，残缺不全，在中学压根儿没有学过物理。1944 年 10 月入江津白沙（马项垭）大学先修班，该班以复习高中课程为主，有物理课，但对我的补救不大。曾被大学先修班保送到当时重庆的中央大学地质系，不过 1945 年夏还是考进交通大学，先在重庆九龙坡，次年春夏之交回上海徐家汇校址。在交大，作为工科基础课的物理，学的不算少，但 4 个学期的成绩总是在及格线上挣扎。学得辛苦，收益不多。总而言之，我的物理先天不足，后天也很失调，独自在黑暗中摸索研究方向，走了很多弯路。

的确，人生的道路往往是很曲折的。1947 年春季学期由航空系转入电机系，这本是我梦寐以求的事情，可是就在这个时候上海的学生运动进入高潮，我也卷入这个洪流。对于电机专业的学习愈来愈没有兴趣，而热衷于学运的工作。其中主要的一件是在当时学生自治会机关刊物《交大生活》那里搞报纸的编辑。撰稿、约稿、文字编辑、排版、到校外印刷厂发排和校样…什么都干过，俨然象一个报社的专职干部。

1948 年的下半年，白色恐怖已经比较严重，学运走向低潮，不少同学去解放区，最后我也跟着这个潮流向前走。1949 年 2 月参加浙江金（华）肖（山）支队。时间虽不长，有幸随支队的主力部队进行一次外线作战。对游击战争有些亲身经历，感到还是很精彩的。但也亲眼看到战争的残酷性，发人深思。进城以后，该游击支队建制撤销。我被分配到杭州浙江日报社编辑部的资料室。每天干剪贴报纸的工作，实在枯燥无味。经过一定的组织手续，1949 年 10 月搭上了东北（人民政府）招聘团运载招聘人员由上海开往沈阳的专列。同年 11 月到了哈尔滨工业大学进入为培养师资设立的研究生班，开始了新的学习生活。

学了一年俄文后，被分配到理论电工教研室。参加学生运动以后，电机系的专业课就根本没有学好。要培养我成为一个电机系专业基础课理论电工的教师。显然这是

适当的。然而，理论电工最直接也是最主要的基础还是物理的电学。一不做，二不休，干脆就去学物理，反正一切都要从头来。我这样的想法也得到了组织上的认可。就这样在哈工大走上了干物理的道路，这一次可定了终身。

1951 年春开始在苏联专家（Docent B.П. ДубоВ）的指导下学习（以自学为主）。他安排我们就学了普通物理的两大部分：电学和光学。学得有收获，最大的收获是坚定了我学物理的信心。毕竟基础太差，我物理的先天不足不可能得到根本的改变。要决心干下去，那只有以勤补拙了。首先我是认真对待教学工作的，正是在教学过程中不断地加深和提高对物理的理解，从不照本宣科，也不今年照去年的讲稿宣科。确实，在教学上我是从不偷懒的。

我的研究工作起步是很晚的，1951-1962 年这期间，教学任务比较重，加以处在肃反、反右、大跃进、“三年自然灾害”这样的历史背景，（如果再加上文化大革命，这应该算是毛泽东时代盛世下的乱世吧，前面可说自己“不幸生于乱世”的“乱世”也应包括这样的乱世。）不但工作上的压力很大，政治上的压力更大。到了 1963 年，似乎也想搞点什么研究，于是在位错连续介质理论方面，看了一些文献，做了一个工作总结。（详见本选集的〈关于宏观位错动力学基础方程问题〉的作者按语。）过后搁在一边，未再问津。过了 18 年，这件工作的摘要发表在<物理学报>（1981）上。现在看来，它应算是我的研究工作的一个良好开端，并且是自己摸索到的一个比较对头的研究方向。从那时（63 年）开始，就应锲而不舍地干下去。而我自暴自弃，轻易地丢掉了它。“大海航行靠舵手。”当时 35 岁，初涉足研究，看来还是需要一个把舵的。丢掉一个方向，再找第二个，也并不那么容易。

我的研究工作的再起步是晚而又晚的。1983 年开始招硕士研究生，任务临头，不得不再认真考虑研究方向了。深感遗憾的是：我没有为我的研究生在科研方面起到“师傅领进门”的作用。因为，自己还总在彷徨，也不知进那个门是好。相反，是我的研究生们促进和协助我探索了研究工作。这小本选集就是这种探索的结果。什么水平、价值是谈不上的。好，就留着做个纪念吧。毕竟是 80 岁的老人了，让他感到在这个世上没有白活，岂不快哉！

欧发

2007 年 7 月 8 日

目 录

(Journal of Physics 1996) ………………欧发、魏宝华、K. W. Yu、刘翠红

23、Optical Nonlinearity of Ionic Crystals and Its Increasing Absorption Optical Bistability (Journal of Physics 1996) ………魏宝华、欧发、K. W. Yu、吴庭万

24、Bifurcation of Dicke Model Driven by Laser Field and Scaling Theory of Critical Exponents far from Equilibrium (Chinese Journal of Lasers 1996)
……………………………………………………………欧发、吴福根

25、光脉冲在含玻色元激发的非线性介质中的传播与面积定理(光学学报 1998)
……………………………………………………………欧发、吴福根

26、An Improved Laser Model Based on the Nonlinear Coupling of Lightfield with Boson Elementary Excitation (Journal of Nonlinear Optical & Materials 1998)
………………………………………………………$\boxed{\text{何明高}}$、欧发

