

提 要

本文把正交正放类平板型网架结构假设为构造上正交异性的夹层板，采用考虑剪切变形的具有三个广义位移的平板弯曲理论来分析。文中给出了这类网架结构拟板的基本方程式、弯曲刚度和剪切刚度的表达式以及由拟板内力换算成网架构件内力的一般计算公式。对于常用的周边简支网架，求得了基本方程式的单级数和重级数形式的解析解，并编制了内力、位移计算用表。与此同时，分析了考虑网架剪切变形、两向不等刚度和变刚度的影响，给出了简化计算的近似公式。文中附有计算例题，并与空间桁架位移法的精确电算作了对比，比较结果表明，采用本文的网架结构的拟板分析法算得的结果，具有一般工程要求的精度。本文的分析方法和计算用表也可适用于两向正交正放交叉梁系的计算。

本文的研究成果已被我国《网架结构设计施工规定》采用。

目 录

前 言	(2)
一、基本方程式的建立和刚度表达式	(2)
二、矩形平面周边简支网架基本方程式的求解	(7)
三、网架剪切变形、不等刚度和变刚度的影响及其近似计算方法 ...	(10)
四、由拟板内力求网架杆件内力的计算公式	(13)
五、算例	(17)
六、结论	(20)
参考文献	(20)
附录	(21)

张竹岭

附录《矩形平面周边简支网架基本方程式的求解》

Analysis of Space Truss of Orthogonal and Ortholaid Types as Equivalent (Sandwich) Plate

Dong Shilin Xia Hengxi

Abstract

In this paper the space truss of orthogonal and ortholaid types is assumed as orthotropic sandwich plate and is analysed by the theory of plate considering shear deformation and three generalized displacements. The differential equation, the expressions for bending stiffness and shear stiffness of such space truss, and the formulas for calculating internal forces of its members are given. The solutions expressed in double and simple trigonometric series are obtained, and design tables for calculating internal forces and displacements are worked out for space truss simply supported at its periphery. In addition, the influences of shear deformation and of unequal stiffness and variable stiffness in two directions are discussed and the simplified approximate formulas are given. The comparison of computed results obtained by this method with those of the matrix displacement method shows that analysis of space truss as equivalent sandwich plate exhibits sufficient accuracy for general engineering applications. The proposed method and design tables are also applicable for analysis of structural system with orthogonal beams.

The research results presented in this paper have been adopted by The Specifications for Design and Construction of Space Truss in China.

正交正放类网架结构的拟板

(夹层板) 分析法

董石麟

夏亨熹

(中国建筑科学研究院*)

(河北农业大学)

前 言

正交正放类平板型网架结构,是指由两个方向互相垂直、且分别与网架矩形平面边界轴线平行的上弦杆和下弦杆,以及连接上、下弦杆的腹杆(斜杆和竖杆)所组成的铰接空间桁架结构。由于上、下弦杆和腹杆的空间位置和连接方式的不同,这类网架的主要形式有三种:两向正交正放网架、正放四角锥网架和正放抽空四角锥网架(见表4.1~4.3的简图)。如从网架的组成成分来分,前者是由平面桁架系组成,后两者是由四角锥单元体组成。

网架结构一般都可作为空间铰接杆系,采用空间桁架位移法精确求解^{[1][2]},由于庞大的未知数,通常都得依赖于大、中型电子计算机才能进行计算。对于两向正交正放网架,也可近似作为交叉梁系用差分法来求解;对于正放四角锥网架,则可以弦杆内力和节点挠度为未知数,采用所谓网板法来计算^{[3][4]}。这些近似计算方法的未知数比空间桁架位移法的未知数要少好几倍,但组成线性代数方程组后,仍要采用电算才能求得结果。同时,这些近似计算方法,一般不易反映网架结构剪切变形和刚度变化的影响,这对计算结果会带来较大的误差。

本文把网架结构连续化为由三层不同性质材料组成的夹层板,采用可以考虑网架剪切变形的、具有三个广义位移的平板弯曲理论来分析^{[5][6][7]}。由于所研究的这一类网架结构,其上、下弦分别组成矩形或方形网格且与矩形平面的边界平行,因而,连续化后的拟板是正交异性的,所求得的基本微分方程式的阶数虽较高、是六阶的,但组成比较简单。如矩形平面的网架,周边简支,或两对边简支、另两对边为一般任意边界条件时,可以求得基本方程的解析解,并便于编制内力、位移计算用表。因此,采用本文的分析方法,网架结构的计算可以不用电子计算机运算,而由查用拟板的内力、位移系数表,再根据换算公式直接求得网架杆件内力和节点挠度。通过算例表明,所述方法的计算结果,与精确的空间桁架位移法的电算结果基本吻合。

一、基本方程式的建立和刚度表达式

把所研究的正交正放类网架结构的上、下弦分别假定为不计厚度的上层和下层,它们只能承受层内的平面力而不能承受横向剪力;把腹杆折算成厚度为网架高度 h 的夹心层,它只能承受横向剪力而不能承受平面力(如图1.1所示)。也就是说,上层和下层只有层内的平

