大地测量

基础教材

中国人民解放军总参谋部测绘局编

一九七四年

前　　言

遵照伟大领袖毛主席关于**“军队要严格训练，严格要求，才能打仗”**的教导和中央军委关于办好教导队的指示精神，各军区都注重了加强测绘部队教导队的建设和训练工作。几年来，各测绘大队在教导队的教学方面积累了一定的经验，编写了一些专业教材。为了提高专业技术教学质量，解决教材缺乏的问题，我们采取教材汇稿的办法，组织测绘部队有作业经验的技术人员和测校的教员共同编写了《大地测量》基础教材。供测绘大队教导队和在职技术员教学使用。

遵照毛主席**“教材要彻底改革”**的教导，在编写中力求做到：以无产阶级政治统帅业务技术；以实作需要为主，讲述必要的理论；依据现行的规范、图式，吸取各测绘部队的作业实践经验。但由于编者水平限制，时间又较仓促，可能有错漏之处，请给以指正，以便在教材再版时加以改进。

目　　录

第一章　大地测量的任务和作用

伟大领袖毛主席指出：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”**大地测量就是研究在国家领土上如何建立大地控制网，确定大地点的精确位置（点的坐标和点与点间的距离、方位以及点的高程）的测量科学。它包括三角测量、导线测量、水准测量、天文测量、重力测量、卫星大地测量以及各种大地测量计算等。这本材料着重介绍三角测量、导线测量和水准测量的布设原则和作业方法以及成果的验算等问题。

一　大地测量的任务

（一）控制各种比例尺测图

地球形状是近似于一个旋转的椭球。地球的体积很大，在小面积范围内可以看成是平面，但在较大面积上，则应看成是曲面。这样的曲面不通过一定方法是不能展平的，如同不能把一张桔子皮完整的展平一样。我们测制地图是在全国范围内进行的，要将各个地区所测制的地图拼接在一起，既要保证精度，又不发生裂口、变形现象，就必须顾及地球表面的弯曲。对这个问题的解决，是在测图之前，先进行大地测量，精确测定大地点的坐标和高程，再把这些点依据一定的方法描绘在平面上，成为一个完整的、精确的测图控制系统。然后根据这些大地点进行测图，就能有效地控制测图时产生的误差累积，使各个地区测制的地图在拼接时不致发生明显的裂口和变形。

（二）为研究地球形状和大小及地壳形变等科学问题提供资料

大地测量是在地球表面上广大区域内进行的，它能够为研究地球的形状和大小提供资料。为了满足科学研究和正确处理大地测量成果以便获得大地点的精确坐标和高程的需要，又必须确定地球的形状和大小。首先是确定本国领土范围内的地球形体，以其表面作为大地测量成果计算的基准面，并为有关科学研究提供资料。

二　大地测量的作用

大地测量成果，在国家经济建设和国防建设中，具有重要的作用。

经济建设，如综合性的建设规划，治山治水，地质勘探，选建工矿企业，修建铁路、公路，农业、林业建设等等，都需要大地测量成果和各种比例尺地形图。

国防建设，如战场准备，港湾，要塞，机场，军事基地，军事工程建设等等，都需要有详细而精确的大地资料和地形图。

特别是保障远程兵器的射击，必须准确知道敌我双方的位置以求取射击方位和距离。为此，平时要布设足够密度的大地点，以便战时火炮的联测或直接利用。远程兵器越发

展，要求大地测量成果精度越高。

综上所述，大地测量在国家经济建设和国防建设中是必不可少的工作。我们必须遵照毛主席**“备战、备荒、为人民”**的教导，坚决贯彻独立自主，自力更生，艰苦奋斗，勤俭建国的方针，坚持抓革命，促生产，促工作，促战备，多快好省地完成各项大地测量任务，为中国革命和世界革命做出新的贡献。

