

圆弧齿轮公法线长度 及切深查表计算法

李敦信 袁然兴

1

原理与方法
67型凹齿公法线长度
M值系数表

杭州市机械工业局科技情报站

1985

一、前 言

目前世界上有不少国家对圆弧齿轮的啮合原理、强度、噪声以及制造工艺和测量等问题做了不少研究工作。圆弧齿轮在我国也有三十多年的历史。但作为新型的齿型毕竟还是年轻的。

圆弧齿轮(较之渐开线齿轮)由于它具有较高的齿面接触强度、制造简单、周期短和齿轮可用调质精滚代替淬硬磨齿等特点,因此目前已广泛地应用于低速重载齿轮和某些高速齿轮的传动装置上。但是,圆弧齿轮的啮合接触敏感性较强,其啮合接触质量严重影响到齿轮传动寿命及噪声。为保证圆弧齿轮在运行中有正确的啮合接触区,要求对影响啮合接触区的安装(中心距)精度、切齿刀具的齿形精度以及切齿深度等因素要严加控制。

过去一般按圆弧齿轮的弦齿高、弦齿厚以及按齿根圆来控制切深。前之,其测量精度与工件实测的顶圆直径有关;后之,借测量齿轮齿根圆的办法来控制滚齿切深。用此种方法测量切深有以下缺点:

1. 对刀具齿顶曲线的制造精度要求高;
2. 对大螺旋角的圆弧齿轮,按齿根圆控制切深远不能满足规定的精度要求;
3. 对大齿轮由于测量仪器尺寸较大,不适于采用齿根圆测量方法;
4. 奇数齿轮尚需进行换算。

精确而简便的方法是滚齿时测量齿轮的公法线长度以控制切齿深度 Δh 。

但是,过去圆弧齿轮公法线长度及切深的计算公式很繁琐,计算工作量较大;尤其是滚齿时的切深计算,尚未有较简便的计算方法,一般按不同的公法线长度(的剩余量 ΔL)列出相应

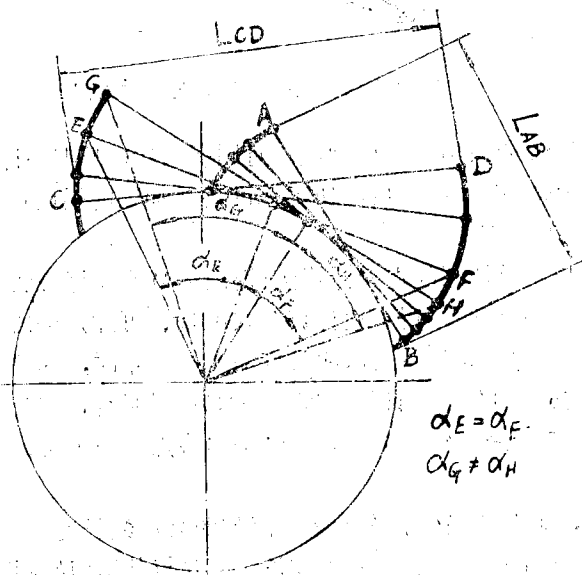


图 1 渐开线齿轮公法线长度

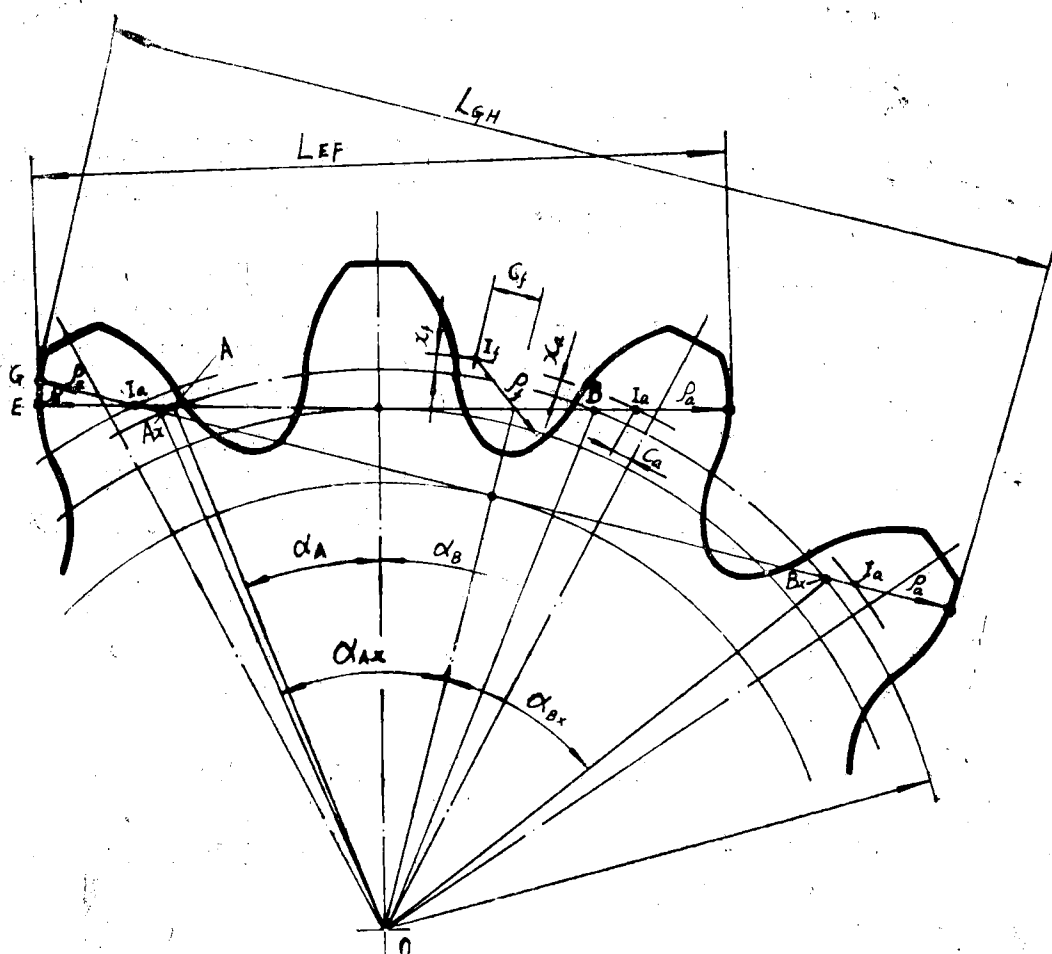


图2 双圆弧齿轮在法平面上公法线长度

的切深 Δh ，以便加工时参照使用。这样制造一对圆弧齿轮，既需要计算出公称的公法线长度，还要计算出不同切深的公法线长度，使工艺准备及加工的辅助计算工作量大大增加，满足不了圆弧齿轮生产发展的需要。