* 樊晓红同志参加了本文的部分计算工作。

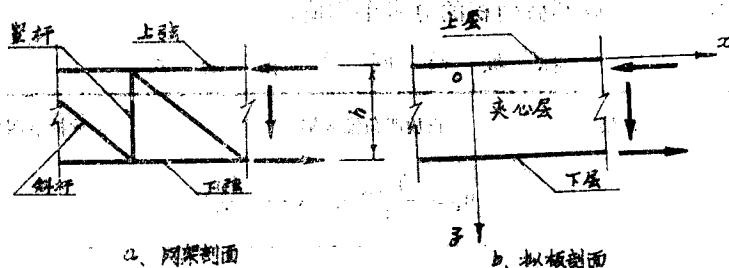


图1.1 计算图式模拟

面刚度而忽略横向剪切刚度；夹心层只有横向剪切刚度而忽略平面刚度。

由于两个方向上、下弦杆截面的任意性，一般情况下折算成的拟板便无结构对称面，即中面。因此，在建立基本方程式时，可选取上层板作为参考面。具有三个广义位移 w 、 ψ_x 、 ψ_y 的夹层板的弯曲理论，假定垂直板面的直线段在变形后仍为直线段，但不一定仍垂直于板面，而在 xz 、 yz 平面内分别转了一个角度 ψ_x 、 ψ_y [6]，则对于拟板的参考面 oxy 来说有下列几何关系：

$$\chi = \{\chi_x \chi_y\}^T = \left\{ -\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right\}^T \quad (1.1)$$

$$\gamma = \{\gamma_x \gamma_y\}^T = \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi_x, \frac{\partial \omega}{\partial y} - \psi_y \right\}^T \quad (1.2)$$

式中 χ 是广义应变，有似于板经典理论中的曲率，因本文不涉及扭曲率 χ_{xy} ，故把它省略了； γ 是横向剪切应变。

根据上面提到的直线段的假设，上层应变 ϵ 和下层应变 ϵ^b 还可建立关系式：

$$\epsilon^b = \epsilon + h\chi \quad (1.3)$$

式中

$$\epsilon = \{\epsilon_x \epsilon_y\}^T$$

$$\epsilon^b = \{\epsilon_x^b \epsilon_y^b\}^T$$

同样，因不涉及剪应变而把 ϵ_{xy} 省略了。

上、下层的物理方程可表达为：

$$N^a = B^a \epsilon \quad (1.4)$$

$$N^b = B^b \epsilon^b \quad (1.5)$$

式中 $N^a = \{N_x^a N_y^a\}^T$ 、 $N^b = \{N_x^b N_y^b\}^T$ 。由于上、下弦杆只能承受轴向力，故对正交正放类网架结构，拟板的内力阵 N^a 、 N^b 中不存在剪力 N_{xy}^a 、 N_{xy}^b 。 B^a 、 B^b 为拟板上、下层的平面刚度矩阵，显然应有 ($B_{12} = B_{13} = B_{23} = B_{33} = 0$ 、 $B_{11} = B_x$ 、 $B_{22} = B_y$)：

$$B^a = \begin{bmatrix} B_x^a & 0 \\ 0 & B_y^a \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$B^b = \begin{bmatrix} B_x^b & 0 \\ 0 & B_y^b \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

式 (1.6)、(1.7) 中的刚度系数 B_x^a 、 B_y^a 、 B_x^b 、 B_y^b 可根据上、下弦杆的截面积 A_{11} 、 A_{22} 、 A_{11}^b 、 A_{22}^b 和间距 S 、网架材料的弹性模量 E ，由表 1.1 的表达式确定。当网架各类杆

件截面积不等时，可分别取其截面积的算术平均值。

拟板的刚度表达式

表1.1

形式	两向正交正放网架	正放四角锥网架	正放抽空四角锥网架
刚度			
上层平面刚度	$B_x^a = \frac{EA_{ax}}{S}, B_y^a = \frac{EA_{ay}}{S}$		
下层平面刚度	$B_x^b = \frac{EA_{bx}}{S}, B_y^b = \frac{EA_{by}}{S}$		$B_x^b = \frac{EA_{bx}}{2S}$ $B_y^b = \frac{EA_{by}}{2S}$
弯曲刚度	$D_x = \frac{B_x^a B_x^b}{B_x^a + B_x^b} h^2, D_y = \frac{B_y^a B_y^b}{B_y^a + B_y^b} h^2$		
剪切刚度	$C_x = \frac{EA_{ax} A_4 \sin^2 \beta \cos \beta}{(A_{ax} \sin^2 \beta + A_4) S}$ $C_y = \frac{EA_{ay} A_4 \sin^2 \beta \cos \beta}{(A_{ay} \sin^2 \beta + A_4) S}$	$C_x = C_y = \frac{\sqrt{2} EA_{ax} \sin^2 \beta \cos \beta}{S}$	$C_x = C_y = \frac{3\sqrt{2} EA_{ax} \sin^2 \beta \cos \beta}{4 S}$

夹心层的物理方程为：

$$Q = C\gamma \quad (1.8)$$

式中 $Q = \{Q_x, Q_y\}^T$ 为夹心层的横剪力，也是拟板的横剪力， C 为夹心层的剪切刚度矩阵。对于所讨论的网架，应有 ($C_{12} = 0, C_{11} = C_x, C_{22} = C_y$)：

$$C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_y \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

其中 C_x, C_y 可根据腹杆的设置方式和截面积确定。

兹以两向正交正放网架为例，在 X 方向取出一单元平面桁架，当在一对单位横向力作用下，相邻两下弦节点的相对竖向位移 Δ_{11} 可由下列表达式求得（见图1.2）：

$$\Delta_{11} = \delta_d + \frac{\delta_c}{\sin \beta} = S \left(\frac{\tan \beta}{EA_d} + \frac{1}{EA_{ax} \sin^2 \beta \cos \beta} \right) \quad (1.10)$$