第二章 测量误差知识

为了确定点的位置，测量人员使用某种仪器、工具，按照一定的观测方法，进行实地测量。由于人们受感觉和视觉的限制，外界条件的变化，以及仪器、工具本身不尽完善，而使观测值含有误差。例如，用钢卷尺丈量某段距离，两次丈量结果往往不一致；用仪器观测平面三角形三内角的和不等于180°等等。为了获得高精度的测量成果和提高工作效率，我们必须对测量误差的来源、性质以及积累的规律，进行深入的研究，找出它们的规律，采取合理的方法，判断测量成果的质量。

应该指出：在任何测量中，必须首先使测量的成果不含测错、算错之类的粗差。我们在研究误差时，认为测量成果中不含有粗差。

第一节 测量误差及其分类

为便于研究测量误差，首先介绍真值和真误差的概念。

一个量的真值就是它的真正大小，由于测量不可避免而含有误差，所以在一般情况下无法测得真值。我们所得到的是对某量的观测值L_i，它与真值X的差值称为真误差Δ_i，即：

$$\Delta_i = L_i - X \qquad (i=1,2\cdots\cdots n) \qquad (2-1)$$

由于真值无法测得，所以在一般情况下真误差也是求不到的。只有在一些特殊问题中才能求得一量的真值及真误差。例如，平面三角形三内角和的真值 X＝180°，若三内角观测值之和（A＋B＋C）不等于180°，其与180°之差，称为三角形的闭合差W。此闭合差即为真误差“Δ”，即：

$$\Delta = W = (A+B+C) - 180° \qquad (2-2)$$

根据误差性质的不同，测量误差可分系统误差和偶然误差两类：

一 系统误差

在相同的测量条件下，进行一系列的观测，若误差的符号相同和数值的大小保持一个常数，或者作规律性的变化，则这种误差称为系统误差。例如，用30米的钢卷尺丈量距离，假如该钢卷尺本身长度有误差，即比30米长一个a值或短一个a值，那么用这样的钢卷尺量距离，每量一尺就产生一个a值的误差，随着所量距离的增长，误差积累也越大。

系统误差的来源是多方面的，例如：仪器构造不完善或校正不正确；外界条件，如空气温度变化；大气折光影响；以及观测者的习惯，常把目标偏在十字丝的某一侧，认为是恰好照准。以上都是产生系统误差的因素。系统误差对测量结果的影响，在一定条件下和一定范围内是累积性的，因此对观测结果的影响较大。

二 偶然误差

在相同的测量条件下，进行一系列的观测，如误差符号时正时负，数值时大时小，几乎呈现均等的变化，这种误差称为偶然误差。

偶然误差的来源是由于人、仪器和外界条件三种因素所引起的。因为自然界时刻都在一定范围内发生变化。如温度、湿度、大气的清晰度等的变化，不可避免地使观测结果含有偶然误差。

对偶然误差，人们通过反复的实践，总结出大量的偶然误差的规律性。这就是偶然误差的特性。

由于三角形闭合差就是真误差，又因在测量中偶然误差和系统误差总是同时发生的。但在观测中，我们尽量设法消除或减弱系统误差，因此可以认为三角形闭合差主要反映了偶然误差的影响。所以我们可以用三角形闭合差的分布情况分析偶然误差的特性。

例如：在某测区的三等网中，共观测96个三角形，现将其闭合差“Δ”分布情况列于下表2—1：

表 2—1

误差大小范围	正△的个数	负△的个数	总数
″ ″			
0.0—1.0	19	20	39
1.0—2.0	13	12	25
2.0—3.0	8	9	17
3.0—4.0	5	4	9
4.0—5.0	2	2	4
5.0—6.0	1	1	2
6.0 以上	0	0	0
	48	48	96

把上表的统计结果用图形来表示：以误差“Δ”（闭合差）的数值为横坐标，以误差出现个数为纵坐标，绘出误差“Δ”分布曲线，如图2—1 所示。

由表2—1及图2—1可以归纳出偶然误差的规律（特性）：

1. 在一定的测量条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的界限。
2. 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的机会多。
3. 绝对值相等的正误差与负误差出现的机会相等。
4. 偶然误差的算术平均值（又称算术中数），随着观测次数的无限增加而趋向于零。