27、光学三稳态系统中的慢化现象 (光学学报 1999)
……………………………………………吴福根、$\boxed{\text{何明高}}$、吴庭万、欧发

28、具有多重定态的化学反应中的相变及临界点分类 (化学学报 1999)
……………………………………………………吴福根、张春华、欧发

29、光学多稳系统的相变及临界点分类 (光学学报 1999)
……………………………………………欧发、吴福根、$\boxed{\text{何明高}}$

30、非简谐性离子晶格在光场中的能谱－动态斯塔克效应 (光学学报 1999)
……………………………………………欧发、$\boxed{\text{何明高}}$、吴福根

31、Ultrasonic Generation via Direct Interaction between Photons and Phonons in Anharmonic Lattice of Ionic Crystals (Chinese Journal of Acoustics 2000)
……………………………………………欧发、吴福根、$\boxed{\text{何明高}}$、刘翠红

32、Generation of Laser Light via Ultrasonic Four-wave Mixing (Chinese Journal of Lasers 2001) ……………………………………欧发、吴福根、$\boxed{\text{何明高}}$

33、Optical Nonlinearity via Phonons as an Intermediary (Journal of Nonlinear Optical & Materials 2001) ……………………………………欧发、$\boxed{\text{何明高}}$、吴福根

34、Optical Nonlinearity via Phonons as an Intermediary(continuation)－Four-wave Mixing and Coherent Raman Processes (Journal of Nonlinear Optical & Materials 2001) ……………………… ……………………………欧发、$\boxed{\text{何明高}}$、吴福根

作者按：本文发表于 1978 年《哈尔滨工业大学学报》的 3-4 季度合刊，实[illegible]

年的工作，当时在哈尔滨工业大学物理教研室[illegible]作了报告。

1、关于宏观位错动力学的基本方程问题

物理教研室　欧　发

一、引　言

位错周围存在着应变、应力场，需要有一组方程将位错源（位错分布、代表位错运动的位错流）与它的场连系起来——场的方程；位错在外应力场作用下发生运动，也需要方程将两者联系起来——位错的运动方程。这十分类似于电动力学的基本方程：场的方程 —Maxwell 方程；运动方程——Lorentz 方程。寻求建立位错的这两方面的方程，以至于求解，是建立位错动力学的基本任务。位错动力学的建立过程受到已有的弹性力学理论与电动力学理论的影响是很大的。位错场和一般情况下的电磁场一样属于线性场（即场的方程是线性的），虽然这两种场的张量阶次是不一样的。

静态位错场理论看来已发展到比较完备的阶段[1],[2]（包括场的方程、求解、位错间弹性相互作用能的计算等）。运动位错周围场的问题，最初（1953年）J.D.Eshelby[9],[2]只考虑到螺形位错的特殊情况。关于普遍情况下运动位错场的问题，E.F.Holländer[3]（1960）作了尝试，提出了一套方程。A.M.Косевич[4]（1962）感到不很满意。他也提出了一套方程和一套求解方法，并计算了一个具体问题。至于位错运动方程的建立，Косевич 继前面一篇文章，在1962下半年又提出一篇论文[5]作这方面的尝试。

本文主要围绕宏观位错动力学场的基本方程及其有关问题作一较系统的评述，并提出"动态位错场张量势的规范变换"这样一个问题，提出一套变换的方法，作了相应的论证。

冠以"宏观"的含义是不考虑到原子的结构：将晶体当成是连续弹性媒质，将位错看成一条"线"（在计算自有能时，为消除发散困难，将"线"扩展为一个"管道"，但对其中微观结构仍然"不求甚解"）。按 Kroner 等[6]的意见，认为这样的位错的宏观弹性理论可以作为范性的宏观理论与微观（原子）理论中间的一个桥梁。

二、场的方程

2.1. 场的基本量

先从描述位错场的基本量问题谈起。

位错是晶体中的一种线性缺陷，它在晶体中沿滑移面的移动，形成晶体中的范性形变。然而，在我们研究位错周围的形变场时，范性形变往往先不在我们的考虑之中。这一点也并不奇怪：范性形变并不是状态的函数，它与介质经历的历史过程有关。介质在相同的应力状态下，可以有不同的范性形变。不过，范性形变最终还是要反映到位错场的方程中来，特别当位错运动时，范性形变的反映是应当有的。这在后面将会看到。

在位错周围存在着和应力 σ_{ij} 相对应的并服从 Hooke 定律的弹性形变 ε_{ij} 场：（张量的降秩一律采用物理上惯用的爱因斯坦记号法）

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} &&\text{（各向异性）}\\ \sigma_{ij}&=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\delta &&\text{（各向同性）}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

（参照〔2〕p.166—169）

Hooke 定律（1）是位错动力学的基本假设之一。

我们这里只考虑各向同性介质的情况。

ε_{kl} 是应力状态的函数，因此，我们用它来作为描述位错场的基本量，或者用弹性畸变 u_{ij}（二阶张量 a_{ij}，有时我们也用 $\hat{a}$ 来标记。）也可以，因为弹性畸变 u_{ij} 的对称部分 u^s_{ij} 就是弹性应变 ε_{ij}。

