全日制十年制学校

高中数学第二册

习题解答

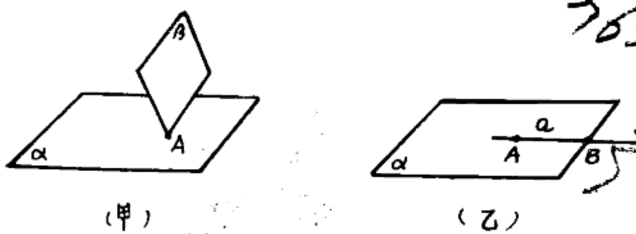
△ 证 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

襄阳师范专科学校数学科
中学数学教材教法教研室

目　　录

习　题　一

1．如图所示，说平面α与平面β只有一个公共点A（图甲）；直线a不全在平面α内（图乙）．这样说法对吗？为什么？



（图1）

答：上述说法不对．因为根据公理2，

若$A\in\alpha\cap\beta$．则

$\alpha\cap\beta=l$，l是过A的直线，直线l上的点都是平面α与平面β的公共点．

又平面是无限伸展的．根据公理1，

若A、$B\in a$，且A、$B\in\alpha$，则$a\subset\alpha$．

2．为什么独轮车要安上两只撑脚？而有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？

答：根据公理3知：不在同一线上的三点可确定一个平面．因为独轮车仅一点着地，所以它必须安上两撑腿；而自行车已有两点着地，所以它只安上一个撑脚即可。

3．一条直线与两条平行直线相交，这三条直线是否在

同一平面内？为什么？

答：在同一平面内．因为根据公理3的推论3，经过两平行直线，有且仅有一个平面．而一条直线与两平直行线相交，便有两个交点．由公理1知这一直线也在这两平行直线确定的平面内．

4．三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

答：一定都是平面图形．因为三角的三个顶点不在同一条直线上．根据公理3，它们在同一平面内．而三角形的三条边上都有两点在这平面内，根据公理1便知这三边都在同一平面内．

由于梯形的两底边平行，根据推论3，则知它们可确定一个平面．而两腰都有两点在此平面内．因此它们都在同一平面内．

5．过已知直线外一点向直线上三点分别连结三条线段，这三条线段是否在同一平面内？为什么？

答：在同一平面内．因为若设$A\in l$，则由推论1知，过直线l和直线外一点A，有且仅有一个平面α．又设B、C、$D\in l$，则$B\in\alpha$．∴直线$AB\subset\alpha$同理，AC、$AD\subset\alpha$．

6．四条线段顺次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

答：不一定．只有当这个图形的两条对角线相交时，由公理3的推论2知，便是平面图形，否则不是．

7．要把一个圆木顺着锯开成两半，并使锯面平整，为什么要在两侧画两条平行线？

答：因为根据公理3的推论3两条平行线可以确定一个平面．所以顺着圆木两侧的平行线锯开，便可使锯面平整．

8 （略）

习　题　二

1．（略）

2．两条直线没有公共点，这两条直线的位置会是怎样的？

答：平行或异面．

3．（略）

4．已知E、F、G、H分别是空间四边形的四条边AB、BC、CD、DA的中点，求证：四边形$EFGH$是平行四边形．

证明：连BD

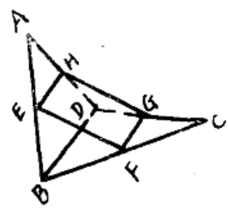
$\because EH$为$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore EH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$.

同理：　$FG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$.

$\therefore EH \mathrel{\underline{\parallel}} FG$.

则四边形$EFGH$为平行四边形



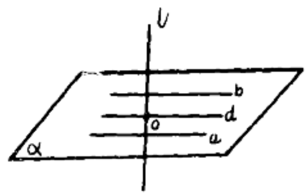
（图2）

5．什么叫两条异面直线所成的角？两条异面直线在什么情况下互相垂直？空间的两条垂直直线一定相交吗？

答：经过空间任意一点O，引与两条已知异面直线平行的两条直线，它们在O点相交所成的不大于90°的角，叫做

两条异面直线所成的角．当两条异面直线所成的角是直角时，则此两条异面直线互相垂直．空间的两条垂直直线不一定相交．如教室内黑板的上下水平直线同对面墙角竖直直线垂直但不相交．

