高等代数
内容提要及题解

（上）

GAODENG DAISHU
NEIRONGTIYAO
JITIJIE

宁德师专数学科

高等代数内容提要及题解

宁德师范专科学校
数学系高等代数教研组

（上）

前　　言

为了响应党的十一届三中全会关于全党工作的着重点转移到四个现代化上来的伟大号召，我们着手教材建设工作，借以提高业务水平和教学质量；也为部分青年教师提供教学参考资料；同时考虑到能对业务自学者和中学教师有所稗益，我们编写了数学分析，高等代数，解析几何，概率统计的内容提要及题解．《数学分析内容提要与题解》（上）和本书上册今已出版，其余也将陆续出版。

本书共分上、下两册，上册内容包括多项式、行列式、线性方程组，矩阵和二次型，因考虑到高等师范学校学生应具备有初等数论一些知识的必要，故在上册增加了初等数论初步一编，并将它放在多项式之前。下册内容包括线性空间、线性变换、λ—矩阵、欧几里得空间及近世代数初步。

本书内容安排的系统以北京大学数学力学系编的《高等代数》一书为兰本，习题来源及主要参考开列于后。

在解题中，当引用前面 §× 已解过的习题时，若未特别说明，均指同一章的节数。

上册由潘斯一、詹碧卿、苏林宁老师编写，并经杨克仁老师审阅。

因为我们水平不高且业余时间有限，所以无论在选题上或解题过程中都一定存在不少的缺点以至错误，恳望同志们随时给予批评指教。

宁德师范专科学校

数学系高等代数教研组

一九七九年七月

第 一 编

初等数论初步

勘 误 表

	误	正
第9页　倒数第二行	$d\mid 0,\ d\mid 1$	$d\mid a,\ d\mid b$
第15页　第一行	$(2^{2m}+2^{2n+1}+2^{n+1}x^m)$	$(x^{2m}+2^{2n+1}+2^{n+1}x^m)$
第17页　倒数第四行	$Q^2=N_k$	$Q^2=N^k$
第23页　倒数第一行	$(-1)^{-n1}$	$(-1)^{n-1}$
第33页　倒数第一行	$2^{2^{k+1}}=(2^{2^k})^2$	$a^{2^{k+1}}=(a^{2^k})^2$
第68页　倒数第三行	$(x-1)\mid f(x)$	$(x-1)\mid f(x^n)$
第69页　第二行	$f_1(x^3)+f_2(x^3)$	$f_1(x^3)+xf_2(x^3)$
第128页　第四、六、七、九行	$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$	$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$
第136页　第七行行列式中	$C_{n^a}^{n-1}$	$C_{a_n}^{n-1}$
第154页　第十一行	$2\alpha^2+4\alpha=-2$	$2\alpha^2+4\alpha=2$
第184页　第十二行	$\sum_{\lambda=1}^{n} a_i x_i$	$\sum_{\lambda=1}^{n} a_i x_{i1}$
第193页　第十三行第一个矩阵中	$cd+d^2$	$cb+d^2$
第206页　第七行	$\lvert A_{22}\rvert\lvert A_{22}\rvert$	$\lvert A_{22}\rvert\lvert A_{33}\rvert$
第212页　第八行	场	均
第218页　第九行	$2\sum_{j=2}^{n} a_1 j x_1 x_j$	$2\sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j$
第220页　第十七行	$a_1 \neq 0$	$a_{1j} \neq 0$
第224页　倒数第五行	$2x_2x_2$	$2x_1x_2$
第229页　倒数第七行	$y\ y$	$y_i\ y_j$
第230页　第十七行	1	1_i
第235页　第十三行	$B=T_k' A_k T_k$	$B_k=T_k' A_k T_k$
第237页　第六行	$\lvert A\rvert \leqslant a_{nn} p_{-n1}$	$\lvert A\rvert \leqslant a_{nn} p_{n-1}$

第226页　凡是行列式符号都应改为矩阵符号

参 考 书 目

高等代数	北大数学力学系几何与代数教研室代数小组 编	人民教育出版社	1978
线性代数	谢邦杰编	人民教育出版社	1978
代数学引论	许以超编著	上海科学技术出版社	1966
高等代数	周伯埙编	人民教育出版社	1966
高等代数	张禾瑞、郝炳新编	人民教育出版社	1960
线性代数	武汉大学数学系数学专业编	人民教育出版社	1977
线性代数	蒋尔雄、高坤敏、吴景琨编	人民教育出版社	1978
初等数论	闵嗣鹤、严士健编	高等教育出版社	1957
从哥德巴赫猜想谈起	王连笑	天津人民出版社	1978
历届中学生数学竞赛题	郭友朋等编	福建人民出版社	1979