对于一块大小为 S 见方的正交异性夹心层，在相应的一对单位横向力作用下，其相对竖向位移 $\bar{\Delta}_{11}$ 为：

$$\bar{\Delta}_{11} = \frac{S}{C_x S} = \frac{1}{C_x} \quad (1.11)$$

由 $\Delta_{11} = \bar{\Delta}_{11}$ 即可求得：

$$C_x = \frac{EA_{ax} A_4 \sin^2 \beta \cos \beta}{(A_{ax} \sin^2 \beta + A_4) S} \quad (1.12)$$

同理可求得另一方向的剪切刚度 C_y （见表1.1）。

对于没有竖杆的正放四角锥网架，其剪切刚度只要在式 (1.10)、(1.12) 中令 $\delta_d = 0$ ，即 $A_d = \infty$ ，并以斜杆的间距 $S/\sqrt{2}$ 代替 S ，斜杆的截面积 A ，代替 A_{ax} ，再通过转轴后即可求得（见表1.1）。对于正放抽空四角锥网架，当网架尺寸无限增加时其斜杆的总数正好是相应正放四角锥网架斜杆总数的3/4。显然，从能量观点来看，这两种网架的剪切刚度

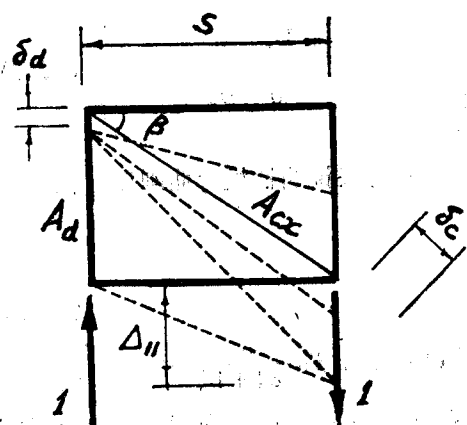


图1.2 剪切刚度计算示意图

之比,也必然等于3/4(见表1.1)。

有了几何方程和物理方程后,下面来建立对参考面的平衡方程。上、下层的平面内力 N^a , N^b 对参考面来说,可合成为整块板的平面内力 N 和弯矩 M :

$$\left. \begin{aligned} N &= N^a + N^b = \{N_x \ N_y\}^T \\ M &= hN^b = \{M_x \ M_y\}^T \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

将式 (1.3)、(1.4)、(1.5) 代入后可得:

$$\left. \begin{aligned} N &= B\varepsilon + hB^b\chi \\ M &= hB^b\varepsilon + h^2B^b\chi \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

或者以 N 和 χ 来表示 ε 和 M :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= B^{-1}N - hB^{-1}B^b\chi \\ M &= hB^bB^{-1}N + h^2(B^b - B^bB^{-1}B^b)\chi \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

式中 $B = B^a + B^b$, B^{-1} 为 B 的逆矩阵。

由于没有平面剪力和扭矩,拟板的五个平衡方程式甚为简单,它们是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x - m_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - m_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

式中 X 、 Y 、 m_x 、 m_y 、 q 为相应的广义荷载。如只讨论前四个广义荷载为零的情况,则 N_x 、 N_y 或为常数,或分别只为 y 及 x 的函数 $N_x^0(y)$ 及 $N_y^0(x)$, 研究网架的稳定性问题,便是这种情况。本文仅考虑平板型网架在竖向荷载作用下的弯曲问题,可令 $N_x^0(y) = N_y^0(x) = 0$, 即 $N = 0$, 则式 (1.15)、(1.3) 可简化为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -hB^{-1}B^b\chi \\ M &= h^2(B^b - B^bB^{-1}B^b)\chi = D\chi \end{aligned} \right\} \quad (1.15')$$

$$\varepsilon^b = -h(B^{-1}B^b - E)\chi \quad (1.3')$$

而由式 (1.4)、(1.5)、(1.13) 可得到

$$N^b = -N^a = \frac{M}{h} \quad (1.13')$$

式 (1.15') 中

$$\mathbf{D} = h^2 (\mathbf{B}^b - \mathbf{B}^b \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^b) = h^2 \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{B}_x^b \mathbf{B}_x^b}{\mathbf{B}_x^b + \mathbf{B}_x^b} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{B}_y^b \mathbf{B}_y^b}{\mathbf{B}_y^b + \mathbf{B}_y^b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_y \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$\mathbf{D}_x$ 、 $\mathbf{D}_y$ 则分别是在两个主轴方向对网架上、下弦截面重心来说的拟板弯曲刚度 (表1.1)。式 (1.3') 中 $\mathbf{E}$ 为单位矩阵。

此时, 距参考面 Z 处的应变 ϵ^z 为:

$$\epsilon^z = \epsilon + z\chi = (-h\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^b + z\mathbf{E})\chi \quad (1.18)$$