6．**求证**：如果一条直线和两条平行线中的一条垂直，那么也和另一条垂直．



（图3）

证明：设$a \parallel b$，a、$b \subset \alpha$，

$l \cap \alpha = o$，$l \perp a$．

过O作直线d，使

$d \parallel a$．

$\because a \parallel d$，$a \parallel b$，

$\therefore d \parallel b$．

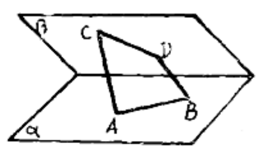
$\therefore l$与d的交角即是l与a的交角，亦是l与b的交角，

又：$l \perp a$．

$\therefore l$与d的交角是直角，

则l与b的交角亦为直角，即$l \perp b$．

7．和两条异面直线AB、CD同时相交的两条直线AC、BD一定是异面直线．为什么？



（图4）

证明：（用反证法）如图，

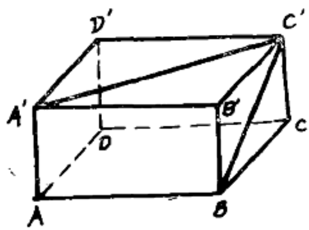
设直线$AB \subset \alpha$，直线$CD \subset \beta$，若设直线AC、$BD \subset$平面γ，则A、C、B、$D \in$平面γ

由公理1得：

$AB \subset \gamma$，$CD \subset \gamma$。

这与题没矛盾．故AC、BD一定是异面直线．

8．如图，已知长方体的长和宽都是$4Cm$．高是$2Cm$，（1）BC和$A'C'$所成角是多少度？（2）AA'和BC'所成角是多少度？（3）$A'B'$和DD'；$B'C'$和CD的距离各是多少？



（图5）

解：（1）$\because B'C' \parallel BC$

$\therefore A'C'$和$B'C'$所成的角就是$A'C'$和BC所成的角．

$\because A'B'C'D'$为正方形

$\therefore \angle A'C'B' = 45°$

故$A'C'$和BC所成的角是$45°$

（2）$\because AA' \parallel BB'$

$\therefore BB'$和BC'所成的角就是AA'与BC'所成的角，在直角$\triangle B'BC'$中

$$\because tg\angle B'BC' = \frac{B'C'}{BB'} = \frac{4}{2} = 2,$$

$\therefore \angle B'BC' = arctg2$。

故AA'和BC'所成的角等于$arctg2$。

（3）$\because A'B' \perp A'D'$，$A'B' \cap A'D' = A'$，

$DD' \perp A'D'$，$DD' \cap AD' = D'$，

$\therefore A'D'$是$A'B'$和DD'的公垂线段．

而$A'D' = 4Cm$，

$\therefore A'B'$和DD'的距离是$4m$．

同理：$B'C'$和CD的距离是$2Cm$．

习　题　三

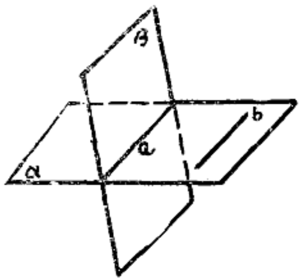
1．画出两个相交平面，在一个平面内画一条直线和另一平面平行．

解：如图，平面α∩平面β＝a直线，

直线$b\subset\alpha$，

且$b /\!/ a$，

则$b /\!/ \beta$．



（图6）

2．用反证法证明：直线与平面相交只有一个交点．

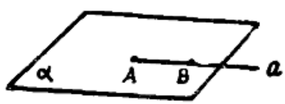
证明：假设直线a与平面α相交有两个交点，不妨令其为A、B，则$A\in\alpha$，$B\in\alpha$．

$\therefore A$、$B\in a$，

$\therefore a\subset\alpha$．

而这与题设矛盾．

所以直线与平面相交只有一个交点．



（图7）

3．（1）一条直线和另一条直线平行，它就和经过另一条直线的任何平面平行，这是否正确？

（2）一条直线和一个平面平行，它就和这个平面内的任何直线平行，这是否正确？

答：（1）不正确．因两平行直线可以在同一平面内．

（2）不正确．如教室黑板的水平线平行地面，但它却

和教室从前到后的墙脚不平行而垂直.

4. 空间的任意两条直线，能否有公共的平行平面？

答：有. 若两条直线不平行（异面或相交），则过两条直线外任意一点P，分别作两直线的平行线，那么此两直线所确定的平面即是；若两直线平行，则平行一直线而又不经过另一直线的平面即是两直线的公共平行平面.

5. **求证**：如果平面外的两条平行直线中有一条和平面平行，那么另一条也和这个平面平行.