* * *

高等代数习题集	Д.К.Фаддеев, И.С. Соминскии合著	(丁寿田译)
高等代数教程	А.Г.Курош著	(柯　召译)
线性代数基础	А.И.Мальцев著	(柯　召译)
线性代数学	И.М.Гельфанд著	(刘亦珩译)
数与多项式	И.В.Прокуряков著	(吴品三译)
数论基础	И.М.Виноградов著	(裘光明译)
整数论算术习题和练习	У.С.Давыдов著	(王松伦译)

人名译名对照表

Binet	拜尼特
Capelli	卡泼尔
Cartan	卡丹
Cauchy	柯西
Cramer	克拉姆
Descarten	笛卡尔
Eisenstein	爱森斯坦因
Euler	欧拉
Fermat	费尔玛
Gauss	高斯
Hadamard	哈达马
Kronnecker	克朗南格
Lagrange	拉格朗日
Laplace	拉普拉斯
Newton	牛顿
Sturm	施斗姆
Vandenmonde	
Witt	
Буняковск	布涅亚科夫斯基

目　录

第三编 线性代数

第一章 数的整除性

整除是数论中最基本的概念。本章从这个基本概念出发，扼要地介绍了整除、带余除法、公因数、公倍数、质数（素数）、算术基本定理等主要内容，并在例题中体现它们。

有一条众所周知的事实：“把多于n个的物体放在n个匣子中，则至少有一个匣子不止放一个物体。”这就是有名的“重复原则”，它虽然不属于“数论”中的定理，但是，如果我们在解题过程中把它加以灵活的应用，常可收到良效。因此，在本章（也包括以后章节）中配备有一定数量的利用到“重复原则”的例题。

§1 整除·带余除法

【内容提要】

一、数的整除

设a、b是任意两个整数，其中$b\neq 0$，如果存在一个整数q，使得

$$a=bq$$

成立，则称b整除a或a被b整除。记为$b|a$，这时，b称为a的**因数**，a称为b的**倍数**。

如果上述的整数q不存在，称b不能整除a或a不被b整除，记为$b\nmid a$。

数的整除性具有以下三条基本定理：

定理1：若c整除b，b整除a，则c也整除a。

定理2：若c整除a和b，则c整除$a+b$及$a-b$。

定理3：若c整除a_1，a_2，…，a_n，而$q_1,q_2,\cdots q_n$是任意n个整数，则c整除

$$q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n.$$

二、带余除法

若a，b是两个整数，其中$b>o$，则存在着两个整数q和r，使得

$$a=bq+r\qquad(0\leqslant r<b)$$

成立，且q及r是唯一的。

这时，q称为a被b除所得的不完全的**商**，r称为a被b除所得的**余数**，显然，这时候r就是$0,1,2,\cdots,b-2$，$b-1$这b个数中的一个。

如果上式$a=bq+r$（$0\leqslant r<b$）中r大于除数b的一半，则让q增加1，即写成

$$a=b(q+1)+r'$$

这时的余数 r'就是负数了。在这样的意义下，整数 a 被 b（$b>0$）除时，余数 r 就可能有以下情况：当 b 是奇数时，r 是 $-\frac{b-1}{2}$，…，-1，0，1，…，$\frac{b-1}{2}$中的一个；当 b 是偶数时，r 是 $-\frac{b}{2}$，…，-1，0，1，…，$\frac{b}{2}-1$ 或 $-\frac{b}{2}+1$，…，-1，0，1，…，$\frac{b}{2}$中的一个，这样的 r 我们称它为最小绝对值余数。

【习题选解】

1 求证任意 $n+1$个整数中，总可以找到两个数，它们的差是 n 的倍数。

证：因为任意整数被 n 除时，仅能有 n 种不同的余数，于是根据重复原则，知当给定 $n+1$ 个整数后，总可以在其中找到两个数，它们被 n 除时余数相同，因此，这两个数的差就是 n 的倍数。