一般情况下, $\epsilon^z \neq 0$ 。只有当对角矩阵 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^b$ 中的系数相等时, 即 $\frac{\mathbf{B}_x^b}{\mathbf{B}_x^b + \mathbf{B}_x^b} = \frac{\mathbf{B}_y^b}{\mathbf{B}_y^b + \mathbf{B}_y^b}$, 也就是说上、下层在两个方向的平面刚度成比例时, 才有可能使 $\epsilon^z = 0$ 。这便是中面, 所在处为 $z = \frac{\mathbf{B}_x^b}{\mathbf{B}_x^b + \mathbf{B}_x^b} h$ 。由于本文选取了上层为参考面, 故有否中面已是无关重要的了。

现在将式 (1.8) 及 (1.15') 的第二式代入平衡方程式 (1.16) 的后三式, 并注意用到三个广义位移表示应变 χ 、 γ 的式 (1.1)、(1.2), 经整理后可得:

$$\left. \begin{aligned} \left(\mathbf{D}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbf{C}_x \right) \psi_x + \mathbf{C}_x \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \left(\mathbf{D}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mathbf{C}_y \right) \psi_y + \mathbf{C}_y \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \mathbf{C}_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \mathbf{C}_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \left(\mathbf{C}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{C}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w &= q \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

因此, 正交正放类网架结构的拟板分析法归结为寻求三个广义位移 w 、 ψ_x 、 ψ_y 和四个广义内力 $\mathbf{M}_x$ 、 $\mathbf{M}_y$ 、 $\mathbf{Q}_x$ 、 $\mathbf{Q}_y$, 它们要满足三个平衡方程 (1.19) 和四个内力应变关系式 (1.8)、(1.15') 的第二式。

如令:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \sqrt{\mathbf{C}_x \mathbf{C}_y} & \mathbf{D} &= \sqrt{\mathbf{D}_x \mathbf{D}_y} \\ k_o &= \sqrt{\frac{\mathbf{C}_x}{\mathbf{C}_y}} & k_d &= \sqrt{\frac{\mathbf{C}_y}{\mathbf{C}_x}} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

并引进一个新的位移函数 ω , 它与 w 、 ψ_x 、 ψ_y 之间存在下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{k_o}{k_d} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \\ \psi_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{k_d}{k_o} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \omega \\ w &= \left(1 - \frac{k_d}{k_o} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(1 - \frac{k_o}{k_d} \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

则平衡方程 (1.19) 的第一、二两式可得到满足, 第三式转化为:

$$\left[k_d \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{k_d} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(k_d \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{k_d} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \omega = \frac{q}{\mathbf{D}} \quad (1.22)$$

这便是正交正放类网架结构考虑剪切变形的拟夹层板的基本方程式，它是一个六阶的偏微分方程式。当不计剪切变形时，即 $C = \infty$ ，则式 (1.21)、(1.22) 退化为经典平板理论中熟知的关系式和方程式：

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \quad (1.23)$$

$$\left(D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.24)$$

二、矩形平面周边简支网架基本方程式的求解

对于矩形平面周边简支网架 (图2.1)，其边界条件是：

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2}: \quad w = 0, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \quad \psi_y = 0 \\ y = \pm \frac{b}{2}: \quad w = 0, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0, \quad \psi_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

即对位移函数 w 来说的边界条件是 (第三个边界条件也可得到满足)：

$$\left. \begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2}: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = \pm \frac{b}{2}: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

因此，周边简支网架可采用重三角级数求解。在均布荷载 q 作用下，将 q 和 w 展成下列级数：

$$q = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{16q}{mn\pi^2} (-1)^{\frac{m+n-2}{4}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.3)$$

$$w = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (2.4)$$

代入基本方程 (1.22) 后可确定系数 A_{mn} ：

$$A_{mn} = (-1)^{\frac{m+n-2}{4}} \frac{16qa^4}{\pi^4 D \Delta_{mn}} \quad (2.5)$$

其中 $\Delta_{mn} = mn \left[(k_d + p^2 \lambda^2 n^2 k_s) m^4 + \right.$

$$\left. \left(\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_s} \right) n^4 \right] \quad (2.6)$$

$$p = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{D}{C}} \quad (2.7)$$

$$\lambda = \frac{a}{b}$$

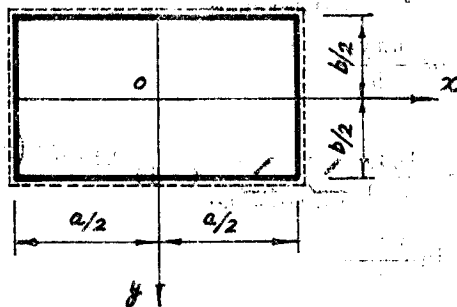


图 2.1 简支网架平面图

p 为表示网架剪切变形的一个无量纲参数，当不考虑剪切变形时，即 $C \rightarrow \infty$ ，则 $p \rightarrow 0$ 。 λ 为边长比。