证明：设直线$a\parallel$直线b. 且$a\parallel$平面α. 过直线a作平面β，若$\alpha\cap\beta=c$.

$\because a\parallel\alpha$,

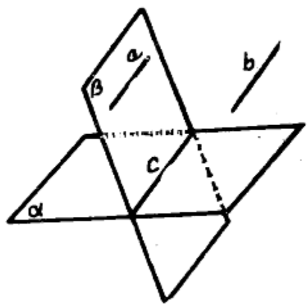
$\therefore a\parallel c$.

又$a\parallel b$

$\therefore b\parallel c$,

而$c\subset\alpha$,

$\therefore b\parallel\alpha$.

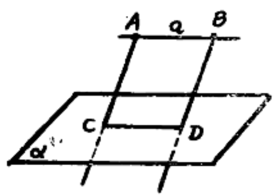


（图8）

6. **求证**：如果一条直线与一个平面平行，那么夹在这条直线和平面间的平行线段相等.

证明：设$a\parallel\alpha$，A、B为直线a上任两点，且直线$AC\parallel$直线BD，C、D为平面α内两点，则AC、BD确定的一个平面交α于CD. 由直线和平面平行的性质有：

$AB\parallel CD$.

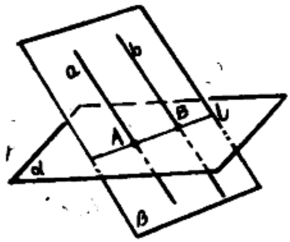


（图9）

则$ACDB$为平行四边形。

故 $AC=BD$。

7．**求证**：如果两条平行线中的一条和一个平面相交，那么另一条也和这个平面相交。



(图10)

证明：方法（一）（反证法）：设直线$a\parallel$直线b，$a\cap$平面$\alpha=A$

若$b\parallel\alpha$，由题5知：

$a\parallel\alpha$。

而这与$a\cap\alpha=A$矛盾。则$b\nparallel\alpha$。

若$b\subset\alpha$，因$a\parallel b$,则据直线与平面平行的判定定理得：

$\therefore a\parallel\alpha$

而这亦与$a\cap\alpha$矛盾。则$b\not\subset\alpha$。

故b也和平面α相交。

方法（二）：设直线$a\parallel$直线b、$a\cap$平面$\alpha=A$。过a、b作平面β。则$A\in\beta$。

$\therefore\alpha\cap\beta=$过$A$的直线$l$。

由平面几何可知，b与l必有一交点B。从而$B\in\alpha$。

即$b\cap$平面$\alpha=B$。也就是第二条平行线也与已知平面相交。

8．**求证**：过两条异面直线中一条上的各点，引另一条直线的平行直线，这些直线必在同一平面内。

证明：设a、b为异面直线。A、B、C、…为a上任意点。过这些点分别作$l_1\parallel b$、$l_2\parallel b$，$l_3\parallel b$，……，

