模糊(FUZZY)数学

专题译丛

四机部1028研究所

模糊(Fuzzy)数学专题译丛

四机部 1028 研究所情报研究室编

浙江温州新华印刷厂印刷

1980年4月印刷

编　者　按

自从1965年Zadeh提出“模糊集合”以来，模糊数学作为一个新的数学分支，得到了迅速的发展，它的理论已被应用于通讯、控制、决策和工程系统分析等方面。

对于模糊数学的代数解算方法，利用计算机有其独特的方便之处，並促进了模糊数学的发展。反过来，模糊指令、模糊程序、模糊语言又将进一步开拓计算机的应用领地。

在国内，近几年来，模糊数学已在计算机故障诊断、癌细胞识别、环境保护、良种培育等方面应用，并已经取得初步的成果。我们收集了十二篇文章，试图对模糊数学的基本概念及其应用作一简单介绍。在这十二篇文章中，我们收集了Zadeh的首篇文章，也收集了用于决策、识别、控制等一类的文章，同时也收集了Sugeno提出的模糊积分及其应用的三篇文章。为了使读者学习方便，我们把国防科技大学和北师大的一些译文列为附录，供读者了解基本概念用。由于模糊数学是一门新兴学科、一些概念都在发展，加上我们的水平有限，编辑仓促译文错误之处在所难免，恳切希望读者多加指正。

最后，我们感谢汪培庄、李占柄、沙钰、钱敏平、袁葓等同志给于我们的指导和帮助。

一〇二八研究所情报研究室

一九七九年七月

目　　录

附　　录

模　　糊　　集

L·A·Zadeh

模糊集是具有连续隶属度的集合。这样的集合用隶属（特征）函数来阐述，该函数对每一客体分配一个值域是〔0，1〕的隶属度。象并，交，补，关系，凸度等等所包含的概念被扩展到模糊集上，而且，在模糊集意义下建立了这些概念的各种性质。特别是在勿须要求模糊集是离散的情况下证明了凸模糊集的分离理论。

Ⅰ 引　　论

通常，在实际的物理空间里所遇到的客体类没有清楚地定义隶属的标准。例如，动物类无疑是包含狗、马、鸟等等，而不包含石头、液体、工厂等等客体。然而，象海盘车(Starfish)，细菌等等这样的客体相对于动物类而言是含糊的。同样的含糊也出现在数字的情况，例如，10是否属于比1大得很多的所有实数“类”，是含糊的。

显然，“所有比1大得多的实数类”或“美丽的女人类”或“高个子人类”，这些类就其数学意义而言不能去构造一些类或一些集合。到目前为止，在人类的思想范畴内，特别是到模型识别，信息传输和“抽象”的领域里这种不明确“类”的定义起了重要的作用。

本文的目的在于用初步的方法来研究一些基本性质以及概念的含义，如果这些概念可以用来处理以上所引用的类的话。上述的概念是指模糊集[1]的概念,即，它是具有闭连集的类的隶属度。正如以后我们将看到的。模糊集的概念为概念的结构（Framework)构成提供了适宜的起点，在许多方面概念的结构类似于普通集合所使用的概念的结构，但是前者比后者更为普遍，并且可以有力地证明它具有比较宽阔的适用范围，特别是在图象分类和信息加工领域里。本质上来说，这样的结构为处理一些问题提供了自然的方法，在这些问题中不明确的原因与其说是随机变量的出现，不如说是缺乏类隶属的明显的定义准则。

我们用几个基本的定义来开始讨论模糊集。

（1）这些概念在“现代分类”的一类问题阐述中的应用是在RAND　Memorandum RM—4307—PR“抽象概念和图象分类”里所描述。

作者是R.Bellman，R.Ralabaand L，A.Zadeh　1964。

Ⅱ 定　　义

令X是一个点（客体）（Object）的空间，用x表示X的一个普通元素，于是，$X=\{x\}$。

X的一个模糊集（类）通过一个隶属（特征）函数$f_A(x)$来阐述，$f_A(x)$使X内的每一点[1]与区间〔0，1〕[2]内的一个实数相对应，用点x的$f_A(x)$的值来表示A内x的隶属度（The “Grade of membership”）。因而，$f_A(x)$的值越是接近于1，A内x的

隶属度就越大。当A是通常意义下的集合时，它的隶属函数仅仅能取0和1两个值，$f_A(x)=1$ 或者 $f_A(x)=0$ 取决于x属于或不属于A。因此，在这种情况下 $f_A(x)$ 成为我们所熟悉的集合A的特征函数（当有需要区别普通集和模糊集时，只有二个值的特征函数的集合（特征函数的定义域）将被认为是普通集或简单集）。

例：令X是实轴 R^1，以及令A是"比1大得很多的"数的模糊集。然后，我们就能够用指定的 $f_A(x)$ 给出A的明确的特征作为 R_1 上的函数。这样的函数所表示的值可以是：

$f_A(0)=0$； $f_A(1)=0$； $f_A(5)=0.01$；
$f_A(10)=0.2$； $f_A(100)=0.95$； $f_A(500)=1$。

应该注意，当X是可数集时，虽然模糊集的隶属函数与概率函数有些相似（或者当X是闭连集时，与概率密度函数相类似），但是在这些概念之间存在着本质上的区别，以后一旦建立起隶属函数所具备的规则和它们的性质时，这些区别将显得比较清楚了。事实上，模糊集的概念根本不是统计学的概念。