《圆弧齿轮公法线长度及切深的查表算法》提出按 M 值计算公法线长度以及按 Z 导出切深的简化计算，经生产实践证明采用上述计算公式准确、可靠，解决了加工圆弧齿轮的计算和测量问题。原来计算一对圆弧齿轮公法线长度需 4—8 小时，而采用本算法，包括切深 Δh 计算在内，总共只需 5—10 分钟，计算精度为 $|5 \times 10^{-7}|$ 弧度，相当于 0.103 角度秒。

为阐明圆弧齿轮和渐开线齿轮公法线长度的基本特点，在本文章里对此基本概念简述如下：

1. 在同一跨齿数，渐开线齿轮存在无数个等值的公法线长度，并都与形成其渐开线齿形的基圆相切；而圆弧齿轮只存在一个公法线长度，并与其相切的圆不是基圆（见图 1、图 2）。

2. 在不同的跨齿数，渐开线齿轮的公法线长度仍与基圆相切；而圆弧齿轮的公法线长

度与其相切的圆不是一个固定的圆(见图1、图2)。

3. 渐开线齿轮公法线长度, 其两测量点处任一点压力角可以不相等(见图1 $\alpha_G \neq \alpha_H$); 但圆弧齿轮两测量点处的压力角必须等值(见图2 $\alpha_A = \alpha_B, \alpha_{Ax} = \alpha_{Bx}$)。

由图2可知: 圆弧齿轮的公法线长度 L_{EF} 、 L_{GH} 均通过两齿廓的曲率半径中心 I_1 , 并分别交于节圆上 A、B 和 A_x 、 B_x , 则该点上的压力角 α_A 、 α_B 和 α_{Ax} 、 α_{Bx} 分别称之为测量点处的压力角, 其值并非任意的。测量点处压力角的方程是超越函数方程, 一般是用逼近法来求解的。因此圆弧齿轮公法线长度计算公式, 虽其形式不同, 但均属超越方程, 计算较为烦琐, 工作量较大, 而且易出差错。

为适应圆弧齿轮生产发展的需要, 从保证产品质量、计算简便及准确着想, 本书介绍了圆弧齿轮公法线长度及切深的查表算法, 并在附表中列出了大量数据, 供计算用。

二、圆弧齿轮公法线长度查表算法及其参数的依据

圆弧齿轮通用的简化计算公式, 可以按下式计算:

$$\left. \begin{array}{l} \text{对凸齿: } L_a = m_n(M + 2\rho_a') \\ \text{对凹齿: } L_a = m_n(M - 2\rho_i') \end{array} \right\} \quad (1)$$

上式中 ρ_a' 、 ρ_i' 和 m_n 分别为圆弧齿轮齿廓(凸齿和凹齿)曲率半径系数和模数, M 为公法线长度系数(下称 M 值系数)。本书 M 值系数表是根据我国目前广泛采用的齿型——“统一通用齿型”及“67型”有关参数, 根据齿轮的齿数 $Z = 9 \sim 200$, 螺旋角 $\beta = 5^\circ \sim 45^\circ$, 由电子计算机计算后列表。

关于 M 值系数的计算, 根据渐开线齿轮的特点, 引伸法向平面上的当量齿数 Z_d , 再根据 Z_d 确定公法线长度的卡量齿数 N :

$$Z_d = \frac{Z}{\cos^2 \beta \sqrt{1 - (\sin \beta \cdot \cos \alpha_n)^2}} \quad (2)$$

$$N = \frac{\alpha_n}{180^\circ} \cdot Z_d \pm 1 \quad (3)$$

上式中 Z 、 α_n 、 β 分别为被测量齿轮的齿数、公称压力角和螺旋角。式中的正、负号, 对凸齿取“+”号, 凹齿取“-”号。

对(3)式的计算结果, 四舍五入取其整数值作为圆弧齿轮公法线长度的卡量齿数“ N ”, 经实践证明是合理的。确定 N 值后, 按下式计算 M 值系数:

$$M = \left(Z \cdot \frac{\cos Q_n}{\cos \beta} + \frac{2x}{\cos Q_n} \right) \cdot \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta \cdot \sin Q_n)^2} \quad (4)$$

式中 Q_n 角单位为弧度, 按以下判别式迭代验算后确定:

$$Q_n = Q_{n-1} + [K - F(Q_{n-1})] \quad (5)$$

$$F(Q_{n-1}) = Q_{n-1} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \sin 2Q_{n-1} - \frac{2}{Z} x \frac{\operatorname{tg} Q_{n-1}}{\cos \beta} \quad (6)$$

判别式 $\Delta K = [K - F(Q_{n-1})] \leq |5 \times 10^{-7}|$, K 值对圆弧齿轮的凸齿和凹齿分别为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{对凸齿: } K = \frac{\pi}{2} + \frac{2C_a' - \pi(N-1)}{Z} \\ \text{对凹齿: } K = \frac{\pi}{2} - \frac{2C_f' + N\pi}{Z} \end{array} \right\} \quad (7)$$