$\because l_1 \cap a = A$,

则l_1和a可确定一平面α。

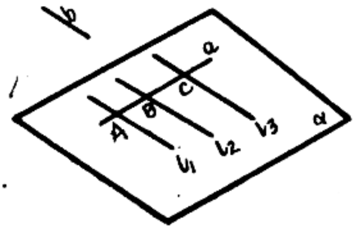
又B、C、……$\in a$,

而$a \subset \alpha$，$\therefore B$、C、……$\in \alpha$。

且$l_1 \parallel b$，$l_2 \parallel b$、$l_3 \parallel b$……

$\therefore l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$

则l_2、l_3……$\subset$平面α。



（图11）

9．直线AB平行于平面α，经过AB的一组平面和平面α相交，求证它们的交线a、b、c……是一组平行线。

证明：由直线与平面平行的性质定理知：

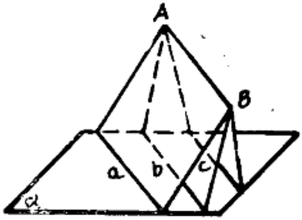
$AB \parallel a$，$AB \parallel b$。

则由公理4得

$a \parallel b$。

同理：$b \parallel c$，……。

$\therefore a \parallel b \parallel c$……。



（图12）

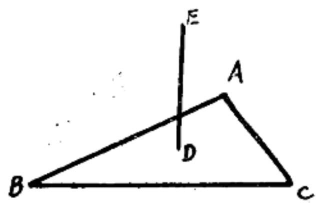
习 题 四

1．（略）

2．**求证**：和三角形两边同时垂直的直线，也和第三边垂直。

证明：设$\triangle ABC$．$ED\perp AB$、$ED\perp AC$．则由直线与平面垂直的判定定理知$ED\perp$平面ABC．

由定义知$ED\perp BC$．



（图13）

3．**求证**：如果一条直线平行于一个平面，那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直．

证明：设直线$a\parallel$平面α，$d\perp\alpha$，d为任一直线．过a作平面β，$\beta\cap\alpha=b$，

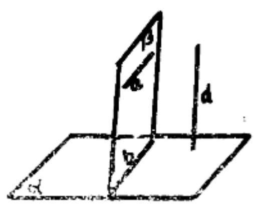
则　$a\parallel b$．

$\because b\subset\alpha$，

$\therefore d\perp b$．

$d\perp a$

即平面α的任何垂线都与直线a垂直．



（图14）

4．直角三角形ABC在平面α内，D是斜边AB的中点，$|AC|=6cm$，$|BC|=8cm$，$EC\perp\alpha$，$|EC|=12cm$，求

EA、EB、ED的长，

解：$\because EC\perp\alpha$，

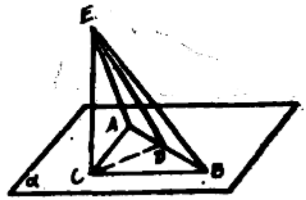
$\therefore EC\perp AC$。

在$rt\triangle ECA$中，$|EC|=12cm$，$|AC|=6cm$，

$\therefore |EA|=\sqrt{EC^2+AC^2}$

$=\sqrt{12^2+6^2}$

$=6\sqrt{5}$ (cm)；



（图15）

同理，在$rt\triangle ECB$中，$|EB|=\sqrt{EC^2+BC^2}$

$=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$ (cm)；

而在$rt\triangle ABC$中，$|AB|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (cm)，

$\because D$是AB的中点，

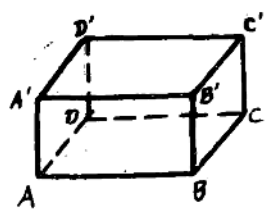
$\therefore |DC|=\frac{1}{2}|AB|=5$ (cm)，

同理在$rt\triangle ECD$中，

$|ED|=\sqrt{EC^2+DC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$ (cm)．

5．如图，钳工检查方块工件的棱BB'是否和底面$A'C'$垂直，只要检查$\angle BB'A'$和$\angle BB'C'$是否直角就可以了，为什么？

答：若$\angle BB'A'$和$\angle BB'C'$至少一个不是直角，则由定义BB'就不垂直$A'B'$和$B'C'$所确定的平面$A'C'$。



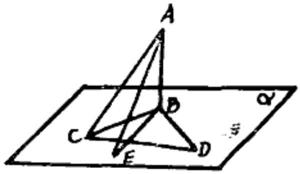
（图16）

若$\angle BB'A'$和$\angle BB'C'$均

为直角，即$BB' \perp A'B'$，$BB' \perp BC'$，

则由判定定理可知，BB'垂直平面$A'C'$。

6．如图，$|AB|=5cm$，$BC \perp AB$，$BD \perp AB$。在BC、BD所在的平面α内有一点E、$|BE|=7cm$，(1)EB和AB，CD和AB成多少度？(2)AE的长是多少？



（图１７）

解：(1)$\because E \in \alpha$，$B \in \alpha$，

$\therefore EB \subset \alpha$；

$\because BC \perp AB$、$BD \perp AB$，

$\because$由判定定理知，$AB \perp$平面α．

$\therefore AB \perp EB$

即EB和AB成$90°$角．

同理，CD和AB也成$90°$；

(2)$rt\triangle ABE$中，$\because |AB|=5cm$，$|BE|=7cm$，

$\therefore |AE|=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}(cm)$．

7．有一旗竿高８m，它的顶点挂一条$10m$的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上两点（和旗竿脚不在一直线上）．如果这两点都和旗竿脚距离６m，那么旗竿就和地面垂直．为什么？