值得指出，位错周围的弹性畸变与通常介质中的弹性畸变有一个很大的差异。弹性畸变及与之相对应的介质中各点的弹性位移 $u_i(\vec{r},t)$（时间参量 t，为简便起见，常略去不写，但应记住 u_i 一般是 t 的显函数），有下列关系：

$$u_{ij}=\nabla_i u_j \qquad \left(\nabla_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$u_i(\vec{r})$ 对于位错场是位置矢量 $\vec{r}$ 的多值函数。并且它只有在没有位错线通过的地点存在，有位错的地点，它是不存在的，或者说是没有意义的（这样的 $u_i(\vec{r})$ 与稳定电流周围磁场 H_i 的标量势 φ，$H_i=\nabla_i\varphi$，是相似的）。正因如此，不能象一般弹性场，可以将 $u_i(\vec{r})$ 当作描述场的最基本量。但是，$\hat{u}(\vec{r})$〔或是 $u_{ij}(\vec{r})$〕仍是位置的单值函数。

以上所述位错场的弹性畸变这样的特征是由位错的本性（位错条件）[2][10] 所决定的。位错的本性可由以下方程来概括（连续介质模型）。

$$\left.\begin{aligned}&\oint_C du_j=\oint_C u_{ij}\,dl=-b_i\\ \text{或}\quad&\oint_C d\vec{u}=\oint_C \hat{u}\cdot d\vec{l}=-\vec{b}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\vec{b}$ 是通过 Burgers 回路 C 所包围面积 $\vec{S}$ 的所有位错线的 Burgers 矢量（以下简称布矢量）总（矢量）和。由（2）可见，$\vec{u}(\vec{r})$ 不是位置的单值函数。

（2）是位错场的基本方程之一〔积分形式，以后会看到，它的微分形式是(4)式〕。

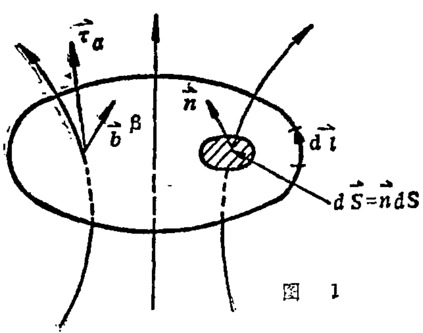

图 1

按张量的 Stokes 定理（参照图 1）

$$\oint_C \hat{u}\cdot d\vec{l}=\oint_C \nabla\times\hat{u}\cdot d\vec{S}\tag{2a}$$

将 $\vec{b}$ 也表达为一个面积分（即近似地认为位错布矢量是连续分布的）。

$$\vec{b}=\int\hat{D}\cdot d\vec{S}\tag{3}$$

这里 $\hat{D}\cdot d\vec{S}$ 代表属于 $d\vec{S}$ 面内通过的位错线的布矢量 $d\vec{b}$。$\hat{D}\cdot d\vec{S}=\vec{D}_n\,dS$，$\vec{D}_n=\hat{D}\cdot\vec{n}$

（对照图1，$\vec{n}$是$\vec{dS}$的法线），故有$\vec{D}_n=\frac{d\vec{b}}{dS}$。

于是，我们定义$\hat{D}$为位错密度张量——表征（位错）场源分布的一个基本量，它是位错的布矢量的面密度张量。请注意它与通常所指的位错密度的区别。后者实际上是指位错线密度。这最好表达为一种通量密度，即位错线通量密度（矢量）$\vec{N}(\vec{r})$

$$\vec{N}(\vec{r})=N\vec{\tau} \tag{3a}$$

其中 $\vec{\tau}$是位错线在某一点$\vec{r}$上的切线单位矢量，于是，在$\vec{r}$点附近的任一截面$\vec{dS}$中所通过的位错线通量$d\Phi$。

$$d\Phi=N(\vec{r})\vec{\tau}\cdot\vec{dS}=N(\vec{r})\,dS_\tau \tag{3b}$$

由于我们认为位错线是连续分布的，（3）中的$\vec{b}$一般可以不是晶格基矢的整数倍，对于$\hat{D}(\vec{r})$，可以认为是$\vec{r}$的连续函数。但从微观的角度来考虑，实际上布矢量分布是不连续的，不连续的最小单元是一根位错线（犹如一个电子），每根位错线所带的布矢量是一个晶格的基矢$\vec{b}_0$（犹如一个电子所带的电荷为一个e）。在这种情况下，$\hat{D}$还是可以表达为$\vec{r}$的"连续函数"，不过这个函数是某种广义函数——δ函数：

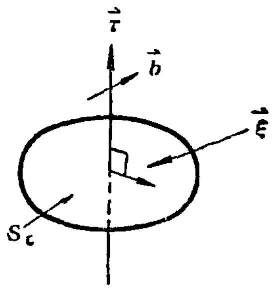

图 2

$$\vec{D}=\vec{\tau}\,\vec{b}_0\,\delta(\vec{\xi}) \tag{3c}$$

其中 $\vec{\xi}$系在垂直于位错线切线$\vec{\tau}$的平面S_τ内的位置矢量（见图2）。

$$\int\hat{D}\cdot\vec{dS}=\int\delta(\vec{\xi})\,\vec{b}_0\vec{\tau}\cdot\vec{dS}$$
$$=\int\vec{b}_0\,\delta(\vec{\xi})\,dS_\tau=\vec{b}_0 \tag{3d}$$