上式中 C_a' 、 C_f' 和 x 分别为圆弧齿轮齿廓曲率半径中心 I_a 、 I_f 的偏移量和移距量系数。 x 系数对凸齿和凹齿应分别以 x_a' 、 x_f' 代之。根据“统一通用齿型”及“67型”将 ρ_a' 、 C_a' 、 x_a' 、 ρ_f' 、 C_f' 、 x_f' 等系数列于表 1。

表 1 圆弧齿轮有关参数表

齿 型	α_n°	凸 齿 ($m_n = 2 \sim 32$ 毫米)				凹 齿 ($m_n = 2 \sim 6$ 毫米)			
		ρ_a'	C_a'	x_a'	Δ	ρ_f'	C_f'	x_f'	Δ
统 一 通 用	24	1.3	0.6289	0.0163	0.08015				
67	30	1.5	0.529	0	0	1.65	0.6289	0.075	0.3

为便于查表计算，M 值系数表中的螺旋角是十进制角度。验算时齿轮的螺旋角也应换算成十进制角度。然后按插值法确定 M 值系数，最后代入公法线长度计算公式 (1)，便可解得该齿轮的公法线长度 L_n 。

这里要引起注意的是：对不按表 1 系数选取的圆弧齿轮，其公法线长度应按原式计算；对“67型”凹齿，模数 $m_n \geq 7$ 毫米的公法线长度也应按原式计算。计算时， ρ_f' 、 C_f' 及 x_f' 系数可按表 2 选取或按下式计算：

$$\left. \begin{array}{l} \rho_f' = 1.55 + \frac{0.6}{m_n} \\ C_f' = 0.5523 + \frac{0.5196}{m_n} \\ x_f' = 0.025 + \frac{0.3}{m_n} \end{array} \right\} \quad (8)$$

表 2 当 $m_n = 7 \sim 30$ 毫米时“67型”凹齿系数表

系 数					系 数				
模 数	ρ_f'	C_f'	x_f'	Δ	模 数	ρ_f'	C_f'	x_f'	Δ
7	1.63571	0.62653	0.06786	0.27144	19	1.58158	0.57965	0.04079	0.16316
8	2500	1725	250	0.25000	20	8000	7828	000	0.16000
9	1667	1003	0.05833	0.23333	21	7857	7704	0.03929	0.15716
10	1000	0426	500	0.22000	22	7727	7592	864	0.15456
11	0454	0.59954	227	0.20908	23	7609	7489	804	0.15216
12	0000	9560	000	0.20000	24	7500	7395	750	0.15000
13	1.59615	9227	0.04808	0.19232	25	7400	7308	700	0.14800
14	9286	8941	643	0.18572	26	7308	7228	654	0.14616
15	9000	8694	500	0.18000	27	7222	7154	611	0.14444
16	8750	8478	375	0.17500	28	7143	7086	571	0.14284
17	8529	8286	265	0.17060	29	7069	7022	534	0.14136
18	8333	8117	167	0.16668	30	7000	6962	500	0.14000

至于对“统一通用齿型”凹齿的公法线长度，可以按原式(4)确定M值后代入(1)求出。
 ρ_f' 、 C_f' 、 x_f' 系数按模数可由表3确定。

表3 统一通用齿型(凹齿)系数表

模数	系数				模数	系数			
	ρ_f'	C_f'	x_f'	Δ		ρ_f'	C_f'	x_f'	Δ
2~3	1.42	0.7086	0.0325	0.15981	10~16	1.38	0.6820	0.0163	0.08015
3~6	1.41	0.6994	0.0285	0.14014	16~32	1.36	0.6638	0.0081	0.03983
6~10	1.395	0.6957	0.0224	0.110145					

另外应注意：对不同的卡量齿数，不宜按插值法，应按原式计算确定M值系数。

按原式计算时，其精度仍应满足判别式 $\Delta K \leq |5 \times 10^{-7}|$ 之要求； Q_a 角的初始值，按经验对凸齿和凹齿分别确定：

对凸齿： $Q_1 = K + 0.025$

对凹齿： $Q_1 = K + 0.16$

三、公法线长度剩余量 ΔL 与切深 Δh 的关系式

切齿时，若测出的公法线长度与理论值相差 ΔL ，则其切齿深度 Δh 可以按渐开线齿轮的切齿深度确定：

$$\Delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_x} \quad (9)$$

式中 α_x 为测量点的法向压力角。对渐开线齿轮 $\alpha_x = \alpha_n$ ，但对圆弧齿轮 $\alpha_x \neq \alpha_n$ 。圆弧齿轮测量点压力角是随着卡量齿数N的变化而变化的。目前一般计算方法是：根据一定的卡量齿数，列出在不同公法线长度剩余量 ΔL 所需的切深 Δh ，那么加工一对齿轮事先应准备好不同公法线长度和其相应的切齿深度表，以便加工时参照使用。这样计算工作量较大，既要计算公称的理论公法线长度，又要计算在不同切深的公法线长度。

由图3、图4可以导出圆弧齿轮凸齿和凹齿公法线长度的通用计算公式：

$$\left. \begin{aligned} \text{对凸齿: } [L_n] &= m_n \left[Z \sin \frac{Q}{2} + 2 \left(\rho_a' + \frac{x_a'}{\sin \alpha_n} \right) - \Delta M \right] \\ \text{对凹齿: } [L_n] &= m_n \left[Z \sin \frac{Q}{2} - 2 \left(\rho_f' - \frac{x_f'}{\sin \alpha_n} \right) - \Delta M \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

修正值 ΔM 很小，为消除其误差，可令(1)式 $L_n = [L_n]$ ，故由(10)式便可导出测量点处精确的压力角 α_x ：

对凸齿:

$$\sin \alpha_x = \sin \frac{Q}{2} = \frac{1}{Z_\phi} \left[\frac{L_n}{m_n} - 2 \left(\rho_a' + \frac{x_a'}{\sin \alpha_n} \right) \right] = \frac{1}{Z_\phi} (M - \Delta)$$