围绕以包括模糊集的几个定义作为我们的开始，这些定义是普通集合上相应定义的明显开拓。

一个模糊集是空的当且仅当它的隶属函数在X上恒等于零。

两个模糊集A与B相等（记作A＝B）当且仅当对所有的 $x\in X$，$f_A(x)=f_B(x)$ 成立。（以后，我们将更简单地写成 $f_A=f_B$，以此来代替"$f_A(x)=f_B(x)$ 对所有的 $x\in X$"）。

A' 表示模糊集A的补集，而且定义为

$$f_{A'}=1-f_A。\quad\cdots\cdots(1)$$

正如普通集合一样，"包含"的概念在模糊集的情形中也起了重要的作用，这个概念和有关的"并"和"交"的概念定义如下。

包含。B包含A（或者等价地说，A是B的子集，或者A小于等于B）当且仅当 $f_A\leqslant f_B$。用符号表示为：

$$A\subset B \iff f_A\leqslant f_B \quad\cdots\cdots(2)$$

并。分别相应于隶属函数 $f_A(x)$ 和 $f_B(x)$ 的模糊集合A与B的并是模糊集C，记作 $C=A\cup B$。集合C的隶属函数通过

$$f_C(x)=\max\{f_A(x),\ f_B(x)\} \qquad x\in X \quad\cdots\cdots(3)$$

与A和B的隶属函数联系起来。
或者简写为

$$f_C=f_A\vee f_B。\quad\cdots\cdots(4)$$

注意：∪具有结合律的性质，即

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C。$$

注解：更直观地定义并的方法如下：
A和B的并都包含A与B的模糊集之最小者。更明确地说，如果D是皆包含A与B之任一模

糊集，则D亦包含A和B的并。

证明这个定义等价于(3)，首先，我们注意到用(3)定义的集合C皆包含了A与B，因为

$$\max\{f_A,\ f_B\}\geqq f_A \quad 和 \quad \max\{f_A,\ f_B\}\geqq f_B$$

此外，如果D是包含A，B二者的任一模糊集，则

$$f_D\geqslant f_A, \qquad f_D\geqslant f_B$$

因此得到

$$f_D\geqslant\max\{f_A,\ f_B\}=f_C$$

这意味着$C\subset D$，证明完毕。

我们可以用类似的方法定义模糊集交的概念。特别是：

交：分别相应于隶属函数$f_A(x)$和$f_B(x)$的模糊集A和B的交是一个模糊集C。记作

$$C=A\cap B,$$

C的隶属函数通过

$$f_C(x)=\min\{f_A(x),\ f_B(x)\},\ x\in X \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

和A与B的隶属函数联系起来。简写形式为

$$f_C=f_A\wedge f_B$$

正如并的情况一样，容易证明A和B的交是包含在A里又包含在B里的模糊集之最大者。与普通集合一样，如果$A\cap B$是空的，则A和B是不相交的。注意∩与∪一样具有结合律的性质。

图1说明了在R^1上两个模糊集的交与并。并的隶属函数包含在曲线段1和2内，交的隶属函数包含在段3和段4内

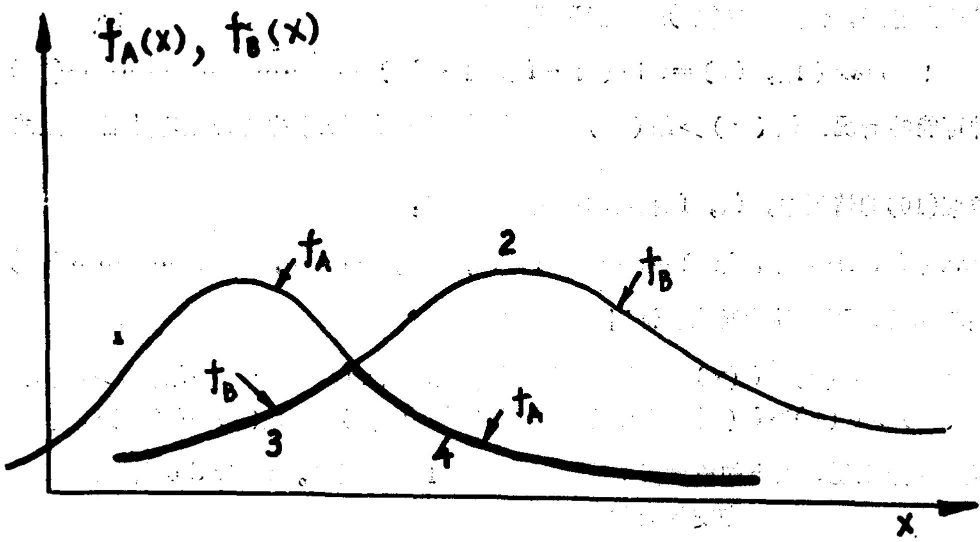

图1　在R^1中模糊集合的并与交的图示

注解：要注意“属于”的概念在普通集合中起了主要的作用，而在模糊集里则不起同样作用，因此，离开了$f_A(x)$确实存在着这点来谈点x(属于)模糊集A是没有意义的。更详细一点说，我们能够引出两个水平α和β($0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha>\beta$)，这才可以说：