将式 (2.5) 代入式 (2.4)，再由式 (1.21)、(1.15')、(1.8) 可得位移函数 w 、

三个广义位移和四个内力的表达式:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{16qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{1}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ w &= \frac{16qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\left(1+p^2 m^2 \frac{k_d}{k_c}\right) \left(1+p^2 \lambda^2 n^2 \frac{k_c}{k_d}\right)}{\Delta_{mn}} \\ &\quad \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \psi_x &= \frac{16qa^3}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\left(1+p^2 \lambda^2 n^2 \frac{k_c}{k_d}\right) m}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cos \frac{n\pi y}{b} \\ \psi_y &= \frac{16qa^3}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\left(1+p^2 m^2 \frac{k_d}{k_c}\right) \lambda n}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \sin \frac{n\pi y}{b} \\ M_x &= \frac{16qa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{(k_d + p^2 \lambda^2 n^2 k_c) m^2}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cos \frac{n\pi y}{b} \\ M_y &= \frac{16qa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\left(\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_c}\right) \lambda^2 n^2}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cos \frac{n\pi y}{b} \\ Q_x &= -\frac{16qa}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{(k_d + p^2 \lambda^2 n^2 k_c) m^3}{\Delta_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \cos \frac{n\pi y}{b} \\ Q_y &= -\frac{16qa}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{\left(\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_c}\right) \lambda^3 n^3}{\Delta_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

(2.8)

基本方程式 (1.22) 也可采用单三角级数求解。将 q 和 ω 展成为:

$$q = \sum_{m=1,3,\dots} \frac{4q}{m\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9)$$

$$\omega = \sum_{m=1,3,\dots} \omega_m = \sum_{m=1,3,\dots} F_m(y) (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.10)$$

代入式 (1.22) 后, 可知函数 $F_m(y)$ 应满足下列常微分方程式:

$$\left(\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e} \right) \frac{d^4 F_m(y)}{dy^4} - p^2 m^2 k_e \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 F_m(y)}{dy^2} + k_d \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 F_m(y) = \frac{4q}{m\pi D} \quad (2.11)$$

和边界条件

$$y = \pm \frac{b}{2}; \quad F_m(y) = 0, \quad \frac{dF_m(y)}{dy} = 0 \quad (2.12)$$

如果

$$\left(\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \right)^2 > \frac{4k_d}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \quad (2.13a)$$

求解方程式 (2.11) 后, 最终可得:

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 k_d D} \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^5} \left(\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta_m^2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_m y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda}} - \frac{\alpha_m^2 \operatorname{ch} \frac{\beta_m y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\beta_m}{2\lambda}} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.14a)$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} + \sqrt{\left(\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \right)^2 - \frac{4k_d}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}}}} \quad (2.15a)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} - \sqrt{\left(\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \right)^2 - \frac{4k_d}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}}}}$$

如果

$$\left(\frac{p^2 m^2 k_e}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \right)^2 < \frac{4k_d}{\frac{1}{k_d} + \frac{p^2 m^2}{k_e}} \quad (2.13b)$$

可求得解的最终表达式为:

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 k_d D} \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^5} \left(\frac{1}{2\alpha_m \beta_m} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_m}{2\lambda} \cos^2 \frac{\beta_m}{2\lambda} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_m}{2\lambda} \sin^2 \frac{\beta_m}{2\lambda} \right) \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{\alpha_m^2 - \beta_m^2}{2\lambda} \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \operatorname{sh} \frac{\beta_m}{2\lambda} + 2\alpha_m \beta_m \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \cos \frac{\beta_m}{2\lambda} \right] \operatorname{ch} \frac{\alpha_m y}{a} \cos \frac{\beta_m y}{a} \right)$$

$$- \left[(\alpha_m^2 - \beta_m^2) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \cos \frac{\beta_m}{2\lambda} + 2\alpha_m \beta_m \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \sin \frac{\beta_m}{2\lambda} \right] \operatorname{sh} \frac{\alpha_m y}{a} \sin \frac{\beta_m y}{a} \left. \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.14b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{p^2 m^2 k_c}{k_d + p^2 m^2} + \frac{4k_d}{k_d + p^2 m^2}} \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{p^2 m^2 k_c}{k_d + p^2 m^2} + \frac{4k_d}{k_d + p^2 m^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.14b)$$

又如果

$$\left(\frac{p^2 m^2 k_c}{k_d + p^2 m^2} \right)^2 = \frac{4k_d}{k_d + p^2 m^2} \quad (2.13c)$$

则位移函数 ω 的 ω_m 项为:

$$\omega_m = \frac{4qa^4}{\pi^4 k_d D} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^5} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda}} \left[\left(\frac{\alpha_m}{2\lambda} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{2\lambda} + 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \right) \cdot \operatorname{ch} \frac{\alpha_m y}{a} - \frac{\alpha_m y}{a} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{2\lambda} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m y}{a} \right] \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (2.14c)$$

其中

$$\alpha_m = m\pi \sqrt{\frac{k_d}{k_d + p^2 m^2}} \quad (2.15c)$$

求得方程式的解(2.14)后, 位移和内力的表达式也可相应列出, 因篇幅太大, 这里省略了。单三角级数解比重三角级数解的明显优点是收敛性较好, 可以解两对边简支另两对边为其它边界条件的网架结构。但对四边简支网架来说, 单三角级数解的表达式比较累赘, 而且随着所取级数项数的增加, 有可能在同一问题中, 前几项采用一种表达式, 如式(2.14)a, 后几项采用另一种表达式, 如(2.14)b, 无形中增加了计算工作的复杂性。因此, 本文在编制计算用表时, 采用了重三角级数解, 即使收敛性差一些, 还是比较方便的。