式中 $\Delta = \frac{2x_a'}{\sin \alpha_n}$ (常数值)

对凹齿:

$$\sin \alpha_x = \sin \frac{Q}{2} = \frac{1}{Z_\phi} \left[\frac{L_n}{m_n} + 2 \left(\rho_f' - \frac{x_f'}{\sin \alpha_n} \right) \right] = \frac{1}{Z_\phi} (M - \Delta)$$

式中 $\Delta = \frac{2x_f'}{\sin \alpha_n}$ (常数值)

(11)

根据(11)式, 对圆弧齿轮凸齿和凹齿公法线长度两测量点处压力角函数的通用计算式, 最终可归并为统一计算式:

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} (M - \Delta) \quad (11a)$$

(11a)式中 Δ 常数值, 可分别根据“齿型”、齿廓的凸、凹齿分别由表 1、表 2 和表 3 选取。

在特殊情况下, 当设计或制造时需要的卡量齿数比按 (3) 式确定的 N 少 1~3 齿时, 则 M' 值系数及其公法线长度 L_n' , 应分别按 (4) 式及 (1) 式进行计算, 其相应的测量点处的压力角可按下式确定:

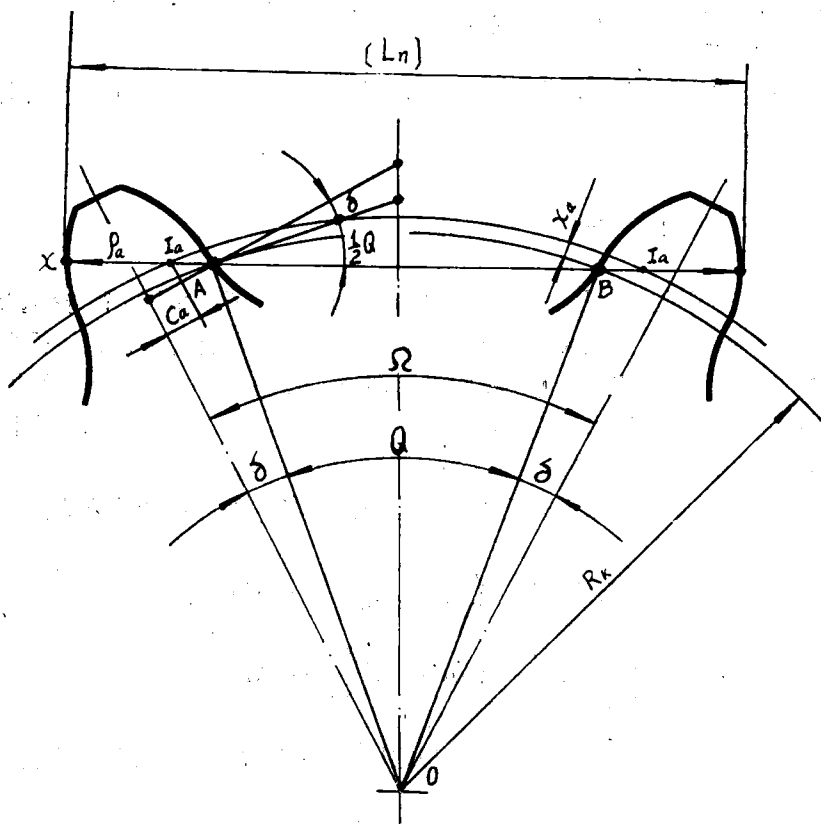


图 3 圆弧齿轮法平面公法线长度(凸齿)

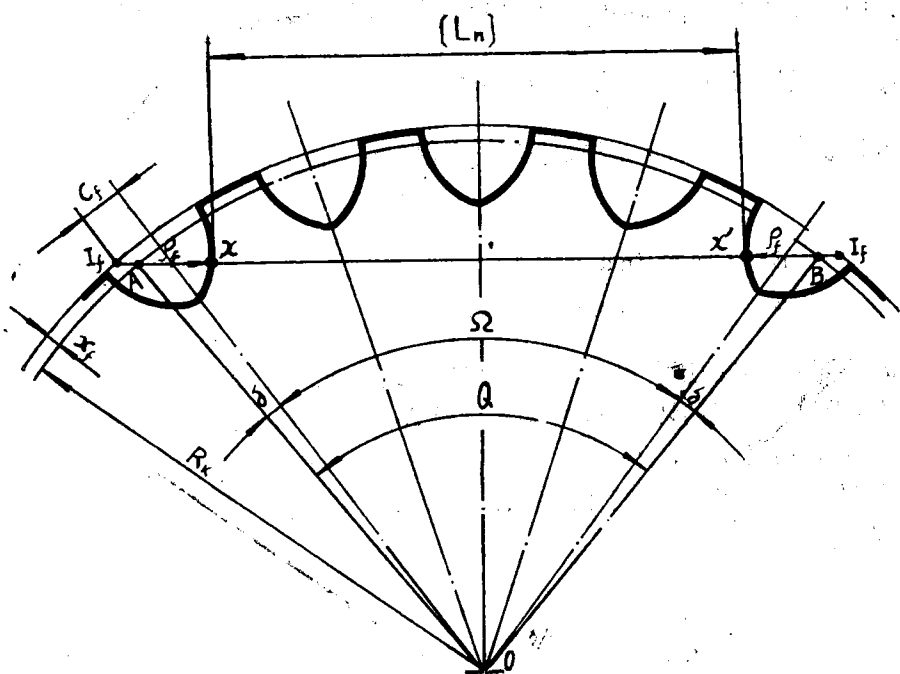


图 4 圆弧齿轮法平面公法线长度(凹齿)

对“统一通用齿型”(凸齿):

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} \left(\frac{L_n'}{m_n} - 2.6801501 \right)$$

或
$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} (M' - 0.080150142)$$

对“67型”凸齿和凹齿分别为:

对凸齿:

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} \left(\frac{L_n'}{m_n} - 3 \right) \quad (12)$$

或
$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} M'$$

对凹齿:

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} \left(\frac{L_n'}{m_n} + 3 \right)$$

或
$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} (M' - 0.3)$$

根据(11)、(11a)、和(12)式计算得的 $\sin \alpha_x$ 函数值代入(9)式后, 便解得该齿轮公法线长度剩余量 ΔL 的相应的切深 Δh 值。

四、圆弧齿轮公法线长度公差与切齿深度公差的关系式

圆弧齿轮的切齿深度 Δh 与公法线长度剩余量 ΔL 的关系式可由(9)式确定。

同理，圆弧齿轮公法线长度 L_n 其公差与切深的公差也可以按(9)式进行换算。圆弧齿轮公法线长度的极限偏差其表示法为： $L_n^{+E_{ws}}_{-E_{wi}}$ 。

上述中 E_{ws} 、 E_{wi} 分别表示公法线长度的上偏差和下偏差。 E_{ws} 、 E_{wi} 值分别可由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} E_{ws} &= 2A_{hs} \cdot \sin \alpha_x \\ E_{wi} &= 2A_{hi} \cdot \sin \alpha_x \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

式中 α_x 为测量点处的压力角，其值可由(11)a式确定。

A_{hs} 、 A_{hi} 分别为圆弧的切深公差。对单圆弧 $A_{hs}=A_{hi}$ ，其值可由表 4 选取；对双圆弧 $A_{hs} \neq A_{hi}$ ，其值可由表 5 选取。

若圆弧齿轮公法线长度上、下偏差 E_{ws} 、 E_{wi} 为已知时，则可按(13)式确定相应的切深偏差 A_{hs} 、 A_{hi} 值：

$$\left. \begin{aligned} A_{hs} &= \frac{E_{ws}}{2 \sin \alpha_x} \\ A_{hi} &= \frac{E_{wi}}{2 \sin \alpha_x} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

表 4 单圆弧切齿深度偏差

精度等级	极限偏差代号	法面模数 m_n (mm)	齿 轮 直 径									
			<50	50~80	80~120	120~200	200~320	320~500	500~800	800~1250	1250~2000	2000~3000
			μm									
5 ~ 6	A_{hs}	2~3	±16	±18	±19	±21	±24	±27	±30	—	—	—
		3~6	±20	±21	±23	±25	±27	±30	±34	±38	±42	±45
	A_{hi}	6~10	—	±25	±27	±30	±32	±34	±37	±41	±45	±49
7 ~ 8	A_{hs}	2~3	±20	±22	±24	±27	±30	±32	—	—	—	—
		3~6	±25	±26	±28	±30	±34	±36	±40	±45	±50	—
		6~10	—	±32	±34	±36	±40	±42	±45	±50	±55	±63
	A_{hi}	10~16	—	—	±42	±46	±48	±50	±55	±60	±65	±75
		16~30	—	—	—	±67	±72	±75	±75	±82	±90	±90
9	A_{hs}	3~6	±30	±33	±36	±39	±42	±45	±50	±56	—	—
		6~10	—	±39	±42	±45	±49	±53	±58	±63	±70	±78
	A_{hi}	10~16	—	—	±53	±57	±60	±64	±70	±75	±82	±90
		16~30	—	—	—	±82	±86	±90	±97	±105	±112	±120

表5 双圆弧切齿深度偏差

精度等级	极限偏差代号	法面模数 m_n (mm)	齿 轮 直 径 (mm)												
			<50	50~80	80~125	125~200	200~320	320~400	400~500	500~630	630~800	800~1000	1000~1250	1250~1600	1600~2000
			μm												
7	Ahs	2~2.5	0 25	0 20	15 15	20 10	25 5	25 0	•	—	—	—	—	—	—
		2.5~3.15	5 30	5 25	10 25	20 20	25 10	30 0	30 0	•	—	—	—	—	—
		3.15~4	10 36	10 30	15 30	15 25	30 15	36 5	40 0	40 0	•	—	—	—	—
		4~5	20 45	20 40	15 40	15 36	15 25	20 15	50 10	60 0	•	—	—	—	—
		5~6.3	—	30 50	25 50	25 45	25 36	30 25	25 20	36 10	70 0	•	—	—	—
		6.3~8	—	36 60	36 55	36 50	30 45	30 36	40 25	30 20	45 5	30 0	•	—	—
	Ahi	8~10	—	—	55 70	55 65	50 60	50 50	50 50	45 40	65 20	50 10	60 0	•	—
		10~12.5	—	—	65 80	65 75	60 70	60 60	65 55	55 50	65 40	60 20	70 10	55 0	65 0
		12.5~16	—	—	—	70 90	70 80	70 70	80 60	75 50	85 40	70 30	80 20	65 10	75 0
		2~2.5	13 36	10 30	10 25	10 20	30 15	36 5	40 0	—	—	—	—	—	—
		2.5~3.15	20 45	20 40	20 36	20 30	15 25	45 15	50 10	50 0	—	—	—	—	—
		3.15~4	25 50	25 45	25 40	25 36	20 30	20 20	25 15	55 5	65 0	—	—	—	—
8	Ahs	4~5	40 65	40 60	40 55	40 50	36 45	36 36	40 30	36 20	45 10	30 0	—	—	—
		5~6.3	—	55 75	55 70	55 65	50 60	50 50	60 40	50 36	65 25	45 15	55 5	—	—
		6.3~8	—	65 85	65 80	65 75	60 70	60 60	65 55	65 40	75 30	60 20	70 10	55 0	—
	Ahi	8~10	—	—	85 100	85 95	80 90	80 80	90 70	85 60	95 50	80 40	90 30	75 20	85 10
		10~12.5	—	—	95 110	100 100	90 100	90 90	100 80	95 70	105 60	90 50	100 40	85 30	95 20
		12.5~16	—	—	—	120 120	110 120	110 110	120 100	110 90	125 80	110 70	120 60	110 50	110 40