(1)如果$f_A(x)\geqslant\alpha$，则“x属于A”。

(2)如果$f_A(x)\leqslant\beta$，则“X不属于A”。

(3)如果$\beta<f_A(x)<\alpha$，则“χ相对于A”而言处于不确定状态。

这里，用三个真值：$T(f_A(x)\geqslant\alpha)$、$F(f_A(x)\leqslant\beta)$和$U(\beta<f_A(x)<\alpha)$导出了三值逻辑(Kleene, 1952)。

---

(1)更一般地说，$f_A(x)$的定义域可以限制为X的子集。

(2)在更一般的集合里，隶属函数的值域能够取合适的、部分有序集合P，按照我们的意图，把f的值域限制在单位区间是合适的和足够的，如果$f_A(x)$的值表示成真值，这后者的情况相应于一个具有〔0，1〕区间上真值的连续集的多值逻辑。

Ⅲ　∪、∩和补的一些性质

由(3)，(5)和(1)所定义的并，交和补的运算，普通集合上所具有的许多基本性质很容易扩展到模糊集上。例如，我们有

$$\left.\begin{array}{l}(A\cup B)'=A'\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B'\end{array}\right\}\text{De Morgan 律}\quad\begin{array}{r}\cdots\cdots(7)\\ \cdots\cdots(8)\end{array}$$

$$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)\quad\cdots\cdots(9)$$

$$C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B)\quad\cdots\cdots(10)$$

按照对于A，B，C的隶属函数所相应的关系式是一致的说法，这些等式和类似的等式很容易建立起来。例如，在(7)式的情况下，我们有

$$1-\max[f_A, f_B]=\min[1-f_A, 1-f_B]\quad\cdots\cdots(11)$$

用两种可能的情况：$f_A(x)>f_B(x)$以及$f_A(x)<f_B(x)$去查证是容易证明上式为恒等式。

类似(10)的情况中，f_A，f_B和f_C的相应关系式是：

$$\max[f_C, \min[f_A, f_B]]=\min[\max[f_C, f_A], \max[f_C, f_B]]\quad\cdots\cdots(12)$$

根据所考虑的以下六种情况能够证明上式是恒等式，

$f_A(x)>f_B(x)>f_C(x)$　　$f_A(x)>f_C(x)>f_B(x)$　　$f_B(x)>f_A(x)>f_C(x)$

$f_B(x)>f_C(x)>f_A(x)$　　$f_C(x)>f_A(x)>f_B(x)$　　$f_C(x)>f_B(x)>f_A(x)$

从本质上来说，X上的模糊集构成了具有0和1的分配格。(Birkhoff, 1948)

并和交的说明(解释)

在普通集合情况中，一系列集合A_1，$A_2\cdots\cdots A_i$，$\cdots\cdots A_n$经过∪和∩而得到的族可用

集合C来表示，它描述了开关$\alpha_1\cdots\cdots,\alpha_n$的网络，用$A_i\cap A_j$和$A_i\cup A_j$分别相应于$\alpha_i$与$\alpha_j$的串联和并联的组合。在模糊集的情况中，我们能够用"筛子"的术语来给出类似的描述。明确地说，令$f_i(x)$，$i=1\cdots$，n，表示集合A_i在点X的隶属函数的值。把$f_i(x)$与带有筛孔大小为$f_i(x)$的筛子$S_i(x)$联系起来，从而，$f_i(x)\vee f_j(x)$，$f_i(x)\wedge f_j(x)$分别相应于$S_i(x)$，$S_j(x)$的并联和串联的组合。正如在图2里所说明的。

更一般地说，包含A_1，……A_n，∪，与∩的"井"格式的表示对应于筛$S_1(x)$，…，$S_n(x)$的一个网，对于开关电络通过常规综合技术就能求出这样的网。例如一个非常简单的例子，