2 求证任意 n 个整数中总可以取出 k 个（$1\leqslant k\leqslant n$），使它们的和被 n 整除。

证：记 n 个整数为 a_1，a_2，…，a_n，则由此 n 个整数，我们又可以得到 n 个整数 s_1，s_2，… s_n，其中

$$s_i=\sum_{j=1}^{i} a_j \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

因为 s_1，s_2，…，s_n 这 n 个数被 n 除时，至多有 n 种不同的余数：0，1，2，…，$n-1$。若其中有一个余数为0，则命题成立，若其中任意一个被 n 除时，余数皆不为0，则总可以找到两个数 s_p，s_q（$p<q$），它们被 n 除时余数相等，于是

$$s_q-s_p=\sum_{t=p+1}^{q} a_t$$

被 n 整除。

3 平面上五个整点（坐标是整数的点），证明总可以找到两点，连结这两点线段的中点也是整点。

证：因为平面上整点的纵横坐标之奇偶性的一切可能搭配情况为：（奇、奇）、（奇、偶）、（偶、偶）、（偶、奇），可见在五个整点中至少有两点其纵、横坐标之奇偶性配搭相同，又因为奇数与奇数之和为偶数，偶数与偶数之和亦为偶数，它们均能被 2 整除，于是奇偶性配搭相同的点即为满足要求的点。

4 设 a，b，c，d 是四个整数，求证 $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)\cdot(c-d)$ 被12整除。

证：设 $s=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$。因所有整数被 3 除所得的余数只可能是 0，1，2，故 a，b，c，d 中必有两个被 3 除所得余数相同，它们的差是 3 的倍数，所以有 $3\mid s$。

又 a，b，c，d 被 4 除所得的余数只能是 0，1，2，3。若其中有两个被 4 除得的余数相

同，则它们的差是4的倍数，于是$4\mid s$，若余数均不相同，不妨设

$$a=4a_1,\quad b=4b_1+1,\quad c=4c_1+2,\quad d=4d_1+3$$

则 $a-c=2(2a_1-2c_1-1)$，$b-d=2(2b_1-2d_1-1)$，所以仍有$4\mid s$。

这样一来，s既被3整除，又被4整除，所以它必被12整除。

5 证明连续k个整数中恰有一个整数被k整除。

证： k个连续整数可表为$a+i$（$i=0,1,2,\cdots,k-1$），由带余除法知，a被k除的余数可能为r，$r=0,1,2,\cdots,k-1$。

1）若$r=0$，则命题成立。

2）若$r\neq0$，则必有$a+(k-r)$被k整除。

因为$0<r<k$，所以$0<k-r<k$，从而

$$a+(k-r)\in\{a+i\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1\}.$$

由1），2）知命题成立。

6 证明：若a不是5的倍数，则a^2+1与a^2-1中恰有一个数被5整除。

证： 因为$a^2-1=(a+1)(a-1)$，$a^2+1=(a+2)(a-2)+5$，而$a-2$，$a-1$，a，$a+1$，$a+2$是五个连续整数。又a非5的倍数，所以$a-2$，$a-1$，$a+1$，$a+2$中必有一个数被5整除。若$a+1$，$a-1$中有一个数被5整除，则$5\mid(a^2-1)$，若$a+2$，$a-2$中有一数被5整除，则$5\mid a^2+1$，但$(a^2+1)-(a^2-1)=2$不是5的倍数，所以a^2+1与a^2-1不能同时是5的倍数。于是a^2+1与a^2-1中有且仅有一数被5整除。

7 试证k个连续整数之积恒为k！所整除。

证： 当$k=2$时，命题显然成立。

今设$k<t$时，命题成立。以p_n表示由n开始的连续t个整数之积：$n(n+1)\cdots(n+t-1)$于是$p_{n+1}=(n+1)(n+2)\cdots(n+t)$，所以$np_{n+1}=(n+t)p_n=np_n+tp_n$。所以

$$p_{n+1}-p_n=\frac{p_n}{n}\cdot t=(t-1\text{个连续整数之积})\times t=M(t!)$$

因$p_1=t!$，故由上式可推出p_2，p_{-2}亦为$t!$之倍数。反复应用上式，于是推出对任意整数n，均有p_n为$t!$之倍数，从而命题得证。

8 证明$6\mid n(n+1)(2n+1)$

证： 因为
$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1)&=n(n+1)(n+2+n-1)\\&=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