即：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

式中 $[\Delta]=\Delta_1+\Delta_2+\cdots\cdots+\Delta n$

其中第四个特性是由第三个特性导出的。第三个特性告诉我们，在大量的偶然误差中，正负误差有互相抵消的性能。因此，当观测次数 n 无限增大时，偶然误差的算术平均值必然趋向于零。

根据偶然误差的特性，人们从实践中总结了减弱偶然误差的有效措施：即适当增加观测次数（测回数）。这些措施详见有关章节的论述。

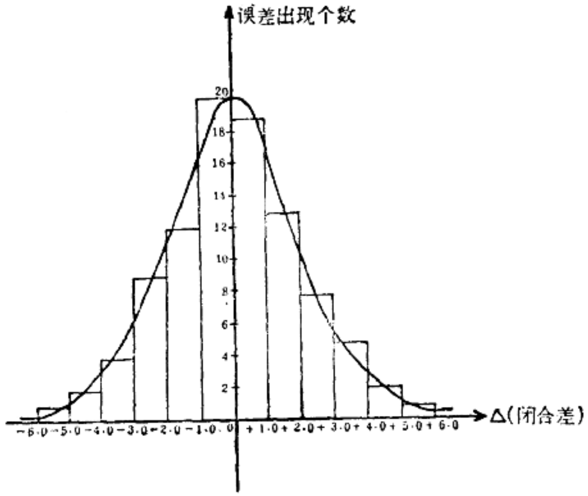

图 2-1

第二节 判断成果精度的方法

由于观测结果中不可避免地存在偶然误差，因此在同样的观测条件下，对未知量的多次观测，其结果往往也是不一致的。为了说明观测结果的精度，必须根据偶然误差的特性，建立一种判断观测成果精度的方法。

一 中 误 差

设对同一个未知量X进行多次观测的结果是L_1、L_2……L_n，每个观测结果相应的真误差为Δ_1、Δ_2……Δ_n，我们取各个真误差平方和的平均数之平方根作为判断成果精度的标准，以符号m表示，即：

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots+\Delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \qquad (2-3)$$

式中$\Delta_i=L_i-X$，（i=1、2……n），m称为中误差。

从中误差m的定义可以引出如下二个问题：

1．中误差与真误差的关系。中误差并不等于每个观测值的真误差，它仅是一组真误差的代表。当一组的真误差愈大，中误差也愈大，精度就愈低，反之精度就愈高。

2．中误差是判断成果质量的标准。因为中误差的大小反映了一组观测结果的精度如何。而在这组观测中，又是等精度观测的，所以中误差可以认为是该组任一个观测值的中误差，通常称m为观测值的中误差。

下面举例说明中误差公式（2—3）的用途。

例如：测得某个三等网的各三角形闭合差如下，求任一个三角形闭合差的中误差m。

+5.″1	−1.″8	−2.″3	+0.″5	0.″0	+2.″3	+0.″5	−0.″1	+1.″0	−1.″4
−1.0	+4.1	−3.5	+3.0	−0.3	−1.2	−2.4	+0.8	+0.4	−3.4
+1.7	+0.2	−4.6	+3.6	−1.3	+0.3	−0.7	+0.3	−0.6	+1.5
−0.3	+3.5	−3.2	+2.6	−0.2	−1.3	+1.6	−1.8	−0.7	+2.7

因为三角形闭合差本身就是真误差，所以按（2—3）式得：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}=\pm\sqrt{\frac{(+5.1)^2+(-1.8)^2+\cdots\cdots+(+2.7)^2}{40}}=\pm\sqrt{\frac{188.68}{40}}=\pm2.''2$$

即每个三角形闭合差的中误差为$\pm2.''2$。

二　极　限　误　差

由偶然误差的第一特性得知，在一定的测量条件下，偶然误差的绝对值不超过一定的界限。如果在测量过程中某一个观测值的误差超出了这个界限，则认为在这个观测值当中不仅含有偶然误差，而且含有不能允许的粗差，因此应将这个观测值舍去不用。这个界限叫做“极限误差”，或“最大误差”。