$$C=[(A_1\cup A_2)\cap A_3]\cup A_4\cdots\cdots(13)$$

相应于图3所说明的网。

要注意，依赖于X的网中筛的筛孔大小和这个网作为一个整体来说等价于筛孔大小为$f_C(x)$的一个单独的筛。

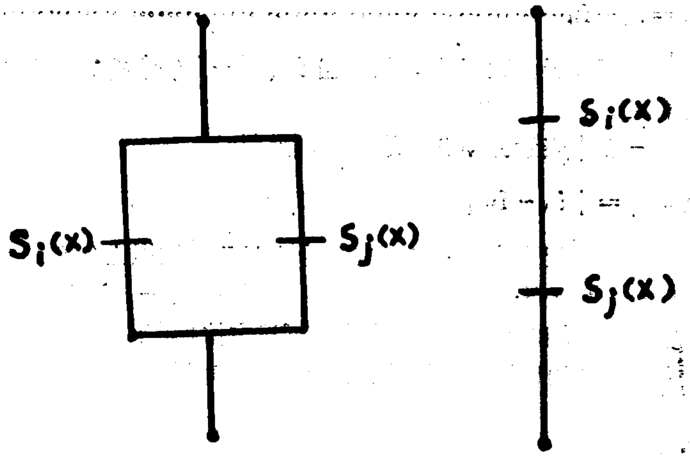

图2　相当于∪和∩的筛的并、串联

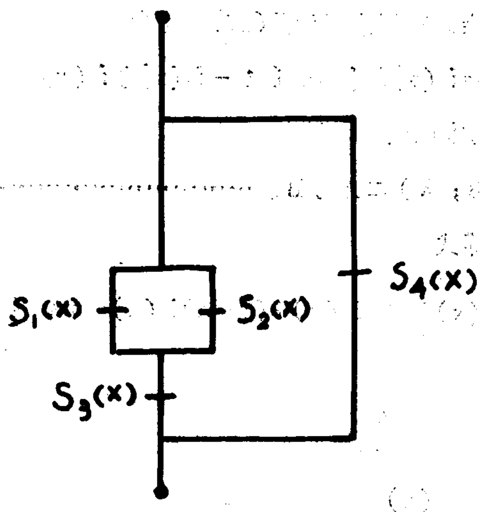

图3　相当于$\{[f_1(x)\vee f_2(x)]\wedge f_3(x)\}\vee f_4(x)$的筛的网络

Ⅳ 在模糊集上的代数运算

除了并和交的运算之外，我们能够定义一些其他方法来形成模糊集的组合以及使它的彼此之间建立联系。这些方法中比较重要的在以下叙述。

代数积[1]。用AB表示A和B的代数积，而且依据A，B的隶属函数，通过关系式

$$f_{AB}=f_Af_B \qquad (14)$$

来定义。

显然，

$$AB\subset A\cap B。 \qquad (15)$$

代数和[1]。用A＋B表示A与B的代数和，并且，若是f_A+f_B小于或等于1，则用

$$f_{A+B}=f_A+f_B \qquad (16)$$

来定义它。因而，它是不同于代数积的，仅仅当$f_A(x)+f_B(x)\leqslant 1$的条件对所有的x满足时，代数和才是有意义的。

绝对差。用$|A-B|$表示A与B的绝对差，且用

$$f_{|A-B|}=|f_A-f_B|$$

来定义。注意在普通集的情况中$|A-B|$归结为$A\cup B$区域里$A\cap B$的补。

凸组合。两个向量f和g的凸组合通常是指具有$\lambda f+(1-\lambda)g$形式的f和g的线性组合，其中$0\leqslant\lambda\leqslant 1$。这种f和g组合的模式能用下述方法推广到模糊集。

令A，B，和Λ是任意的模糊集。用$(A,B;\Lambda)$表示A，B和Λ的凸组合，且用关系式

$$(A,B;\Lambda)=\Lambda A+\Lambda' B \qquad (17)$$

来定义它，这里Λ'是Λ的余。对于隶属函数(17)可写为

$$f_{(A,B;\Lambda)}(x)=f_\Lambda(x)f_A(x)+[1-f_\Lambda(x)]f_B(x) \quad x\in X \qquad (18)$$

A，B和Λ凸组合的基本性质可表示为

$$A\cap B\subset(A,B;\lambda)\subset A\cup B。 \qquad (19)$$

对所有的λ这个性质是不等式

$$\min[f_A(x),f_B(x)]\leqslant\lambda f_A(x)+(1-\lambda)f_B(x)\leqslant \max[f_A(x),f_B(x)], \quad x\in X \qquad (20)$$

的直接结果，上式对所的$\lambda\in[0,1]$成立。给出模糊集C使其满足$A\cap B\subset C\subset A\cup B$，我们总是能求出一个模糊集$\Lambda$使得$C=(A,B;\Lambda)$，看到这一点是有益的。用

$$f_\Lambda(x)=\frac{f_C(x)-f_B(x)}{f_A(x)-f_B(x)}, \qquad x\in X \qquad (21)$$

给出A集的隶属函数。

模糊关系。关系的概念（函数概念的推广）可以自然的拓开到模糊集，而且对模糊集理论及其应用起了重要的作用。以后，我们将只定义模糊关系的概念且谈到一些有关的概念。

通常，一个关系定义为有序对的集合（Halmos 1960）即，所有$x \geqslant y$的实数有序对x与y的集合。就模糊集而言，x上的模糊关系（A Fazzy relation）是乘积空间$X \times X$上的模糊集。例如，这关系用$x \gg y$表示，x，$y \in R^1$，可以把它认为是在R^2上的且具有A的隶属函数$f(x,y)$的模糊集A，它存在着下列（主观的Subjeitive）描述值：

$f_A(10, 5)=0$；$f_A(100, 10)=0.7$；$f_A(100, 1)=1$；等等。

更一般地说，我们能够把X上n——维模糊关系定义为乘积空间$X \times X \times \cdots \cdots \times X$上的一个模糊集合A。对这样的关系，隶属函数是$f_A(x_1, x_2 \cdots \cdots x_n)$ 其中$x_i \in X$，$i=1、2，\cdots \cdots n$。

在二元的模糊关系中，用$B \circ A$表示两个模糊关系的合成（Composition），它的隶属函数通过下式与A，B的隶属函数建立联系，

$$f_{B\circ}(x,y)=\sup_{v}\min\{f_A(x, v), f_B(v,y)\}$$ 。注意合成的运算具有结合律。

$$A \circ (B \circ C)=(A \circ B) \circ C。$$

由映射导出的模糊集（Fuzzy Sets Induced by mappings） 令T是从X到空间Y的映射。令B是Y上具有隶属函数$f_B(y)$的模糊集。逆映射T^{-1}导出了X上的一个模糊集A，它的隶属函数用下式定义，

$$f_A(x)=f_B(y), \qquad y \in Y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

在X上对所有的用T把它映射到y的x成立。

现在考虑一个相反的问题，如果给出了X上的一个模糊集A和映射T，如前所述，T是X到Y的映射。这个问题是：由映射T导出了Y上的模糊集B，它的隶属函数是什么呢？

如果T不是一一对应的，当两个或者更多的X上的在A中具有不同的隶属度不同点，比如说x_1和x_2，它被映射到Y中同一个点y，于是就出现了含糊性。在这种情况下，这问题是：在B中y有多大的隶属度？