三、网架剪切变形、不等刚度和变刚度的影响及其近似计算方法

仍以四边简支网架为例来分析, 表达式(2.8)中包括了四个参数: λ , $k_d^* = D_x/D_y$, $k_z^* = C_x/C_y$, p , 即使对正放四角锥和正放抽空四角锥网架来说 $C_x/C_y = 1$, 也还有三个参数。因此, 如要编制图表, 篇幅相当可观。曾对常遇的参数范围 $\lambda = 1.0 \sim 1.4$, $D_x/D_y = 1.0 \sim 0.6$, $p = 0.0 \sim 0.5$, 间隔均取0.1, 共电算了 $5 \times 5 \times 6 = 150$ 种不同参数的网架结构。计算结果说明, 在所取参数范围内, 对网架内力和位移影响最大的是参数 λ , 其次是 D_x/D_y 和 p 。能否只根据参数 λ 来编制计算用表, 而其它参数对网架内力的影响采用近似的方法来计算, 是

本节所要研究讨论的问题。

先以 $\lambda=1.0$ 为例, 当 $D_x/D_y=1.0 \sim 0.6$ 、 $p=0$ 及 $D_x/D_y=1.0$ 、 $p=0.0 \sim 0.5$ 时 ($C_x/C_y=1.0$), 拟板的最大挠度 (跨中挠度) 和内力 (跨中弯矩 M_x 、 M_y , 边界中点的剪力 Q_x 、 Q_y), 与 $D_x/D_y=1.0$ 、 $p=0$ 时相应的最大挠度和内力之比值 η 详见表3.1。由此可见, η 值实际上是一个挠度或内力的修正系数。表3.1中精确值是指在表达式 (2.8) 中取 100 项级数所算得的结果, 近似值是指仅取一项级数所算得的结果, 即可由下列计算公式求得:

$$\left. \begin{aligned} \eta_w &= \frac{\alpha\beta(1+\lambda')}{\alpha+\beta\lambda'} \\ \eta_{M_x} &= \eta_{Q_x} = \frac{\alpha(1+\lambda')}{\alpha+\beta\lambda'} \\ \eta_{M_y} &= \eta_{Q_y} = \frac{\beta(1+\lambda')}{\alpha+\beta\lambda'} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= k_d + k_s \lambda^2 p^2 = \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \sqrt{\frac{C_x}{C_y}} \lambda^2 p^2 \\ \beta &= \frac{1}{k_d} + \frac{p^2}{k_s} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} + \sqrt{\frac{C_y}{C_x}} p^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

从表3.1可以看出, 近似值的误差一般都不超过5%, 个别的虽大于5%, 但也不超过

$\lambda=1.0$ 时不等刚度、剪切变形所致挠度、内力修正系数 表 3.1

$\frac{D_x}{D_y}$	p	η_w						η_{M_y}		η_{Q_x}		η_{Q_y}			
		精	近	精	近	精	近	精	近	精	近	精	近	精	近
1.0	0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9	0	0.999	0.999	1.000	0.999	0.999	1.000	1.056	1.053	0.997	0.982	0.947	0.985	1.038	1.053
0.8	0	0.994	0.994	1.000	0.992	0.989	1.007	1.117	1.111	0.995	0.920	0.889	0.946	1.080	1.111
0.7	0	0.984	0.984	1.000	0.913	0.824	1.013	1.186	1.176	0.992	0.872	0.824	0.944	1.127	1.176
0.6	0	0.967	0.968	1.001	0.735	0.750	1.020	1.263	1.250	0.990	0.819	0.750	0.916	1.180	1.250
1.0	0.1	1.009	1.010	1.001	0.999	1.000	1.001	0.999	1.000	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.2	1.036	1.040	1.004	0.998	1.000	1.002	0.998	1.000	1.002	0.999	1.000	1.001	0.999	1.000
	0.3	1.081	1.090	1.008	0.996	1.000	1.004	0.996	1.000	1.004	0.998	1.000	1.002	0.998	1.000
	0.4	1.144	1.160	1.014	0.993	1.000	1.007	0.993	1.000	1.007	0.995	1.000	1.005	0.995	1.000
	0.5	1.225	1.250	1.020	0.990	1.000	1.010	0.990	1.000	1.010	0.993	1.000	1.007	0.993	1.000

注: 精——精确解, 近——近似解。

10%。其次, 当不等刚度 $D_x/D_y=0.6$ 与等刚度 $D_x/D_y=1.0$ 时相比, 长向的最大弯矩减少了26.5%而短向的最大弯矩增加了26.3%, 跨中最大挠度减少了3.3%。考虑剪切变形当 $p=0.5$ 与不考虑剪切变形即 $p=0.0$ 时相比, 跨中最大挠度增加了22.5%, 但对内力的影响不太明显。

如 $\lambda=1.4$ 时, 修正系数 η 详见表3.2。此时, 近似值的误差比 $\lambda=1.0$ 时要稍大一些。但在一般情况下, 不等刚度和剪切变形的影响是同时存在的。网架结构的 p 值一般为 0.3~0.4, 当 $D_x/D_y=0.6$ 时, 则综合后的近似解的最大误差约为10% (见表3.2最后二行的 η_{Q_x} 值)。