如何确定极限误差呢？我们知道，偶然误差值大小的范围是与测量精度有关，即和测量条件有关。测量条件好，误差出现的范围就小；测量条件差，误差出现的范围就大。因此，中误差m是反映测量条件的，即反映了观测精度的；所以，一般采用n倍的中误差作为极限误差。但是，究竟应该采用几倍的中误差作为极限误差呢？通过误差理论研究和大量的作业统计，发现大于中误差m的偶然误差，其出现的可能约为32%；大于$2m$的偶然误差，其出现的可能约为5%；大于$3m$的偶然误差，其出现的可能约为0.3%。

因此可以认为，在实际作业中，大于3倍中误差的偶然误差的出现机会是极少的，故可以取3倍中误差作为极限误差。即：

$$\Delta_{限}=3m \qquad (2-4)$$

当要求较严时，或者当观测次数不多时，也可采用$2m$作为极限误差。在我国现行作业规范中，一般以$2m$作为极限误差，即：

$$\Delta_{限}=2m \qquad (2-5)$$

三　绝对误差与相对误差

绝对误差就是误差本身的大小。例如：真误差、中误差、极限误差等都属于绝对误差。

对于衡量精度来说，有时单靠绝对误差还不能完全表达观测结果的优劣。例如在距离测量中，误差的大小是和距离长短有关的。假设用微波测距仪分别测定1000米和15000米的两段距离，它们的测距中误差（绝对误差）均为±0.1米。显然两段距离的观测精度是不相同的，后者的精度高于前者。因此，必须再引入一个衡量精度的标准，即相对误差。

相对误差就是，误差值与其观测结果之比。例如上例中距离为1000米的相对误差为：

$$\frac{0.1}{1000}=\frac{1}{10000}$$

而距离为15000米的相对误差为：

$$\frac{0.1}{15000}=\frac{1}{150000}$$

显然，后者的相对误差比前者小，即说明后者的精度比前者高。

相对误差是个无名数，分子与分母的长度单位要一致，并且将分子约化为1。

相对误差一般只用于长度测量中，角度测量不采用相对误差，因为角度误差的大小与角度的大小无关。

第三节　观测值函数的中误差（误差传播定律）

前面我们是讨论直接观测量的精度问题，但在实际作业中，有一些未知量是用直接观测量计算而来的。例如：

1．已知三角形三内角观测值为L_1，L_2，L_3，求三角形三内角之和L，即：

$$L=L_1+L_2+L_3$$

2．已知方向观测中某方向n个测回的等精度观测值为L_1，L_2，……L_n，求该方向值的算术中数x，即：

$$x=\frac{1}{n}(L_1+L_2+\cdots\cdots+L_n)$$

3．已知三角形的一边a和两个内角A、B，求三角形的另一边b，即：

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

以上三个算式，都叫函数式。

所谓函数，就是：当给变量x一个数值时，因变量y就有一个确定的值与之对应，便称y是x的函数。用符号$y=f(x)$表示。

在函数$F=f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$中，$x_1$，$x_2$，……$x_n$为观测值，则称F是观测值的函数。当已知直接观测值相应的中误差为m_1，m_2，……m_n时，便可根据观测值函数式，用误差传播定律求得观测值函数的中误差。阐述观测值中误差和函数值中误差之间的关系式之定律，称为误差传播定律。在测量中应用十分广泛。这里就一些比较简单的函数（倍数、和或差、线性）来讨论误差传播定律。

一　倍　　数

设有观测值函数式：

$$Z=kX \tag{2—6}$$

式中，k为常数，X为直接观测值，其中误差为m_X。Z为观测值的函数，函数Z的中误差为m_z。

为推求m_Z与m_X之间的关系式，必须先找出x的真误差Δ_x与Z的真误差Δ_z之间的关系，由（2—6）式知道：

$$\Delta_Z=k\Delta_X$$

若对X共观测n次，得n个真误差：Δ_{X1}，Δ_{X2}，……Δ_{Xn}，由此可得Z的真误差分别为：

$$\Delta_{Z1}=k\Delta_{X1}$$

$$\Delta_{Z_2} = k\Delta_{X_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_{Z_n} = k\Delta_{X_n}$$