解这个含糊性，我们约定把两个隶属度之较大者分配给y。更一般地，B的隶属函将用

$$f_B(y)=\max_{x \in T^{-1}(y)} f_A(x), \quad y \in Y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

定义：这里$T^{-1}(y)$是X中的集合，如果T把该集合映射到Y内。

（1）二元的代数积是和$A \oplus B=(A'B')'=A+B-AB$（由T.Cover指出这点）。注意普通集合$\cap$与代数积是等价的运算，正如$\cup$和$\oplus$一样。

V 凸 性

正如以后将看到的，用保持普通集的凸性所具有的许多性质的这种方法能够容易地把凸性的概念开拓到模糊集上。包括在图象分类，优化和有关问题等等的应用中，这个概念的出现

是特别有用的。

在下文中，我们具体假设X是实欧几里得空间E^n。

定义：

凸性：

模糊集A是凸的，当且仅当用下述定义的集合对于所有的$\alpha \in [0, 1]$而言是凸的。

$$\Gamma_\alpha = \{ x \mid f_A(x) \geqq \alpha \} \quad \cdots\cdots (24)$$

一个可选择的而且更为直接的定义如下[1] A是凸的当且仅当

$$f_A\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\} \geqslant \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\} \quad \cdots\cdots (25)$$

对所有x_1，$x_2 \in X$以及对所有的$\lambda \in [0, 1]$成立。注意，这个定义并不意味着$f_A(x)$必须是x的凸函数，这点说明见图4 $n=1$的情况。

说明上述二者定义之间的等价性要注意到如果A在第一个定义之下是凸的，且有

$$\alpha = f_A(x_1) \leqslant f_A(x_2),$$

则由Γ_α的凸性定义得出$x_2 \in \Gamma_\alpha$和$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$。因此，

$$f_A\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\} \geqslant \alpha = f_A(x_1) = \min\{f_A(x_1), f_A(x_2)\}。$$

相反地，如果A在第二个定义之下是凸的，而且$\alpha = f_A(x_1)$,则可以把Υ_α看作为所有满足$f_A(x_2) \geqslant f_A(x_1)$的点之集合。由于(25)，具有形式$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$)的每个点也在$\Gamma_\alpha$，因此$\Gamma_\alpha$是凸集，证毕。

用下面的定理表示凸模糊集的基本性质

定理：如果A和B是凸的，则交集也是凸的。

证明：令$C = A \cap B$，因而有

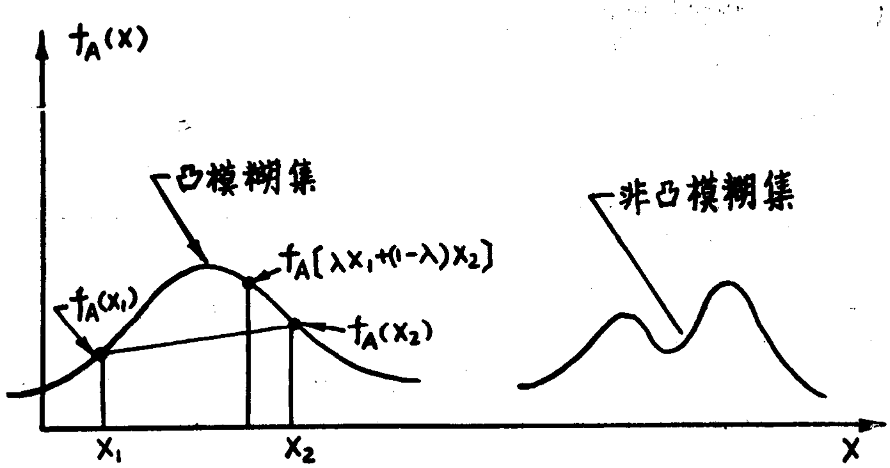

图4　在E^1上凸和非凸模糊集

$$f_C[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$$
$$= \min\{f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2], f_B[\lambda x_1 + (1-\lambda x_2]\} \quad (26)$$

现在，由于A和B是凸的，

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$$
$$f_B\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}\quad\cdots\cdots(27)$$

因此

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{\min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\},\ \min\{f_B(x_1),\ f_B(x)_2\}\}\quad\cdots\cdots(28)$$

或者等价地

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{\min\{f_A(x_1),\ f_B(x_1)\},\ \min\{f_A(x_2),\ f_E(x_2)\}\}\quad\cdots\cdots(29)$$

则

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{f_C(x_1),\ f_C(x_2)\}\quad\cdots\cdots(30)$$

证毕。

有界性

一个模糊集A是有界的，当且仅当对所有的$\alpha>0$，集合$\Gamma_\alpha=\{x\mid f_A(x)\geqslant\alpha\}$是有界的。即，对每一$\alpha>0$，存在有限值$R(\alpha)>0$，使得对所有的$x\in\Gamma_\alpha$，都有$\|x\|\leqslant R(\alpha)$成立。

如果A是有界集，那么对任一$\varepsilon>0$，则存在一个超平面H使得$f(x)\leqslant\varepsilon$在H不包含原点的一侧上的所有x都成立。