这正是我们所予期的。

（3a）是孤立的一根位错线的$\hat{D}(\vec{r})$。若一种类型的位错线有很多，并近似认为是连续分布，则

$$\hat{D}(\vec{r})=N(\vec{r})\,\vec{\tau}\,\vec{b} \tag{3e}$$

更普遍地，应表达为

$$\hat{D}(\vec{r})=\sum_{\alpha,\beta}\vec{\tau}^\alpha\,\vec{b}^\beta\,N^{\alpha\beta}(\vec{r}) \tag{3f}$$

α标志某一种位错线方向，β标志某一种晶格矢，（见图1），(α,β)代表某一种类型的位错线。$N^{\alpha\beta}(\vec{r})$则是在$\vec{r}$点该种类型位错线密度。

2.2. 场的基本方程

以上讨论了：①描述场的基本量$\hat{u}$（也包括$\hat{u}$的对称部$\hat{u}^s=\hat{\varepsilon}$），②如何引入标志场源分布的量$\hat{D}(\vec{r})$，以及它和位错线密度$\vec{N}(\vec{r})$之间的关系。现在再回到场的方程问题上来

对照（2），（2a）与（3）不难看出：

$$\nabla\times\hat{u}(\vec{r})=-\hat{D}(\vec{r})$$

或 $$e_{jlm}\nabla_l u_{mk} = -D_{jk} \tag{4}$$

（e_{jlm}是一特殊的三阶张量，它的定义在一般张量分析书籍上能找到）。

（4）式从根本上来说，出自于位错的定义（位错的本性），它将场源（量）$\hat{D}$与由场源产生的场$\hat{u}$连系联来。它是位错场的基本方程之一，也是代表位错特性的最基本的方程（它是微分形式，而（3），正如前面已提到过,是它的积分形式）。

由（4）可见，在$\hat{D}(\vec{r})\neq 0$的地点，不可能存在$\vec{u}(\vec{r})$，相应也不存在$\hat{u}=\nabla\vec{u}(\vec{r})$。因为

$$\nabla\times\nabla\vec{u}\equiv 0$$

这就和（4）发生了矛盾，只有在 $\hat{D}(\vec{r})=0$ 的地点（没有位错线通过的地点）存在$\vec{u}(\vec{r})$及$\hat{u}(\vec{r})=\nabla\vec{u}(\vec{r})$，但$\vec{u}(\vec{r})$不是单值的。一开始我们就指出的位错场弹性畸变$\hat{u}(\vec{r})$及弹性位移$\vec{u}(\vec{r})$这样的特点，在这里，道理就看得很清楚了。

由于$\nabla\cdot\nabla\times\hat{u}-0$，对照（4），我们就有

$$\nabla\cdot\hat{D}=0 \tag{5}$$

（5）也是由位错的本性（4）所决定的。（5）式又称为$\hat{D}$与（4）的相容条件。

由（5）可以证明穿入任一体积为V，闭合面积为S的诸位错线的布矢量之矢量和恒为零：

$$\sum_\beta \vec{b}^\beta=0 \tag{5a}$$

（5a）说明：①位错线不能终止在晶体的内部，除了封闭的位错线以外，位错线必然在体表面露头；②封闭位错线上的布矢量b，必然处处相等；③诸位错线汇交于一点时，各线所带的布矢量总和必为零。

（5a）的证明如下：

$$\int_V\nabla\cdot\hat{D}dV\equiv\oint_S\hat{D}\cdot\vec{dS}=\sum_\beta\int\vec{b}^\beta\delta(\vec{\xi}_\beta)\ \vec{\tau}\cdot\vec{dS}=\sum_\beta\vec{b}^\beta$$

这里第一个等式利用了二阶张量的Gauss定理以及（3a），（3d）等关系式。

（4）式还不能完全反应位错场的弹性本质，〔方程（4）也不足以将$\hat{u}$唯一的确定〕因为$\hat{u}$代表弹性畸变，它必须满足弹性介质的平衡方程（各向同性介质，并无体积力存在）：

$$\mu\nabla_k(u_{lk}+u_{kl})+\lambda\nabla_l u_{kk}=0 \tag{6}$$

（6）就是用弹性畸变表达的Lame方程，其中包含了Hooke定律。(6)与（4）是静（止）位错场的基本方程，它们的求解问题，请参照〔1〕。

当位错在运动，则介质中各点的弹性畸变$\hat{u}$随t而变化，这又意味介质中各点在运动。这样，当位错在运动，又需引入介质各点运动速度$\vec{v}(\vec{r},t)$来描述场的各点特征，$\hat{u}$与$\vec{v}$要满足弹性介质的动力学方程：

$$\rho\frac{\partial v_l}{\partial t}=\mu\nabla_k(u_{lk}+u_{kl})+\lambda\nabla_l u_{kk} \tag{7}$$

（7）是牛顿第二定律加上Hooke定律。（7）连同（4）是运动位错场的两个基本方程。但这两个方程不够完备。随之要提出一个问题：$\vec{v}$与$\hat{u}$的变化率是不是有关

系？当然有关系：$\hat{u}$随时间的变化(率)$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \equiv \dot{\hat{u}}\right)$即意味存在着介质各点的运动（速度$\vec{v}$）。

弹性畸变变化率$\dot{\hat{u}}$与介质各点的速度$\vec{v}$之间的关系如何？对于通常的弹性畸变场，由于$\vec{v}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$，$\vec{v}$与$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$之间关系不难得到：

$$\nabla \vec{v}=\nabla\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{u}=\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$$