将以上各式平方得：

$$\Delta^2_{Z_1} = k^2\Delta^2_{X_1}$$
$$\Delta^2_{Z_2} = k^2\Delta^2_{X_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^2_{Z_n} = k^2\Delta^2_{X_n}$$

等式两边相加得：

$$[\Delta^2_Z] = k^2[\Delta^2_X]$$

两边各除以 n 得：

$$\frac{[\Delta^2_Z]}{n} = k^2\frac{[\Delta^2_X]}{n}$$

根据中误差定义：

$$\frac{[\Delta^2_Z]}{n} = m^2_Z$$

$$\frac{[\Delta^2_X]}{n} = m^2_X$$

则得：
$$m^2_Z = k^2 m^2_X$$
或
$$m_Z = k m_X \qquad (2-7)$$

这就是说，观测值（X）与一常数（k）乘积Z的中误差（m_Z），等于观测值的中误差（m_X）乘上该常数（k）

例如：在$\frac{1}{50000}$地图上量得两点间的距离 a ＝20毫米，图上量距的中误差$m_a = \pm 0.2$毫米，求此两点间的距离 S 及量距中误差m_S。

地图比例尺M为$\frac{1}{50000}$，则：

$$M = \frac{a}{S}$$

所以
$$S = \frac{1}{M}a = \frac{1}{\frac{1}{50000}} \times 20 = 1000000\text{毫米} = 1000\text{米}$$

由（2—7）得：

$$m_S = \frac{1}{M}m_a = \frac{1}{\frac{1}{50000}} \times (\pm 0.2) = \pm 10000\text{毫米} = \pm 10\text{米}$$

最后写成：S ＝1000米±10米

二　和　或　差

设有观测值函数：

$$Z = X \pm Y \qquad (2-8)$$

式中，X和Y为直接观测值，其中误差分别为m_x和m_y，Z为观测值函数，Z的中误差以m_z表示之。

为推求m_z与m_x，m_y之间的关系式，仍然要先找出它们的真误差之间的关系。由于X、Y含有真误差，则影响Z也有误差，令Z、X、Y的真误差分别为Δ_z、Δ_x、Δ_y，则有：

$$Z+\Delta_z=(X+\Delta_x)\pm(Y+\Delta_y)$$

上式与（2—8）式相减得：

$$\Delta_z=\Delta_x\pm\Delta_y$$

若对X、Y各观测n次，其真误差分别为Δ_{x1}，Δ_{x2}，……Δ_{xn}；Δ_{y1}，Δ_{y2}，……Δ_{yn}。则有：

$$\begin{aligned}\Delta_{z1}&=\Delta_{x1}\pm\Delta_{y1}\\ \Delta_{z2}&=\Delta_{x2}\pm\Delta_{y2}\\ &\cdots\cdots\\ \Delta_{zn}&=\Delta_{xn}\pm\Delta_{yn}\end{aligned}$$

将以上各式两边平方得：

$$\begin{aligned}\Delta_{z1}^2&=\Delta_{x1}^2+\Delta_{y1}^2\pm2\Delta_{x1}\Delta_{y1}\\ \Delta_{z2}^2&=\Delta_{x2}^2+\Delta_{y2}^2\pm2\Delta_{x2}\Delta_{y2}\\ &\cdots\cdots\\ \Delta_{zn}^2&=\Delta_{xn}^2+\Delta_{yn}^2\pm2\Delta_{xn}\Delta_{yn}\end{aligned}$$

相加得：

$$[\Delta_z^2]=[\Delta_x^2]+[\Delta_y^2]\pm2[\Delta_x\Delta_y]$$

两边各除以n得：

$$\frac{[\Delta_z^2]}{n}=\frac{[\Delta_x^2]}{n}+\frac{[\Delta_y^2]}{n}\pm2\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n}$$

根据中误差定义得：

$$m_z^2=m_x^2+m_y^2\pm2\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n}$$

上式最后一项，Δ_x与Δ_y均为偶然误差，正负的机会相同，Δ_x与Δ_y的乘积$\Delta_x\Delta_y$的正负机会也相同。因此，当n相当大时，其总和$[\Delta_x\Delta_y]$有正负抵消的可能。又根据偶然误差第四特性，则有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n}=0$$