例如：考虑集合$\Gamma_\varepsilon=\{x\mid f_A(x)\geqslant\varepsilon\}$，按照假设，这个集合被包含在半径为$R(\varepsilon)$的球里。令H是所假设的任一超平面，因而不包含原点的超平面H之一侧上所有的点都处在外侧或球上，因此所有这样的点有$f(x)\leqslant\varepsilon$成立。

引理：令A是一个有界模糊集，又令$M=\sup_x f_A(x)$（M将被称为A的最大度 The maximal grade)。则至少存在一个点x_0，使得就下述意义而言在x_0是“基本达到”上确界M，即，对每一$\varepsilon>0$，对每一个x_0的球形领域包含了集合

$Q(\varepsilon)=\{x\mid f_A(x)\geqslant M-\varepsilon\}$的点。

证明[1]：考虑有界集的嵌套序列Γ_1，Γ_2，……，这里$\Gamma_n=\{x\mid f_A(x)\geqslant M-M/(n+1)\}$，$n=1$，$2$……。注意对于所有有限的n，$\Gamma_n$是非空的，正象用$M=\sup_x f_A(x)$定义M的理由一样。

令x_n是Γ_n里（$n=1$，2，……）任意选择的点，则x_1，x_2，……是有解闭集Γ_1里点的序列。按Bolzano——Weierstrass定理，这个序列在Γ_1里至少存在一个极限点。比说Γ_1中的x_0。因此x_0的每一球形邻域将包含了序列x_1，x_2，……的无穷多个点，而更特殊地，包含了子序列x_{N+1}，x_{N+2}，……的无穷多个点，这里$N\geqslant M/\varepsilon$。因此，这些子序列的点落在集合$Q(\varepsilon)=\{\mid f_A(x)\geqslant M-\varepsilon\}$里，引理证毕。

严格的和强的凸（Sterit and strong Conoexity）

一个模糊集A是严格的凸，如果集Γ_α，$0<\alpha\leqslant1$，是严格凸的（即，如果在Γ_α里任意两个不同的点之中点位于Γ_α内部）。注意，当A是普通集时，这个定义归结为普通集的严格的凸定义。

一个模糊集A是强凸的，如果对于任意两个不同的点以及开区间(0，1)内任一数λ有

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}>\min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}。$$

注意强凸并不意味着是严格凸，反之亦然。还要注意，如果A和B是有界的，那么它们的并和交也是有界的。类似地，如果A和B是严格地（强地）凸的，则它们的交也是严格地(强)凸的。

令A是凸的模糊集，又令$M=\sup_x f_A(x)$。如果A是有界的，则如上所述，或者是在某些x“达到”上确界，比如说是x_0；或者是至少存在一个点x_0使得就下述意义而言在x_0“基本达到”上确界M，即，对每一$\varepsilon>0$，每一个x_0的球形邻域包含了集合
$Q(\varepsilon)=x\{\mid M-f_A(x)\leq\varepsilon\}$的点。特别是，如果A是强凸的，以及在$x_0$达到上确界M，则$x_0$是唯一的。因为，如果$M=f_A(x_0)$和$M=f_A(x_1)$，这里$x_1\neq x_0$，则当
$x=0.5x_0+0.5x_1$时，有$f_A(x)>M$，这与$M=\max f_A(x)$发生矛盾。

更普通的，令C(A)是X中能“基本达到”上确界M的所有点之集合，我们把这个集合称为A的核心（Core）。在凸模糊集的情况，我们能够断定C(A)的下列性质。

定理。如果A是凸模糊集，则它的核心是个凸集。

证明：

如果在x_0和x_1基本达到上确界M，$x_1\neq x_0$，则具有形式为$x=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1$，$0\leq\lambda\leq1$的所有点x上也是基本达到上确界M的。

最后，令P是以ε为半径，经过x_0和x_1的连线为轴的圆柱形。令x_0^1是半径为ε，球心为x_0的球内的点，x_1^1是半径为ε，球心为x_1的球内的点使得$f_A(x_0^1)\geq M-\varepsilon$和$f_A(x_1^1)\geq M-\varepsilon$成立。于是，利用A和凸性，对$x_0^1\ x_1^1$线段上的任一点u我们有$f_A(u)\geq M-\varepsilon$。此外，利用P的凸性，在$x_0^1\ x_1^1$线段上的所有点将位于P内。

现在，令x是线段x_0x_1上的任一点，则这个点到线段$x_0^1\ x_1^1$的距离必须小于或等于ε，这是由于$x_0^1x_1^1$位于P内的缘故。因此，一个半径为ε、球心为x的球至少包含线段$x_0^1\ x_1^1$一个点，因此至少包含一个点，比如说ω，使得满足$f_A(\omega)\geq M-\varepsilon$，这就证实了在x上基本达到上确界M，于是定理证毕。

推论。如果$X=E^1$，以及A是强凸的，则基本达到上确界M的这种点是唯一的。

模糊集的影（Shadow）

令A是E^n上的模糊集，其隶属函数为$f_A(x)=f_A(x_1,\cdots\cdots,x_n)$，为了简化概念起见，A在超平面H上的影（投影）的概念我们将在下面特殊情况——H是座标超平面，即$H=\{x\mid x_1=0\}$上定义。

特别是A在$H=\{x\mid x_1=0\}$上的投影定义为在E^{n-1}上的模糊集$S_H(A)$，其隶属函数$f_{S_H(A)}(x)$用$f_{S_H(A)}(x_2\cdots\cdots x_n)=\sup_{x_1}f_A(x_1\cdots\cdots x_n)$给出。注意这个定义与(23)是一致的。