即有

$$\nabla \vec{v}=\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \tag{8}$$

然而，（8）与（4）是不相容的，因为

$$\nabla \times \nabla \vec{v} \equiv 0$$

连系（8）与（4），应有

$$\nabla \times \nabla \vec{v}=\nabla \times \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \hat{u})=-\frac{\partial \hat{D}}{\partial t}=0$$

而当位错运动时，显然$\frac{\partial \hat{D}}{\partial t}$不应为零。

由此观之，由位错运动引起的介质各点的运动速度$\vec{v}$与$\hat{u}$的速度$\dot{\hat{u}}$之间的关系式决不可能是(8)式。否则，位错的存在将对我们毫无用处(至少对于解释范性形变问题）。

$\vec{v}$与$\dot{\hat{u}}$采取什么样的关系才能与（4）相容呢？我们的办法是在（8）式里再增添一个二阶张量$\hat{I}$，即使

$$\nabla \vec{v}=\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}-\hat{I},$$

或

$$\nabla_i v_k=\frac{\partial}{\partial t} u_{ik}-I_{ik} \tag{9}$$

下面我们会看到，它可以相当圆满地解决这个问题。$\hat{I}$定名为位错流（线）密度张量，它代表场源运动的分布量（正如电流密度$\vec{j}$代表电荷运动的分布量一样）。这样，(9)与（4）显然是相容的。而且，（9）给我们带来可喜的结果：①（9）能够反映出由于位错运动而引起的范性形变；②$\hat{I}$的物理意义的确名符其实地代表着位错的运动。

首先我们来讨论$\hat{I}$的物理意义。以(9)代入两边作用以$\frac{\partial}{\partial t}$的（4），（并考虑到$\nabla \times \nabla \vec{v} \equiv 0$）我们有

$$\frac{\partial \hat{D}}{\partial t}+\nabla \times \hat{I}=0 \tag{10}$$

（这和电荷的连续方程$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot \vec{j}=0$完全相似。下面即将看到（10）正是位错线布矢量的连续方程（微分形式），今取（10）的积分（请对照图3；L代表任一环路的全长，S代表L所包围的面积。）

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \hat{D}\cdot \vec{ds}=\oint_L \hat{I}\cdot \vec{dl} \tag{10a}$$

等式之左代表单位时间内S面中位错线的布矢量$\vec{b}$的减少，这个减少，显然是由于有一些位错切割环路L而跑出S面，相应带走一部分布矢量，而等式之右正就代表单位时间内由于S面内的位错线切割L而流出（或带出）的布矢量。$\hat{I}\cdot\vec{dl}$就代表单位时间内切割$\vec{dl}$这个线段的位错线而带出的布矢量，因而$\hat{I}$是一个位错（布矢量）流的线密度张量。

当L内都是同一类型的位错线，切割$\vec{dl}$的位错线运动速度为$\vec{V}$，则单位时间内位错线割切$\vec{dl}$所带出的布矢量（对照图4）为

$$\hat{I}\cdot\vec{dl}=[\vec{V}\times\vec{dl}]\cdot\vec{\tau}N(\vec{r})\vec{b} \tag{11}$$

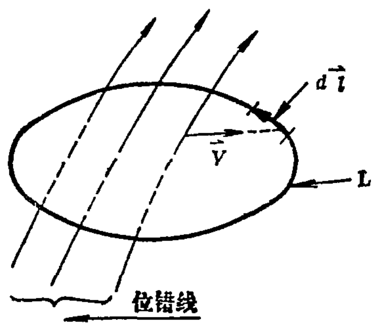

图 3

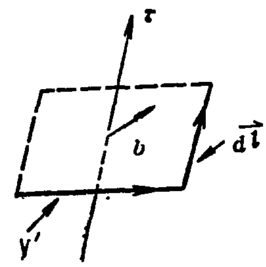

图 4

这里利用（3a）及（3e），并考虑到$\vec{V}\times\vec{dl}$是位错线单位时间内扫过的面积。
上式也可以写成：

$$I_{kl}dl_l=e_{lmt}V_m dl_l\tau_t Nb_k \tag{11a}$$

于是有：

$$I_{kl}=Ne_{lmt}V_m\tau_t b_k=Ne_{ltm}\tau_t V_m b_k \tag{11b}$$

即有

$$\hat{I}(\vec{r})=N(\vec{r})[\vec{\tau}\times\vec{V}]\vec{b} \tag{11c}$$

〔对比：$\vec{j}=en(\vec{r})\vec{V}$，$\vec{j}$——电流密度；$e$——载流子所带电荷；$\vec{V}$——载流子运动速度；$n$——载流子体密度〕

$\hat{I}$既然标志着位错的运动，这个运动应该产生范性形变（的增长）。令人感到高兴的是，在我们的理论中，$\hat{I}$能直接地和范性形变（的增长）连系起来。

在（9）中，$\vec{v}$是介质各点运动速度，但在这里$\vec{v}\neq\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$，这恰好说明，此时（即当位错运动时）介质中各点的位移不可能单纯是弹性位移$\vec{u}$。现在我们令$\vec{u^G}(\vec{r})$代表在$\vec{r}$点介