• 在这种情况下，必须用测量安装啮合中心距的办法来规定切削深度；或者根据齿顶圆的实际直径来规定切削深度。

五、计算举例

为便于掌握圆弧齿轮公法线长度查表及切深的计算，兹举出具有代表性的例子，供大家参照使用。

(一) “统一通用齿型”双圆弧齿轮公法线长度及切深查表算法

【例1】 已知： $m_n = 5$ ， $\alpha_n = 24^\circ$ ， $Z_1 = 28$ ， $Z_2 = 100$ ，

$\beta = 23^\circ 53' 43.8'' = 23.89549999^\circ$ ， $\rho_a' = 1.3$ 。

求: L_n 、 N 、 $\sin \alpha_x$ 及切深 Δh 值。

解: 由表查得:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } Z_1 = 28, N_1 = 6 \\ \beta = 23.8 \rightarrow M_{\text{表}} = 14.075752 \\ \beta = 23.9 \rightarrow M_{\text{表}} = 14.077430 \\ \text{当 } Z_2 = 100, N_2 = 18 \\ \beta = 23.8 \rightarrow M_{\text{表}} = 50.734238 \\ \beta = 23.9 \rightarrow M_{\text{表}} = 50.740463 \end{array} \right\}$$

然后按插值法分别解出 M_1 和 M_2 值统数, 有

$$M_1 = \frac{14.077430 - 14.075752}{10} \times 9.549999 + 14.075752 = 14.077354$$

$$M_2 = \frac{50.740463 - 50.734238}{10} \times 9.549999 + 50.734238 = 50.740182$$

$$L_{n1} = m_n(M_1 + 2\rho_a') = 5(14.077354 + 2.6) = 83.38677$$

$$L_{n2} = m_n(M_2 + 2\rho_a') = 5(50.740182 + 2.6) = 266.70091$$

切齿深度的计算:

$$\sin \alpha_{x1} = \frac{1}{Z_{\phi}}(M_1 - 0.080150142)$$

$$= \frac{1}{36.0556059}(14.077354 - 0.080150142) = 0.3882115$$

$$\sin \alpha_{x2} = \frac{1}{Z_{\phi}}(M_2 - 0.080150142) = \frac{1}{128.770021}(50.740182 - 0.08150142) = 0.3934147$$

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x1}} = 1.2879577 \Delta L$$

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x2}} = 1.2709235 \Delta L$$

(二)“67型”单圆弧齿轮公法线长度及切深查表计算法

【例1】已知: $m_n = 4$, $\alpha_n = 30^\circ$, $Z_1 = 34$ (凸), $Z_2 = 147$ (凹),

$$\beta = 25^\circ 10' 36'' = 25.17666667^\circ, \rho_a' = 1.5, \rho_f' = 1.65$$

求: L_n 、 N 、 $\sin \alpha_x$ 及切深 Δh 。

解: 由表查得:

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } Z_1 = 34(\text{凸}), N_1 = 8 \\ \beta = 25.1 \rightarrow M_{\text{表}} = 20.170181 \\ \beta = 25.2 \rightarrow M_{\text{表}} = 20.17360 \\ \text{当 } Z_2 = 147(\text{凹}), N_2 = 31 \\ \beta = 25.1 \rightarrow M_{\text{表}} = 94.414413 \\ \beta = 25.2 \rightarrow M_{\text{表}} = 94.433777 \end{array} \right\}$$

然后按插值法分别解出 M_1 和 M_2 值系数, 有

$$M_1 = \frac{20.17360 - 20.170181}{10} \times 7.666667 + 20.170181 = 20.172802$$

$$M_2 = \frac{94.433777 - 94.414413}{10} \times 7.666667 + 94.414413 = 94.429258$$

$$L_{n1} = m_n(M_1 + 2\rho_a') = 4(20.172802 + 3) = 92.691209$$

$$L_{n2} = m_n(M_2 - 2\rho_f') = 4(94.429258 - 3.3) = 364.51703$$

切齿深度的计算:

$$\sin \alpha_{x1} = \frac{1}{Z_\phi} (M_1 - 0) = \frac{1}{44.65364039} (20.172802 - 0) = 0.4517624$$

$$\sin \alpha_{x2} = \frac{1}{Z_\phi} (M_2 - 0.3) = \frac{1}{193.0613276} (94.429259 - 0.3) = 0.4875614$$

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x1}} = 1.1067764 \Delta L$$

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x2}} = 1.0255118 \Delta L$$

(三) 按原式计算法

【例1】双圆弧齿轮 α_n 、 ρ_a' 、 x_a' 等参数均不按表 1 选取的非标准齿型。

已知: $m_n = 8$, $\alpha_n = 20^\circ$, $Z_1 = 8$, $Z_2 = 26$, $\beta = 24^\circ 57' 4.7''$,

$$\rho_a' = 1.1, C_a' = 0.4333, x_a' = 0.022$$

求: L_n 、 N 及 $\sin \alpha_x$ 并列 Δh 与 ΔL 的关系式

解: 按(2)、(3)式分别解出 $N_1 = 2$, $Z_{\phi 1} = 10.60026403$, $N_2 = 5$, $Z_{\phi 2} = 34.4508511$, 再按(4)、(5)、(6)式解出 Q_n 及 M 值后, 将其代入(1)式便得 L_n 。其计算步骤:

先作预算: $\lg^2 \beta = 0.216479327$

$$1/\cos \beta = 1.102941221$$

当 $N_1 = 2$ 时

$$1) \quad \frac{2}{Z_1} x_a' \frac{1}{\cos \beta} = 0.0060661767$$

$$2) \quad K_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2C_a' - \pi(N_1 - 1)}{Z_1} = 1.286422246$$

$$3) \quad \text{确定 } Q_n \text{——按(5)、(6)迭代, 直到满足判别式 } \Delta K \leq |5 \times 10^{-7}| \text{ 为止。}$$