由此可得：

$$m_z^2=m_x^2+m_y^2 \qquad (2—9)$$

就是说：两个观测值代数和（X±Y）函数的中误差平方（m_z^2），等于两个观测值中误差的平方和（$m_x^2+m_y^2$）。

例如：水平角观测中，角度值（θ）是由它的两个方向值之差（$L_右-L_左$）计算而来，求角度之中误差$m_角$。因为：

$$\theta=L_右-L_左$$

所以由（2—9）式得：

$$m_{角}^2=m_{右}^2+m_{左}^2$$

因为同一测站上两个方向的观测精度是相同的，故$m_{右}=m_{左}=m_{方}$，则：

$$m_{角}^2=2m_{方}^2$$

所以
$$m_{角}=\pm\sqrt{2}\,m_{方}$$

根据（2—9）式的规律，我们可以将两个观测值代数和函数中误差推广为n个观测值代数和函数的中误差。

设n个观测值的代数和为：

$$Z=X_1\pm X_2\pm\cdots\cdots\pm X_n \qquad (2\text{—}10)$$

与（2—9）式同理：

$$m_Z^2=m_1^2+m_2^2\cdots\cdots+m_n^2 \qquad (2\text{—}11)$$

即n个观测值代数和函数的中误差之平方，等于n个观测值中误差的平方和。

若（2—11）式中各观测值均为等精度观测，即：

$$m_1=m_2=\cdots\cdots=m_n=m$$

则
$$m_Z^2=n\,m^2$$

或
$$m_Z=\sqrt{n}\,m \qquad (2\text{—}12)$$

例如：设在两水准点之间，用水准仪测了9个测站，设每一测站测得高差的中误差$m_{站}=\pm3$毫米，问测得的两水准点高差的中误差m_h是多少？

因为各测站均是等精度观测的，可用（2—12）式求得：

$$\begin{aligned}m_h&=\sqrt{n}\,m_{站}\\&=\sqrt{9}\times(\pm3\text{毫米})\\&=\pm9\text{毫米}\end{aligned}$$

三 线 性 函 数

设有观测值函数

$$Z=k_1X_1\pm k_2X_2\pm\cdots\cdots\pm k_nX_n \qquad (2\text{—}13)$$

式中k_i为常数，x_i为直接观测值，它们的中误差分别为m_1，m_2，……m_n。为推求中误差的关系式，设：

$$\begin{aligned}Z_1&=k_1X_1\\Z_2&=k_2X_2\\&\cdots\cdots\cdots\\Z_n&=k_nX_n\end{aligned}$$

将上式代入（2—13）式得：

$$Z=Z_1\pm Z_2\pm\cdots\cdots\pm Z_n$$

根据（2—11）式有：

$$m_Z^2=m_{Z_1}^2+m_{Z_2}^2+\cdots\cdots+m_{Z_n}^2$$

由（2—7）式知：

$$m_{Z_i}=k_i\,m_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$$

代入上式得：

$$m_Z^2=k_1^2m_1^2+k_2^2m_2^2+\cdots\cdots+k_n^2m_n^2 \qquad (2\text{—}14)$$

即：常数与观测值乘积的代数和的中误差平方，等于各常数与相应观测值中误差乘积的平方和。

以上讨论了几种函数中误差公式，现将各公式汇集如下：

表 2—2

函数	中误差之间关系式
$Z=kX$	$m_z=km_X$
$Z=X\pm Y$	$m_Z^2=m_X^2+m_y^2$
$Z=X_1\pm X_2\pm\cdots\cdots\pm X_n$	$m_Z^2=m_1^2+m_2^2+\cdots\cdots+m_n^2$
$Z=k_1X_1\pm k_2X_2\pm\cdots\cdots\pm k_nX_n$	$m_Z^2=k_1^2m_1^2+k_2^2m_2^2+\cdots\cdots+k_n^2m_n^2$