交A是凸模糊集时，$S_H(A)$的下列性质是上面定义的直接结果：如果A是凸模糊集，则它在任一超平面上的投影也是模糊集。

两个凸模糊集的投影的一个重要性质是用以下结论表示的

$$S_H(A)=S_H(B)\quad 对所有H\Rightarrow A=B。$$

为了证明这点(2)，只要证明下述缮论就足够了，如果存在一个点，比如x_0，满足：$f_A(x_0) \neq f_B(x_0)$，则存在一个超平面H仅得$f_{HS(A)}(x_0^*) \neq f_{SH(B)}(x_0^*)$，这里$x_0^*$是$x_0$在H上的投影。

假设$f_A(x_0)=\alpha > f_B(x_0)=\beta$，由于B是凸模糊集，则集$\Gamma_\beta=\{x \mid f_B(x)>\beta\}$是凸的，因此存在一个支撑$\Gamma_\beta$的超平面H，并且H通过$x_0$。令H垂直于F，又令$x_0^*$是$x_0$在H上的投影，于是因为$f_B(x) \leqslant \beta$对F上的所有x成立，则我们有$f_{SH(B)}(x_0) \leqslant \beta$。另一方面，$f_{SH(A)}(x_0^*) \geqslant \alpha$。从而$f_{SH(B)}(x_0^*)=f_{SH(A)}(x_0^*)$。而且可以类似明证$\alpha < \beta$的情况。

以上的推断更一般化的形式如下。令A是凸模糊集，但必须不是B，又令$S_H(A)=S_H(B)$对所有的H成立，则A＝Conv B。这里Conv B是B的凸壳。即包含B的最小凸集。更一般地，$S_A(A)=S_H(B)$对所有的H成立，它意味着Conv A＝Conv B。

凸模糊集的分离。(Separation of Convex Fuzzy sets)

普通凸集的古典分离理论主要地陈述为：如果A和B是分离的凸集，则存在一个分离超平面H，使得A在H的一侧而B——在H的另一侧上。

自然要探讨一下，是否能把这个理论开拓到模糊凸集，而不要求A和B是不相交的条件，因为在模糊集的情况里不相交的条件太受限制了。以后我们将看到，这个问题的问答是肯定的。

我们必须建立一些定义作为准备。特别是，令A和B是两个有界的模糊集，令H是E^n用等式$h(x)=0$定义的超平面，满足$h(x) \geqslant 0$的所有点在H的一侧。而满足$h(x) \leqslant 0$的所有点在H的另一侧[3]。令K_H是依赖于H的数，使得在H的一侧有$f_A(x) \leqslant K_H$。而在H的另一侧有$f_B(x) \leqslant K_H$。令M_H是$\operatorname{Inf} K_H$。则数$D_H=1-M_H$被称为A和B用H"分离的度"(the degree of separation of A and B By H)

一般说来，D_H与给定的超平面H无关，但是，它与$\{H_\lambda\}$族有关，带下标λ的H_λ排列在上面，比如说，排列在E^m上。于是，这个问题在于求出这个族中的一个使得能够实现最大可能的分离度。

这个问题的特殊情况是，H_λ是E^n上的超平面，带下标λ的H_λ是排列在E^n上，在该情况下，我们用关系式 $D=1-\overline{M}$ ……………………(31)
定义A和B的"分离度"。上式中 $\overline{M}=\operatorname{Inf} M_H$ ……………………(32)
为简单起见下标λ省略了。

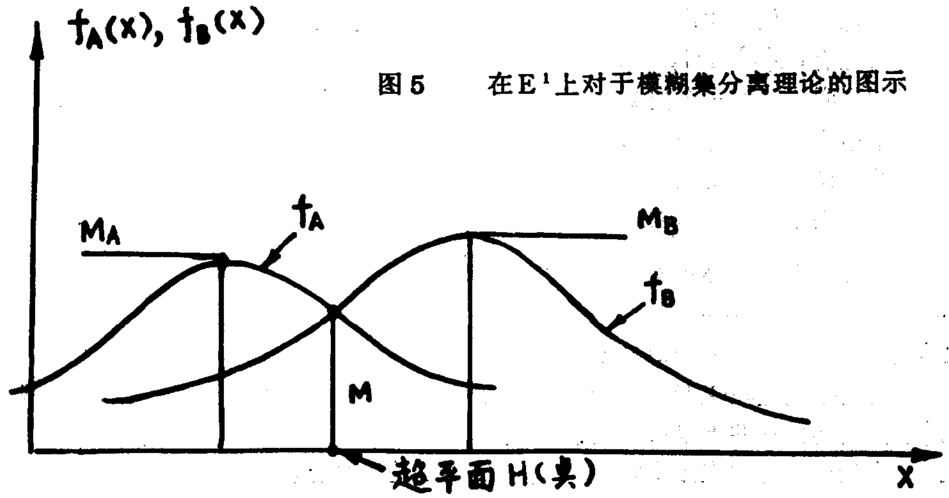

图5　在E^1上对于模糊集分离理论的图示

与D有关的各种论断当中，以下所阐述的实际上是分离理论在凸模糊集上的开拓[4]。

定理： 令A和B是E^n上有界的凸模糊集，其最大度（Maximal grades）分别是M_A和M_B｛$M_A=\sup_x f_A(x)$，$M_B=\sup_x f_B(x)$｝。令M是交$A\cap B$的最大度（$M\doteq\sup_x\min\{f_A(x),\ f_B(x)\}$），则$D=1-M$。