初设: $Q_1 = K_1 + 0.025 = 1.31$,

$$Q_2 = 1.36308437$$

$$Q_3 = 1.358888906$$

$$Q_4 = 1.359131569$$

$$Q_5 = 1.359116994$$

$$Q_6 = 1.359117868$$

$$Q_7 = 1.359117815$$

$$\Delta K = |3 \times 10^{-7}|$$

于是取 $Q_{a1} = Q_7 = 1.359117815$ 代入(4)式解出 M_1 代入(1)求出 L_{a1} ;

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(Z_1 \frac{\cos Q_{a1}}{\cos \beta} + \frac{2x_{a1}'}{\cos Q_{a1}} \right) \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta \cdot \sin Q_{a1})^2} \\ &= (1.853834544 + 0.20942284) \times 1.098600647 = 2.266695903 \\ L_{a1} &= m_n(M_1 + 2\rho_a') = 8(2.266695903 + 2.2) = 35.73356722 \end{aligned}$$

切深的计算:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{x1} &= \frac{1}{Z_{\phi 1}} \left(M_1 - \frac{2x_{a1}'}{\sin \alpha_a} \right) = \frac{1}{10.60026403} \left(2.266695903 - \frac{2 \times 0.022}{\sin 20^\circ} \right) \\ &= 0.2016976 \end{aligned}$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x1}} = 2.4789561 \Delta L$$

当 $N_2 = 5$ 时, 同样按上述步骤求解:

- 1) $\frac{2}{Z_2} x_a \frac{1}{\cos \beta} = 0.0018665159$
- 2) $K_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2C_a' - \pi(N_2 - 1)}{Z_2} = 1.12080515$
- 3) 验算 Q_{a2}

初设: $Q_1 = K_2 + 0.025 \approx 1.146$

$$Q_2 = 1.206220756$$

$$Q_3 = 1.197809023$$

$$Q_4 = 1.199036059$$

$$Q_5 = 1.198858086$$

$$Q_6 = 1.198883925$$

$$Q_7 = 1.198880173$$

$$Q_8 = 1.198880721$$

$$Q_9 = 1.198880641$$

$$\Delta K = 1.2 \times 10^{-8}$$

取 $Q_{a2} = Q_9 = 1.198880641$, 代入(4)式解出 M_2 代入

(1) 式求出 L_{a2}

$$\begin{aligned} M_2 &= \left(Z_2 \cdot \frac{\cos Q_{a2}}{\cos \beta} + \frac{2x_{a2}'}{\cos Q_{a2}} \right) \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta \cdot \sin Q_{a2})^2} \\ &= (10.42105305 + 0.121078431) \times 1.089904138 = 11.48991271 \\ L_{a2} &= m_n(M_2 + 2\rho_a') = 8(11.48991271 + 2.2) = 109.5193017 \end{aligned}$$

确定切深 Δh :

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{x2} &= \frac{1}{Z_{\phi 2}} \left(M_2 - \frac{2x_{a2}'}{\sin \alpha_a} \right) = \frac{1}{34.4508511} \left(11.48991271 - \frac{2 \times 0.22}{\sin 20^\circ} \right) \\ &= 0.3297817 \end{aligned}$$

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{x2}} = 1.5161544 \Delta L$$

【例2】 单圆弧齿轮计算例子(“67型”)——当 $m_n \geq 7$ 毫米时标准齿型

已知: $m_n = 9$, $\alpha_n = 30^\circ$, $Z_1 = 34$ (凸), $Z_2 = 147$ (凹), $\beta = 25^\circ 10' 36''$, $\rho_a' = 1.5$,

$C_a' = 0.529$, $x_a' = 0$, $\rho_f' = 1.6166667$, $C_f' = 0.6100333$, $x_f' = 0.058333$

求: L_n 、 N 及 $\sin \alpha_x$ 并列 Δh 与 ΔL 的关系式

解: 对 $Z_1 = 34$ (凸齿), 因 α_x 角和 ρ_a' 、 C_a' 、 x_a' 等参数均与表 1 相符, 故 L_{n1} 可按查表法计算:

$$L_{n1} = m_n(M_1 + 2\rho_a') = 9(20.17286333 + 3) = 208.55577$$

$$N_1 = 8$$

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_{\phi 1}}(M - 0) = \frac{1}{44.65364039}(20.17286333 + 0) = 0.451763$$

$$\Delta h_1 = 1.106775 \Delta L$$

对 $Z_2 = 147$ (凹), 因 $m_n \geq 7$ 毫米, ρ_f' 、 C_f' 及 x_f' 等系数均与表 1 不符, 故须按原式计算, 其步骤:

$$1) \quad Z_{\phi 2} = 193.0613276$$

$$2) \quad N_2 = \frac{\alpha_n}{180^\circ} \cdot Z_{\phi 2} - 1 = 31.18 \text{ 取 } N = 31$$

$$3) \quad K_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2C_f' + N_2\pi}{Z_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \times 0.610033 + 31\pi}{147} = 0.899983818$$

$$4) \quad \tan^2 \beta = 0.2209629, \quad 1/\cos \beta = 1.1049719123$$

$$5) \quad \frac{2}{Z_2} x_f' \frac{1}{\cos \beta} = \frac{2}{147} \times 0.0583333 \times 1.104971923 = 0.0002176543$$