证明：如图，已知$|AO|=8m$．

$|AB|=|AC|=10m$，

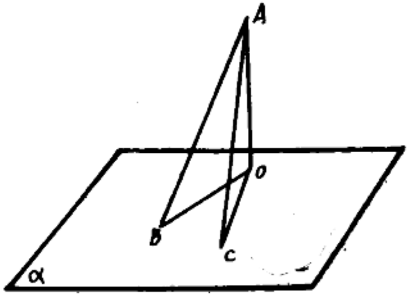
$|BO|=|CO|=6m$．

$\because$在$\triangle AOB$和$\triangle AOC$中，$|AB|^2=100$．

$|AO|^2+|BO|^2=8^2+6^2=100$，

$|AO|^2+|CO|^2=8^2+6^2=100$，

$\therefore |AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2, |AB|^2 = |AO|^2 + |CO|^2,$



(图18)

则由勾股定理的逆定理可知，

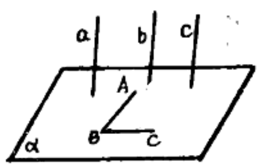
$AO \perp BO$，$AO \perp CO$.

由判定定理知，

$AO \perp BO$与CO所在的平面α.

8．在一个工件上同时钻很多孔时，常用多头钻，多头钻杆都是互相平行的．在工作时，只要调整工件表面和一个钻杆垂直，工件表面就和其他钻杆都垂直．为什么？

答：假定钻杆a和工件表面α垂直，则由直线和平面垂直的定义，a就垂直于α内任两条相交直线AB、BC，由$a /\!/ b /\!/ c$……知：b、c、……也均垂于AB、BC．则它们也都和工件表面α垂直．



(图19)

9．**已知**平面α、β交于CD，线段EB、EA分别垂直于平面α、β．求证CD垂直经过EA、EB的平面．

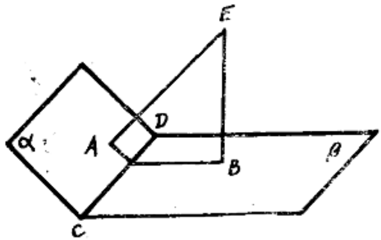
证明：$\because EA\perp\alpha$，

又$CD\subset\alpha$，

$\therefore EA\perp CD$.

同理$EB\perp CD$.

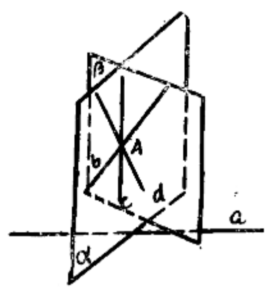
$\therefore CD$垂直于经过EA、EB的平面.



（图20）

10．**求证**：过一点和一条直线垂直的所有直线都在一个平面内.

证明：设b、c为过A点的二直线，且$b\perp$直线a，$c\perp$直线a.过b、c作一平面α，则$a\perp\alpha$．假设有一直线d过A点，且$d\perp a$．若$d\not\subset\alpha$，过直线c、d作平面β，



（图21）

则$a\perp\beta$，

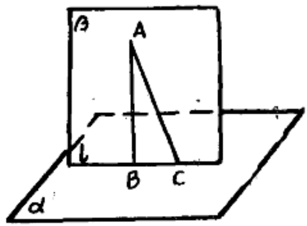
而$\alpha\cap\beta=c$.

则一直线同时垂直两相交平面这是不可能的.

$\therefore d\subset\alpha$.

故过A点的所有垂直于直线a的直线在同一平面内.

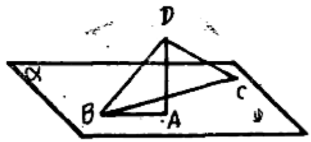
11．试用反证法证明，过一点和一个平面垂直的直线只有一条．



（图2 2）

证明：若过一A点有两条直线AB、AC均与平面α垂直，设AB、AC所确定的平面β与α的交线为l，便有$AB\perp l$，$AC\perp l$．则在平面β中过A点有两条直线与一条直线垂直．这是不可能的．故过一点和一个平面垂直的直线只有一条．

12．从平面外一点D向平面引垂线DA及斜线DB、DC．已知$|DA|=a$，$\angle BDA=\angle CDA=60°$，$\angle BDC=90°$求$BC$的长．



（图2 3）

解：$\because$如图$DA\perp\alpha$，

$\therefore DA\perp AB$．

则$\triangle DAB$为$rt\triangle$

又$\angle BDA=60°$，

$|DA|=a$，

$\therefore |BD|=2|DA|=2a$．

同理$|DC|=2a$．

$\because \angle BDC=90°$．

$\therefore |BC|=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}\,a$．

13．有一方木料如图，上底面有一点E，要经过点E在上底面上画一条直线和C、E的连线垂直，应怎样画？

答：根据三垂线定理，连EC'，过E在上底面上作$FG\perp EC'$．