质的全部几何位移，则$\frac{\partial \overrightarrow{u^G}}{\partial t}$ 才是介质中各点的运动速度$\vec{v}$：

$$\vec{v} = \frac{\partial \overrightarrow{u^G}}{\partial t}$$

相应

$$\hat{u}^G(\vec{r}) = \nabla \overrightarrow{u^G}\ (\vec{r})$$

代表在$\vec{r}$点介质的全部几何畸变。则（9）就变成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}^G - \hat{u}) = -\hat{I} \tag{12}$$

从这里看出$\hat{u}^G - \hat{u}$代表从全部几何畸变 $\hat{u}^G$ 中减去弹性畸变 $\hat{u}$，所剩下的畸变不是别的，正是范性畸变$\hat{u}^P$，即〔$\hat{u}^P$的对称部 $(\hat{u}^P)^S = \hat{\varepsilon}^P$ = 范性形变〕

$$\hat{u}^P = \hat{u}^G - \hat{u} \tag{12a}$$

这样（12）式就可以写成：

$$\frac{\partial \hat{u}^P}{\partial t} = -\hat{I}$$

或

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}^P}{\partial t} = -\hat{I}^S \tag{12b}$$

其中 $\hat{I}^S$ 代表$\hat{I}$ 的对称部分。

（12b）完全符合我们予期的结果。若有位错运动：$\hat{I} \neq 0$ （$\hat{I}^S \neq 0$），就有范性畸变（范性形变）的增长：$\frac{\partial \hat{u}^P}{\partial t} \neq 0$（$\frac{\partial \hat{\varepsilon}^P}{\partial t} \neq 0$）；若位错处于静止：$\hat{I} = 0$，按(12$b$)则有

$$\frac{\partial \hat{u}^P}{\partial t} = 0, \quad u_P = 常数 \quad (\frac{\partial \hat{\varepsilon}^P}{\partial t} = 0, \quad \hat{\varepsilon}^P = 常数)$$

这里说明，当位错静止时，介质存在着（在一般情况下）固定不变的范性形变（常数是相对 t 而言）。

位错的非保守运动，要引起介质中收缩形变，这在我们的理论中也有所反映。将（12b）等式两边取张量矩阵的迹，并考虑到

$$Sp\hat{u}^P = u^P{}_{kk} = \nabla_k u^P{}_k = \nabla \cdot \hat{u}^P,$$

于是有

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \hat{u}^P = Sp\ \hat{I} \tag{13}$$

$Sp\hat{u}^P$及$Sp\hat{I}$ 分别是范性畸变 $\hat{u}^P$ 及位错流密 $\hat{I}$ 度两个二阶张量的矩阵的迹。显然，（13）等式之左边代表由于范性畸变引起的收缩形变（负号正代表收缩的含义）。

再来看等式之右边 $Sp\ \hat{I}$ 代表的含义。据（11b），我们有

$$\begin{aligned} Sp\ \hat{I} &= I_{kk} = Ne_{lmk}\,\tau_l\, b_k\, V_m = Ne_{mkl}\, b_k\, \tau_l\, V_m \\ &= N[\vec{b} \times \vec{\tau}] \cdot \vec{V} \end{aligned} \tag{13a}$$

由此可见，当位错线运动速度$\vec{V}$在$\vec{b}$（布矢量）与$\vec{\tau}$（位错线）构成的滑移面内时，即位错在滑移面内运动时（保守运动），$Sp\hat{I}=0$；若位错运动离开了滑移面，即$\vec{V}$的方向再不与〔$\vec{b}\times\vec{\tau}$〕垂直（即$\vec{V}$不在$\vec{b}$与τ构成的平面内），这是非保守运动，相应有$Sp\hat{I}\neq 0$。位错线离开滑移面的运动，一般又称为攀移运动。这种运动是由于位错线周围吸引了大量的（宏观上的）原子空位而引起的。这种位错线（可能有许多根的攀移运动的结果，会造成大量空位的"凝聚"，而形成空洞，相应产生体积的收缩形变。(13)式说明，位错的非保守运动（以 $Sp\hat{I}\neq 0$为标志）引起体积的收缩形变（以$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot u^{P}$为标志）。

值得注意的是，(13a) 与 (13) 还说明，若为螺形位错，$\vec{b}$与$\vec{\tau}$平行，〔$\vec{b}\times\vec{\tau}$〕$=0$，则 $Sp\hat{I}$ 恒为0，也就是说螺形位错引起的范性形变不会伴随体积的收缩形变。

总之，动态位错场的完备的方程组是：(14)，(7) 与 (9) 三个方程。即

$$\nabla\times\hat{u}=-\hat{D}\quad(\text{或 } e_{ilm}\nabla_l u_{mk}=-D_{ik})\tag{4}$$

$$\rho\frac{\partial v_l}{\partial t}=\mu\nabla_k(u_{lk}+u_{kl})+\lambda\nabla_l u_{kk}\tag{7}$$

$$\nabla\vec{v}=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}-\hat{I}\quad(\text{或 } \nabla_l v_k=\frac{\partial}{\partial t}u_{lk}-I_{lk})\tag{9}$$

建立这组方程的关键在于 (4)，它来自于代表位错本性的方程（积分形式）(2)。(7) 是借用弹性力学的结果。(9) 反映出位错的动态特性（特别是能够说明位错运动产生范性形变这一重要的结果）。虽然 (9) 和 (4) 是互相独立的，但 (9) 的建立受到 (4) 的启发，关于此，在前面已作了分析。解的问题在下部分讨论。