上式是两个连续三整数之积的和。由上题之证得$6\mid n(n+1)(2n+1)$。

9 证明$24\mid n(n^2-1)(3n+2)$。

证： 因
$$\begin{aligned}n(n^2-1)(3n+2)&=n(n-1)(n+1)(2n+n+2)\\&=(n-1)n(n+1)(n+2)+2n(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

上式第一部分是四个连续整数之积，故被4！=24整除；第二部分因含有三个连续整数之积，故必为3整除，又当n为偶数时，$2n^2$被8整除，当n为奇数时，$2(n-1)(n+1)$被8整除，于是它也被24整除。故命题得证。

10　设n是奇数，证明n^2被8除时余1。

证：因为奇数n可以表为$2m+1$（m是任意整数）。于是

$$n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=4m(m+1)+1$$

因$m(m+1)$是两连续整数之积，所以必是2的倍数，即$m(m+1)=2q$（q是整数），于是$n^2=4m(m+1)+1=8q+1$因而n^2被8除时余1。

11　证明三个连续整数的立方和被9整除。

证：设三个连续整数为$a-1$，a，$a+1$，则

$$a^3+(a-1)^3+(a+1)^3=3a^3+6a=3a(a^2+2)=3a(a-1)(a+1)+9a,$$

$a(a-1)(a+1)$是三个连续整数之积，所以$3\mid a(a-1)(a+1)$。

因而$9\mid 3a(a-1)(a+1)$。又$9\mid 9a$，所以有9整除$3a(a-1)(a+1)+9a$即9整除$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3$。

12　设a不是2的倍数也不是3的倍数，试证明$24\mid a^2-1$。

证：依题意得$a=6k\pm1$，而$(6k\pm1)^2-1=12k(3k\pm1)$。若k为奇数，则$2\mid(3k\pm1)$，若k为偶数，则$2\mid k$，所以$24\mid a^2-1$。

13　若一个三位数是37的倍数，则轮换它的数字所得到的数也是37的倍数。

证：设$\overline{abc}=a\times100+b\times10+c$被37整除，则

$$\begin{aligned}\overline{abc}-\overline{bca}&=a\times100+b\times10+c-(b\times100+c\times10+a)=\\&=99a-90b-9c=9(11a-10b-c)=\\&=-9[(100a+10b+c)-111a]\end{aligned}$$

所以$37\mid(\overline{abc}-\overline{bca})$。从而$37\mid\overline{bca}$；同理可证$37\mid\overline{cab}$。

14　推广等式：$1\times9+2=11$；$12\times9+3=111$；$123\times9+4=1111$等。

解：很自然地想到上面等式可推广为

$$\overline{123\cdots(n-1)}\times9+n=\overbrace{111\cdots1}^{n个}$$

下面我们证明它是正确的。

当$n=1$，2，3时，显然已正确。设$n=k$时，上式正确。则当$n=k+1$时

$$\overline{123\cdots k}\times9+k+1=[\overline{123\cdots(k-1)}\times10+k]\times9+k+1=$$

$$=[\overline{123\cdots(k-1)}\times9+k]\times10+1=\overbrace{11\cdots1}^{k个}\times10+1=\overbrace{11\cdots1}^{k+1个}$$

所以对任意正整数n，都有$\overline{123\cdots(n-1)}\times9+n=\overbrace{111\cdots1}^{n个}$。

15 由同样3^n个数字组成的数被3^n整除。

证：当 $n=1$ 时，$\overline{aaa}$ 是 3 的倍数，命题成立。设 $n=k$ 时，$\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k个}$ 被3^k整除，当 $n=k+1$ 时

$$\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^{k+1}个}=\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{3^k个}\underbrace{aa\cdots a}_{3^k个}\underbrace{aa\cdots a}_{3^k个}}=$$

$$=10^{2\cdot 3^k}\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k个}+10^{3^k}\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k个}+\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k个}=$$

$$=(10^{2\cdot 3^k}+10^{3^k}+1)\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^k个}$$

因为 $10^m=3A+1$ 所以 $10^{2\cdot 3^k}+10^{3^k}+1$ 是 3 的倍数，所以 $\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{3^{k+1}个}$ 被3^{k+1}整除。