6) 计算 Q_{n2} 值

$$\text{初设 } Q_1 = K_2 + 0.16 \approx 1.06$$

$$Q_2 = 0.9946061$$

$$Q_3 = 1.001269434$$

$$Q_4 = 1.000667189$$

$$Q_5 = 1.00072235$$

$$Q_6 = 1.000717304$$

$$Q_7 = 1.000717666$$

$$\Delta K = 6.688 \times 10^{-8}$$

$$\text{取 } Q_{n2} = Q_7 = 1.000717666$$

7) 确定 M_2 值

$$M_2 = \left(Z_2 \frac{\cos Q_{n2}}{\cos \beta} + \frac{2x_f'}{\cos Q_{n2}} \right) \sqrt{1 + (\tan \beta \cdot \sin Q_{n2})^2}$$

$$= (87.66366101 - 0.216170045) \times 1.07545437 = 94.51074834$$

$$L_{n2} = m_n(M_2 - 2\rho_f') = 9(94.51074834 - 2 \times 1.6166667)$$

$$= 821.4967345$$

$$\sin \alpha_{x_2} = \frac{1}{Z_{\phi_2}} (M_2 - \Delta) = \frac{1}{193.0613276} (94.51074834 - 0.23333)$$

$$= 0.4883289$$

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_{n_2}} = 1.0239 \Delta L$$

【例3】“统一通用齿型”凹齿公法线长度及切深的计算

已知: $m_n = 8$, $Z = 20$, $\alpha_n = 24^\circ$, $\beta = 24^\circ 57' 4.7''$,
 $\rho_f' = 1.395$, $C_f' = 0.6957$, $x_f' = 0.0224$

其计算程序是:

1) $Z_\phi = 26.366129$

2) $N = 3$

3) $K = \frac{\pi}{2} - \frac{2C_f' + N\pi}{Z} = 1.029987429$

4) $\frac{1}{2} \tan^2 \beta = 0.108239663$

5) $\frac{2}{Z} \cdot x_f' \cdot \frac{1}{\cos \beta} = 0.0024705883$

6) 确定 Q_n 角

$$Q_1 = K + 0.16 = 1.189987429$$

$$Q_2 = 1.110853938$$

$$Q_3 = 1.121082813$$

$$Q_4 = 1.119854154$$

$$Q_5 = 1.12000333$$

$$Q_6 = 1.119985241$$

$$Q_7 = 1.119987435$$

$$Q_8 = Q_n = 1.119987169$$

$$\Delta K = 3.19 \times 10^{-8}$$

7) 确定M值系数

$$M = \left(Z \cdot \frac{\cos Q_n}{\cos \beta} + \frac{2x_f'}{\cos Q_n} \right) \sqrt{1 + (\tan \beta \cdot \sin Q_n)^2}$$

$$= (9.610897307 + 0.10282446) \times 1.084151842 = 10.53114935$$

$$L_n = m_n (M - 2\rho_f') = 8(10.53114935 - 2 \times 1.395) = 61.92919472$$

8) 切齿深度 Δh

$$\sin \alpha_x = \frac{1}{Z_\phi} (M - \Delta) = \frac{1}{26.366129} (10.53114935 - 0.110145)$$

$$= 0.3952421$$

$$\Delta h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \alpha_x} = 1.2650474 \Delta L$$

六、公法线长度 M 值系数表格及其使用说明

根据“67型”及“统一通用齿型”的 M 值系数分别见附表 1、附表 2 及附表 3：

附表 1 “67型”凹齿 M 值系数表；

附表 2 “67型”凸齿 M 值系数表；

附表 3 “统一通用齿型” M 值系数表。

上述附表中 Z、 β 、N 分别表示齿轮的齿数、螺旋角及卡量齿数。表中 $Z=9\sim 200$ ， $\beta=5^\circ\sim 45^\circ$ 。

查表举例：

已知：齿型为“统一通用齿型”， $Z=22$ ， $\beta=44^\circ 45' 38''=44.76055556^\circ$ ，查表后按插值法确定 M 值系数：

$$M = \frac{23.155823 - 23.147704}{10} \times 6.055556 + 23.147704 = 23.152620$$

注：

1. 运算时原 M 值系数均取小数点后六位数，但因考虑篇幅量大，在保证其运算精度前提下，现印刷的表格中 M 值系数均取小数点后四位数，按最大模数 $m_n=32$ 其最大的差值不大于 0.0016 毫米；当模数 $m_n < 32$ 时其差值相应地变小。差值(δ)与模数(m_n)的关系式为：

$$\delta = \pm 0.00005 m_n$$

2. 以上的计算例题的 M 值系数，仍按六位数进行验算，不再修改。

参 考 资 料

- [1] “圆柱齿轮的公法线长度” 上海纺织工学院闻智福
- [2] “圆弧齿轮滚刀法面齿形标准” 一机部标准 JB929-67
- [3] “统一通用齿型双圆弧齿轮承载能力试验总结” 郑州机械科学研究所齿轮室圆弧齿轮组
- [4] “双圆弧齿轮基准齿形 JB2940-81”
- [5] “圆弧齿轮” 太原工学院齿轮研究室主编

目 录

原理与方法

一、前言	(1)
二、圆弧齿轮公法线长度查表算法及其参数的依据	(3)
三、公法线长度剩余量 ΔL 与切深 Δh 的关系式	(5)
四、圆弧齿轮公法线长度公差与切齿深度公差的关系式	(7)
五、计算举例	(9)
(一) “统 通用齿型”双圆弧齿轮公法线长度及切深查表算法	(9)
(二) “67 ”单圆弧公法线长度及切深的查表算法	(10)
(三) 按原式计算法	(11)
〔例1〕 双圆弧齿轮 α_n 、 ρ_a' 、 x_a' 等 参 数 均 不 按 表 1 选 取 的 非 标 准 齿 型	(11)
〔例2〕 单圆弧齿轮计算例子 (67型)——当 $m_n \geq 7$ 毫米时标准齿型	(13)
〔例3〕 “统一通用齿型”凹齿公法线长度及切深的计算	(14)
六、公法线长度M值系数表格及其使用说明	(封三)

附 表

附表 1: “67 型”凹齿 M 值系数表 1~216 页, (第 1 册)

附表 2: “67型”凸齿 M 值系数表, 217~432 页, (第 2 册)。

附表3: “统一通用齿型”M 值系数表, 433~648 页, (第 3 册)。