$\frac{D_x}{D_y}$	η	η_w			η_{M_x}			η_{M_y}			η_{Q_x}			η_{Q_y}		
		精	近	近/精	精	近	近/精	精	近	近/精	精	近	近/精	精	近	近/精
1.0		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9		0.967	0.969	1.002	0.906	0.919	1.014	1.020	1.021	1.001	0.957	0.919	0.960	1.016	1.021	1.005
0.8	0.0	0.930	0.993	1.003	0.809	0.834	1.032	1.041	1.043	1.002	0.912	0.834	0.915	1.032	1.043	1.010
0.7		0.887	0.892	1.005	0.707	0.746	1.055	1.062	1.066	1.004	0.865	0.746	0.863	1.049	1.066	1.016
0.6		0.837	0.844	1.008	0.602	0.654	1.087	1.083	1.090	1.006	0.815	0.654	0.803	1.066	1.090	1.023
1.0	0.1	1.016	1.018	1.002	1.009	1.008	0.999	0.997	0.998	1.001	1.003	1.008	1.005	0.998	0.998	1.000
	0.2	1.064	1.070	1.006	1.035	1.029	0.994	0.988	0.992	1.005	1.011	1.029	1.018	0.992	0.992	1.000
	0.3	1.143	1.157	1.013	1.073	1.062	0.989	0.974	0.984	1.010	1.023	1.062	1.038	0.982	0.984	1.002
	0.4	1.253	1.279	1.021	1.119	1.102	0.985	0.958	0.973	1.016	1.038	1.102	1.062	0.970	0.973	1.003
	0.5	1.393	1.433	1.029	1.169	1.147	0.981	0.942	0.962	1.021	1.054	1.147	1.087	0.957	0.962	1.005
0.6	0.3	1.116	1.147	1.028	0.764	0.791	1.035	1.034	1.054	1.020	0.867	0.791	0.912	1.030	1.024	0.994
	0.4	0.996	1.016	1.020	0.700	0.736	1.051	1.053	1.069	1.015	0.845	0.736	0.871	1.044	1.069	1.022

注：精——精确解，近——近似解

因此，当 $\lambda=1.0\sim 1.4$ 、 $D_x/D_y=1.0\sim 0.6$ 、 $p=0.0\sim 0.5$ 时，如果考虑两向不等刚度和剪切变形对网架挠度、内力的影响，从工程应用的角度来看，可采用近似方法计算。这个近似方法的计算公式，只要在表达式 (2.8) 中令 $k_x=k_y=1$ 、 $p=0$ ，且分别乘以由式 (3.1)

所表示的相应的修正系数 η 即可得到。于是，计算用表只需按参数 λ 编制就可以了，使用起来也很方便。在本文的附录中给出了当 $\lambda=1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ 共五种拟板的内力、挠度系数表，以备查用。顺便指出，当竖向荷载正好仅是级数表达式 (2.3) 的首项时，则不论 k_x, k_y, p 为何值，这种近似计算结果便和精确计算结果完全吻合。

当网架结构的各类杆件是变截面时，一般可近似地分别取其算术平均截面，按两向不等刚度考虑即可。从下面的计算实例表明，这样处理除网架挠度的误差还稍大一些外，从工程要求来看，其内力已有足够的精

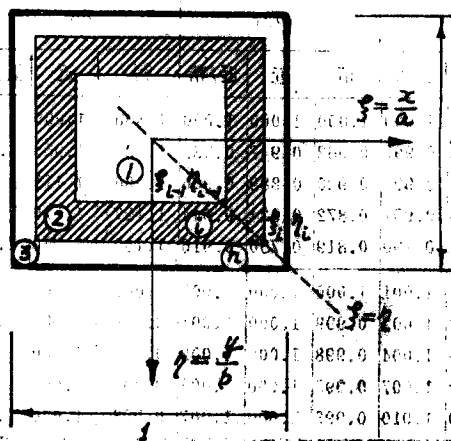


图3.1 变刚度拟板示意图

为考虑变刚度的影响而改进网架挠度的计算精度。下面提出一个近似的修正方法。假定四边简支拟板的刚度变化，在平面图上认为是任意多边形形的 (图3.1)，某一环形区域 i 内的刚度 D_{xi} 、 D_{yi} 为常数。如不考虑剪切变形的影响，区域 i 内拟板的基本方程式为：

$$\left(D_{xi} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{yi} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q \quad (3.3)$$

将荷载 q 和挠度 w 均展为重三角级数：

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \frac{1}{mn} \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta \\ w &= \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} \cos m\pi\xi \cos n\pi\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

系数 W_{mn} 可采用伽辽金变分法求得。

如取一级近似解，则 W_{11} 可由下式求得：

$$W_{11} = \frac{ab \iint_{\Omega} \frac{16q}{\pi} \cos^2 \pi\xi \cos^2 \pi\eta d\xi d\eta}{ab \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_i} \left(\frac{\pi}{a}\right)' (D_{xi} + \lambda' D_{yi}) \cos^2 \pi\xi \cos^2 \pi\eta d\xi d\eta} \quad (3.5)$$

式中 Ω 表示全区域， Ω_i 表示 i 区域。注意到 $\eta_i = \xi_i$ ，则积分后可得：

$$W_{11} = \frac{16qa^4}{\pi^4} \frac{1}{\sum_{i=1}^n (D_{xi} + \lambda' D_{yi}) [(2\pi\xi_i + \sin 2\pi\xi_i)^2 - (2\pi\xi_{i-1} + \sin 2\pi\xi_{i-1})^2]} \quad (3.5')$$