四　观测值中误差在测量上的应用

（一）光学测微器两次重合读数之差的限差

设：光学测微器两次重合读数分别为Ⅰ、Ⅱ，两次重合读数之差为N，则：

$$N=\mathrm{I}-\mathrm{II}$$

根据（2—9）式得：

$$m_N^2=m_{\mathrm{I}}^2+m_{\mathrm{II}}^2$$

因两次重合读数的精度相同，则：

$$m_{\mathrm{I}}=m_{\mathrm{II}}=m$$

所以

$$m_N^2=2m^2$$

$$m_N=\sqrt{2}\,m$$

用二倍中误差作为极限误差，则两次重合读数之差的限差$m_{N(允)}$为

$$m_{N(允)}=2m_N=2\sqrt{2}\,m$$

式中，m为光学测微器一次重合读数的中误差。《规范》规定：在水平角（或水平方向）观测中，按$m=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$计算的一次重合读数的中误差，$J_1$型仪器应不超过±0″.3，$J_2$型应不超过±1″.0以此值代入上式得：

$$J_1\text{型：}\ m_{N(允)}=2\sqrt{2}\,m=2\sqrt{2}\times(0''.3)=\pm0''.85$$

$$J_2\text{型：}\ m_{N(允)}=2\sqrt{2}\,m=2\sqrt{2}\times(\pm1''.0)=\pm2''.83$$

因此，《规范》规定：方向观测法中，光学测微器两次重合读数之差，对于J_1型仪器不得超过±1″.0，对于J_2型仪器不得超过±3″.0。

（二）由三角形闭合差求测角中误差

若三角网中各角的观测精度相同，由三内角之和算得各个三角形的闭合差为W_1，$W_2\cdots\cdots W_n$。

因为W_i为真误差，根据中误差定义，可列出三角形闭合差的中误差公式：

$$m_W=\pm\sqrt{\frac{[WW]}{n}} \tag{2—15}$$

$$[WW]=W_1^2+W_2^2+\cdots\cdots+W_n^2$$

又因 $$W=(A+B+C)-180°$$

设测角中误差为m，则三角形闭合差中误差为：

$$m_W^2=m^2+m^2+m^2=3m^2$$

$$m_W=\sqrt{3}\,m$$

所以 $$m=\frac{m_W}{\sqrt{3}} \qquad (2-16)$$

将（2—15）式代入（2—16）式得：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[WW]}{3n}} \qquad (2-17)$$

此式就是现行大地测量作业中，计算测角中误差的公式，又称菲列罗公式。

（三）由测角中误差求三角形闭合差的限差

由上述的讨论知道，三角形闭合差的中误差m_W与测角中误差的关系式为：

$$m_W=\sqrt{3}\,m$$

取极限误差为中误差的二倍。则三角形闭合差的极限误差为

$$\Delta_{限}=2m_W=2\sqrt{3}\,m \qquad (2-18)$$

例如三等三角测量的测角中误差$m=\pm1''.8$，则：

$$\Delta_{限}=2\sqrt{3}\,m=2\times\sqrt{3}\times1''.8=\pm6''.2$$

因为极限误差是对偶然误差而言，在规定限差时，还应顾及残余系统误差的影响，所以《规范》规定，三等三角测量的三角形最大闭合差不得超过±7″.0。

（四）水准测量的中误差

若在A、B两点间进行水准测量，中间共设站n次，两点间高差等于各站的高差之和，即：

$$h=H_B-H_A=h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n$$

根据（2—12）式，则：

$$m_h=\sqrt{n}\,m \qquad (2-19)$$

式中，m为每站的高差中误差，m_h为两点间高差中误差。

即水准测量高差的中误差，与测站数n的平方根成正比。

若各站的距离s大致相等，则全长S=ns，并以$n=\frac{S}{s}$代入上式，即：

$$m_h=\sqrt{n}\,m=\sqrt{\frac{S}{s}}\,m=\frac{m}{\sqrt{s}}\sqrt{S}$$

因s大致相等，m在一定测量条件下，也可视为常数，故$\frac{m}{\sqrt{s}}$可示为定值，以k表之，即

$$k=\frac{m}{\sqrt{s}}$$

所以有： $$m_h=k\sqrt{S} \qquad (2-20)$$