注解： 简单地说，这个定理说明用E^n上的超平面能够达到两个模糊凸集A和B的最大的分离度的值为1减去交$A\cap B$的最大度。这就是在图5 $n=1$所说明的。

证明：

分别地考虑下述两种情况是比较方便的。(1)$M=\min(M_A,M\ )$和(2)$m<\min(M_A,M_B)$。注意后一种情况排除了$A\subset B$或$B\subset A$。

情况1：我们具体地假设$M_A<M_B$，那么$M=M_A$，由有界集的性质我们已经说明了存在一个超平面H，使得$f_B(x)\leqslant M$对H一侧的所有x成立。而在H的另一侧有$f_A(x)\leqslant M$，因为对所有x，有$f_A(x)\leqslant M_A=M$成立。

尚需证明不存在一个$M'<M$，以及不存在一个超平面H使得在H'的一侧$f_A(x)\leqslant M'$，而在H'的另一侧有$f_B(x)\leqslant M'$。

由以下所述立刻推出这点。假设H'和M'存在，而且具体地假定A的核心（即在该集合的点上基本达到上确界$M=M_A$）是在H'的正侧。这点排除了$f_A(x)\leqslant M'$在H'正侧成立的可能性，因此必须是$f_A(x)\leqslant M'$ 对H'的负侧上的点成立，而且对H'正侧的所有点x有$f_B(x)\leqslant M'$成立。所以，在H'正侧的点x都有

$$\sup_x\min\{f_A(x),\ f_B(x)\}\leqslant M',$$

并且对H'负侧的所有点x也一样成立。这意味着整个X中的点x都满足

$$\mathrm{Sup}_x\min\{f_A(x),\ f_B(x)\}\leqslant M'。$$

这与假设 $\mathrm{Sup}_x\min\{f_A(x),\ f_B(x)\}=M>M'$矛盾。

情况2：考虑凸集$\Gamma_A=\{x\mid f_A(x)>M\}$和$\Gamma_B=\{x\mid f_B(x)>M\}$。它们是非空的和不相交的集合，因为若不是这样的，则就得有一个点，比如说是y，使得$f_A(u)>M$与$f_B(u)>M$都成立，因此有$f_{A\cap B}(u)>M$，与假设$M=\mathrm{Sup}_x f_{A\cap B}(x)$矛盾。

因为Γ_A和Γ_B是不相交的，按照普通集合分离理论则存在一个超平面H，使得Γ_A是在H的一侧（比如说是正侧）和Γ_B是在H的另一侧（负侧）。而且，根据Γ_A和Γ_B的定义，对在H负侧的所有点有$f_A(x)\leqslant M$，以及对在H正侧的所有点有$f_B(x)\leqslant M$。

于是我们证明了存在一个把$1-M$作为A和B的分离度的超平面H，从情况1给出的论证得出：这个结论不能认为是A和B的最大的分离度。这就完成了定理的证明。

看来，凸模糊集分离定理与模型识别问题是密切相关的。对这类问题以及优化问题的应用在稍后关于模糊集和它们的性质的著作里将予以探讨。

Received：November 30，1964。

（1）此证明由A.J.Thomasian 所提出。

（2）此证明是建立在G.Dantzig 对于A和B是普通凸集的情况所提出想法的基础上。

（3）注意所述的一些点集通常地包括了H。

（4）这个阐述是建立在E.Berlekamp 提出的基础之上。

论具有模糊约束集的规划

S·A （奥洛夫斯基）

苏联科学院计算中心运筹学教研室

（1976年11月15日）

本文提出了模糊数学规划问题的两个解的概念。第一个解，利用可供选择的模糊集的水平位置。第二个解，则基于矢量最佳化中的Pareto最大值的概念。已经表明，这两个解在以下意义上是等价的，它们给出最大限制函数的相同模糊值。本文提出，如果决策者选择单一元素，那末他的选择就必须不仅基于解的模糊集中的这一元素的隶属度，而且基于增加到最大限度的函数相应值。这方面的情况，与典型的矢量最佳化情况相类似。本文提出的这个方法，将进一步用于以局中人策略的模糊集分析对策论（博奕论）。本文介绍了模糊对称解，它可以为局中人之间的一致提供基础。

一、前　　　言

由Zadeh发明以及由他和其他许多作者，为其在各领域的应用而广泛研究的模糊集方法，所谓不确切定义的世界实际问题上是相当有用的。这个方法有前途的应用之一，是在决策领域。在绝大多数情况下，人们决策是基于某种现象或者某个过程的不完全的或不确切的数据，这个数据经常具有模糊特性，这些问题的模糊集的理论分析，能为在这样情况下的人类行为提供有用的指导原则。

在模糊环境下，决策的第一篇论文是由Bellman和Zadeh写的。在本文里，模糊决策问

（上接十二页）

参　　　考

BIRKHOFF, G, (1948), "Lattice Theory", Am, Math. Soc. Collog. Publ., Vol.25, New York。

HALMOS, P, R, (1960), "Naive Set Theory", Van Nostrand. New York。

KLEENE, S.C. (1952), "Introduction to Metamathematics", P.334, Van Nostrand, New York。

（译自《Information and control》8 .P 338—353，1965。）

（耿春仁译，沈镜心校）