如果全区域按平均刚度 D_x 、 D_y 计，则 W_{11} 便退化为 W_{11}^0 ：

$$W_{11}^0 = \frac{16qa^4}{\pi^4 (D_x + \lambda' D_y)} \quad (3.6)$$

因此，和前面所述的近似分析法一样，当考虑变刚度影响时，其挠度值的一级近似计算可按不考虑变刚度时精确计算挠度值，再乘以下列修正系数 γ ：

$$\gamma = \frac{W_{11}}{W_{11}^0} = \frac{\pi^2 (D_x + \lambda' D_y)}{\sum_{i=1}^n (D_{xi} + \lambda' D_{yi}) [(2\pi\xi_i + \sin 2\pi\xi_i)^2 - (2\pi\xi_{i-1} + \sin 2\pi\xi_{i-1})^2]} \quad (3.7)$$

一般情况下，可将网架平面图形划分成三个区域，且令 $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{4}$ 、 $\xi_2 = \eta_2 = \frac{3}{8}$ 、

$\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{2}$ （如图3.1左部所示），则式3.7的具体表达式为：

$$\gamma = \frac{D_x + \lambda' D_y}{0.670 (D_{x1} + \lambda' D_{y1}) + 0.281 (D_{x2} + \lambda' D_{y2}) + 0.049 (D_{x3} + \lambda' D_{y3})} \quad (3.8)$$

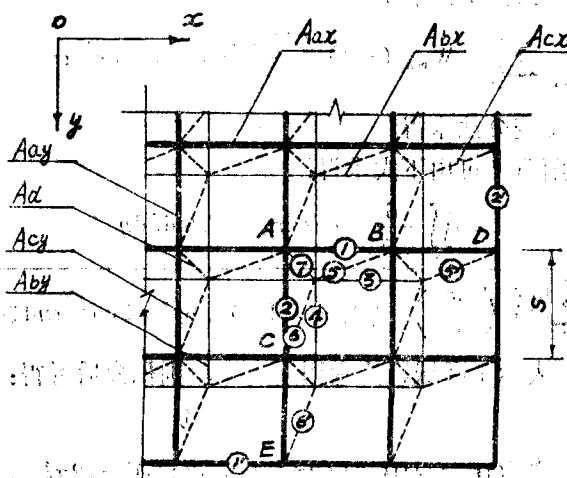
式中 D_{x1} 、 D_{y1} 、 D_{x2} 、 D_{y2} 、 D_{x3} 、 D_{y3} 分别为区域1、2、3中的平均刚度。

矩形平面周边简支网架挠度的最终修正系数应把 γ 值合并到式 (3.1) 的第一式中去，即得：

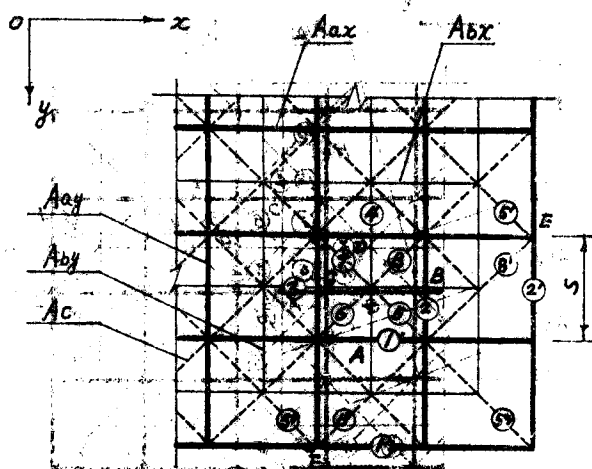
$$\eta_w = \frac{\alpha\beta(1+\lambda')}{\alpha + \beta\lambda'} \gamma. \quad (3.1a')$$

四、由拟板内力求网架杆件内力的计算公式

求得拟板的内力 M_x 、 M_y 和 Q_x 、 Q_y 后，可根据单位宽度内内力相等的原则，导出网架各类杆件内力的计算公式，详见表4.1~4.3所示。表中 h 为网架高度， β 为斜杆倾角，角标 A、B、C……表示取 A、B、C……点处的拟板内力，网架的各类杆件截面积不等时分别取其截面积的算术平均值。



项 目	部 位	内 部 区 域	简 支 边 界
杆件内力	上弦	$N_1 = -SM_x A/h$ $N_2 = -SM_y A/h$	$N_1' = 0$ $N_2' = 0$
	下弦	$N_3 = SM_x B/h$ $N_4 = SM_y C/h$	
	斜杆	$N_5 = -SQ_x B/\sin\beta$ $N_6 = -SQ_y C/\sin\beta$	$N_5' = -SQ_x D/\sin\beta$ $N_6' = -SQ_y E/\sin\beta$
	竖杆	$N_7 = S(Q_x A + Q_y A)$	



项 目		部 位	内 部 区 域	简 支 边 界
杆 件 内 力	上 弦		$N_1 = -SM_x^A/h$	$N_1' = 0$
			$N_2 = -SM_y^B/h$	$N_2' = 0$
	下 弦		$N_3 = SM_x^C/h$	
			$N_4 = SM_y^D/h$	
斜 杆		$N_5 = -S(Q_x^B + Q_y^A)/2\sin\beta$ $N_6 = -S(-Q_x^C + Q_y^A)/2\sin\beta$ $N_7 = S(Q_x^C + Q_y^D)/2\sin\beta$ $N_8 = S(-Q_x^B + Q_y^D)/2\sin\beta$	$N_5' = N_8' = -SQ_x^E/2\sin\beta$ $N_5'' = N_6' = -SQ_y^D/2\sin\beta$ $N_5''' = 0$	