(4) 的边界条件问题，在这里再作一补充。

2.3. 补充：含位错线的界面的边界条件

(4) 式适用于当位错线分布在体内的情况，但有时位错线限制在一个面内（例如，小角晶粒间界就是一个包含着刃型位错线的界面），此时，(4) 式就要退化成为边界条件的形式。

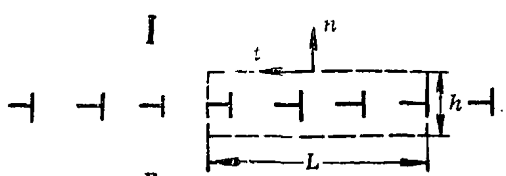

图 5

Ⅰ、Ⅱ代表此边界面的晶体两侧。（见图5，$\vec{n}$是界面法线，$\vec{t}$是沿回路 c 并平行于界面的切线，而$\vec{n'}=\vec{n}\times\vec{t}$，$\vec{n}$，$\vec{t}$，$\vec{n'}$ 均为单位矢量。）界面与图纸面相截，截线上排列着位错线露头点（以'⊣'符号标志），在截线上取小扁方框回路 c。对 (4) 之左取沿 c 所包面积的面积分：

$$\oint\nabla\times\hat{u}\cdot\vec{dS}=\oint_{c\,(h\to 0)}\hat{u}\cdot\vec{dl}=(\vec{t}\cdot\hat{u}_{\rm I}-\vec{t}\cdot\hat{u}_{\rm II})L\tag{4a}$$

而不难证明：

$$\vec{t}\cdot\hat{u}=\vec{n'}\cdot(\vec{n}\times\hat{u})\tag{4b}$$

对 (4) 之右取同样的面积分：

$$\int \hat{D} \cdot \vec{dS} = [\vec{n'} \cdot \hat{D}]Lh = [\vec{n'} \cdot \hat{\beta})]L \tag{4c}$$

其中令 $$\lim_{h\to 0} (h\hat{D}) = \hat{\beta} \tag{4d}$$

再利用（4a）与（4b），于是我们得边界条件：

$$\vec{n}\times \hat{u}_{\text{I}} - \vec{n}\times \hat{u}_{\text{II}} = -\beta \tag{4e}$$

当边界面上均为同一类型位错时，利用（3e）可得

$$\hat{\beta} = \lim_{h\to 0} (h\hat{D}) = \lim_{h\to 0} [h N(\vec{t}) \ \vec{\tau}\vec{b}]$$

$$= \lim_{h\to 0}[N_L(\vec{r}) \ \vec{\tau}\vec{b}] = N_L(\vec{r})\vec{\tau}\vec{b} \tag{4f}$$

这里 $N_L(\vec{r})$ 代表在边界面截线上（在 $\vec{r}$ 点上）单位长度上的位错数。这样，$\hat{\beta}$ 代表在界面上位错分布的线密度张量。

三、场方程的解，兼论位错场的张量势的规范变换问题

3.1. 解的方法

先将动态位错场的方程组重新抄录如下：

$$\nabla\times \hat{u} = -\hat{D} \tag{4}$$

$$\rho\frac{\partial v_l}{\partial t} = \mu\nabla_k(u_{lk} + u_{kl}) + \lambda\nabla_l u_{kk} \tag{7}$$

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \hat{I} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \hat{D} = 0 \text{〔(4)的相容条件〕} \tag{5}$$

场方程组解的基本问题原则上讲是：给出 $\hat{D}(\vec{r},t)$ 与 $\hat{I}(\vec{r},t)$ 及边界条件（包括初始条件）求解场量 $\hat{u}(\vec{r},t)$ 及 $\vec{v}(\vec{r},t)$。给出 $\hat{D}$（位错的几何分布）与 $\hat{I}$（位错在晶体中运动状态）不是一件简单的事情，也不很现实。所以，实际上多半不会采取上述这样的命题办法。我们的首要任务是在一般情况下（当然也可能附加某些条件的限制）求解出 $\hat{n}$ 与 $\vec{v}$，看看它们在时间上、空间上的分布有些什么规律，与其源头 $\hat{D}$ 与 $\hat{I}$ 的分布有什么样关系，有些什么物理效应（例如弹性波的辐射问题）等等。

针对不同问题，方程组的解法可能是多种多样的。我们有一个企图，那就是将(4)，(7)，(9)，(5)转化为已有的典型的数学物理方程，这至少在数学上带来许多方便，显然在物理上也是很有意义的。这也是我们讨论上述场方程解的一个主要任务。人们探索的结果，证明这个企图是可以实现的。（7）本来就是弹性力学中的动力学方程，（4）、（5）、（9）和电动力学的一些基本方程也有其相当的类似性。由于方程对于 $\hat{u}$，$\vec{v}$ 都是线性的，我们可以将 $\hat{u}$ 和 $\vec{v}$ 的解分别分解为两个部分。如果分解得适当，下面我们会看到：一部分解可以归入弹性力学中的典型的数学物理方程；一部分可以归入电动力学中的典型的数学物理方程。这个适当的分解是：令

$$\hat{u} = \nabla \vec{U} - \hat{g} \tag{14}$$

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{W} \tag{15}$$

本来是两个未知张量函数$\hat{u}$（二阶）、$\vec{v}$（一阶），现在变成了三个：$\vec{U}$、$\vec{W}$、$\hat{g}$。三者不能是互相独立的。我们需要加一些限制条件。这里我们给$\vec{W}$与$\hat{g}$加以如下限制条件：

$$\rho \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \mu \nabla \cdot \hat{g} = \mu \vec{D} \tag{16}$$

$$Sp\, \hat{g} = 0 \tag{17}$$

这里（18）中的$\vec{D}$：

$$D_i = e_{ijk} D_{jk} \tag{16a}$$

$$= e_{ijk}\tau_j b_k N(\vec{r}) \quad \text{（对于同一类型位错）}$$

即有〔参照（3b）〕

$$\vec{D} = \vec{\tau} \times \vec{b} N(\vec{r}) \tag{166}$$

另一方面，$\hat{g}$与$\vec{W}$应遵守我们的场方程。将（14）代入（4），得（并考虑到 $\nabla \times \nabla \vec{U} = 0$）

$$\nabla \times \hat{g} = \hat{D} \tag{18}$$

将（15）代入（9）中的 $\vec{v}$，（14）代入（9）中的$\hat{u}$，得

$$\nabla \vec{W} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = -\hat{I} \tag{19}$$

以（14）与（15）代入(7)中$\vec{v}$与$\hat{u}$，再考虑到（16）、（17）、（16a），不难得到〔其中有一个步骤是利用（18）及（17）证明了 $D_i = \nabla_k g_{ik}$〕：

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \vec{U} - (\lambda + \mu) \nabla \cdot (\nabla \vec{U}) = -2\mu \vec{D} \tag{20}$$

这是弹性理论中熟知的动力学 Lame 方程。$\vec{U}$ 相当于弹性位移，$-2\mu\vec{D}$ 相当于体积力。这个方程的解在弹性理论中是有的[7]。

对于螺形位错，位错线切线$\vec{\tau}$恒平行于布矢量$\vec{b}$，于是〔对照（16b）有 $\vec{D} = 0$，则（20）的解$\vec{U} \equiv 0$，相应（14），（15）成为

$$-\hat{g} = \hat{u} = \nabla \vec{u} \tag{14a}$$

$$\vec{W} = \vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \tag{15a}$$

以此代入（16），则（16）成为〔2〕中的（91），即变为在自由介质中（无场源的分布）运动螺旋位错场的方程：

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{C_t^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \tag{16c}$$

这里 $C_t^2=\frac{\mu}{\rho}$。由此可见，限制$\hat{g}$与$\vec{W}$的条件（16）的提出，并不是那么奇突的，或者说是有根据的。初步看出，（14），（15）这样对$\hat{u}$与$\vec{v}$的分解方法是合理的，首先，$\vec{U}$的解在弹性力学中找到了它的归宿。

由于对于螺形位错$\vec{U}\equiv 0$，则有〔并考虑到（17）〕

$$膨胀率 Sp\,\hat{u}=Sp\,\hat{g}=0 \tag{16d}$$

相应根据（19），在$Sp\,\hat{I}=0$（即位错的运动是保守的）的前提下（对于螺形位错的运动，这个前提总是存在的），于是有

$$膨胀率的速度\frac{\partial}{\partial t}Sp\,\hat{g}=\nabla\cdot\vec{W}=0$$

可见，$\hat{g}$与$\vec{W}$只对切变形变有贡献。我们姑称它们为“位错形变量”。

由于（16d）相应（16c）中$\vec{u}$也只能代表介质中质点的切变弹性位移。因此，（16c）这个波动方程反映的是一种切变弹性波——横波，C_t正代表切变弹性波在介质中的波速。

下面我们再来看$\hat{g}$与$\vec{W}$的解是怎样归入电动力学的。引入两个张量势$\hat{A}$与$\hat{B}$来表述$\hat{g}$与$\vec{W}$，表达的关系式是：

$$\left.\begin{aligned}\hat{g}&=\nabla\times\hat{A}-\nabla\vec{\chi}-\rho\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}\\ \vec{W}&=\frac{\partial}{\partial t}\vec{\chi}+\mu\nabla\cdot B\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

这里$\vec{\chi}$是$\hat{A}$的派生量：

$$\chi_i=e_{ikl}A_{kl} \tag{21a}$$

同时我们对$\hat{A}$与$\hat{B}$还需要附加限制条件

$$\nabla\times\hat{B}+\mu^{-1}\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}=0 \tag{22}$$

$$\nabla\cdot\hat{A}=0 \tag{23}$$

提出这两个条件的根据，在下一节中作专门的讨论。

利用条件（22）及（23），将（21）之$\hat{g}$代入（18）；（21）之$\vec{W}$代入（19），分别得

$$\nabla^2\hat{A}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2\hat{A}}{\partial t^2}=-\hat{D} \tag{24}$$

$$\nabla^2\hat{B}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2\hat{B}}{\partial t^2}=-\hat{I}/\mu \tag{25}$$

这同电磁场中的决定场量$\vec{E}$与$\vec{H}$的矢量势$\vec{A}$与标量势φ满足的方程完全相似，这是非齐次的波动方程。在没有场源分布的地方$\hat{D}=\hat{I}=0$，则有（齐次波动方程）：

$$\nabla^2\hat{A}-\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{A}=0 \tag{24a}$$