所以，对任意的正整数 n，命题成立。

16 求证对任意整数 $n\geqslant 0$，$N=2^{4n+1}-4^n-1$ 是 9 的倍数；$8N+9$ 是完全平方数。

证：$2^{4n+1}-4^n-1=2\cdot 4^{2n}-4^n-1=(2\cdot 4^n+1)(4^n-1)$，因 $3\mid(2\cdot 4^n+1)$，$3\mid(4^n-1)$，所以 $9\mid N$。

$8N+9=8(2^{4n+1}-4^n-1)+9=2^{4n+4}-2^{2n+3}+1=2^{2(2n+2)}-2\cdot 2^{2n+2}+1=$

$=(2^{2n+2}-1)^2$ 所以 $8N+9$ 是完全平方数。

17 求证：对大于 1 的整数 n，$n^{n-1}-1$ 被 $(n-1)^2$ 整除。

证：因 $n^{n-1}-1=[(n-1)+1]^{n-1}-1=\sum\limits_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^{i}(n-1)^{(n-1)-i}$

又当 $i=n-2$ 时，$C_{n-1}^{i}=C_{n-1}^{n-2}$ 被 $n-1$ 整除。且 $(n-1)^{n-1-i}=n-1$，所以，当 $i=n-2$ 时，$(n-1)^2\mid C_{n-1}^{i}(n-1)^{n-1-i}$；而当 $i<n-2$ 时，显然有 $(n-1)^2\mid(n-1)^{n-1-i}$，于是有

$$(n-1)^2\mid\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^{i}(n-1)^{n-1-i}$$

18 若 ax_0+by_0 是形如 $ax+by$（x,y 是任意整数，a,b 是两个不全为零的整数的数中的最小正数，证明：$(ax_0+by_0)\mid(ax+by)$。其中 x,y 是任意整数。

证：因 $ax+by$ 是整数且 $ax_0+by_0>0$，由带余除法知

$$ax+by=(ax_0+bx_0)q+r\quad(q\text{是整数},\ 0\leqslant r<ax_0+by_0)$$

所以　　$r = ax + by - (ax_0 + by_0)q = a(x - x_0q) + b(y - y_0q)$

显然，r也是形如$ax + by$（x,y是任意整数，a,b不全为0的整数)的数。而$ax_0 + by_0$是形如$ax + by$这样的数的集合中最小正数，又有$0 \leqslant r < ax_0 + by_0$因此$r$必为0。即得

$$(ax_0 + by_0) | (ax + by).$$

19　证明$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$（$n > 1$）及$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$（$n > 1$）都不是整数。

证：因为1至n中任一偶数均可表为$2^k \cdot c$，c是奇数，k是整数，取p为$1,2,\cdots,n$中所有奇数之积，$2^t \leqslant n$，t是满足这不等式的最大整数，显然$k \leqslant t$。于是

$$p \cdot 2^{t-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = M + \frac{p}{2}\ (M\text{是整数})$$

若$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$是整数，则等式左边是整数，右边是分数，这是不可能的，所以$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$不是整数。

同样，取$3^t \leqslant 2n + 1$，t为满足这不等式的最大整数，p是$1,3,5,\cdots,2n+1$中所有非3之倍数的数的积，则

$$p \cdot 3^{t-1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) = M + \frac{p}{3}\ (M\text{是整数})$$

若$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$是整数，则上述不等式左边为整数，右边为分数，这也是不可能的，所以$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$不是整数。

20　证明：e是无理数。

证：因为$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$，又，对任意既约分数$\frac{q}{p}$，必存在某个$n \geqslant p$，于是

$$n!e = n! + n! + n(n-1)\cdots3 + n(n-1)\cdots4 + \cdots + 1 + \\ + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \qquad (1)$$

今设$a_n = n! + n! + n(n-1)\cdots3 + n(n-1)\cdots4 + \cdots + 1$

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

则　a_n是正整数，而

$$0 < b_n < \frac{1}{n+1}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right\} < \frac{2}{n+1} < 1$$

这就是说，b_n不是整数，但由（1）式得

$$b_n = n!e - a_n \qquad (2)$$

而且a_n是整数，这样$n!e$就不可能是整数，不然的话，根据两个整数的差是整数，从(2)

就得到 b_n是整数了.

所以若 $e=\frac{q}{p}$，那么

$$n!e=n!\frac{q}{p}=1\cdot2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n\cdot q$$

也就是 $n!e$ 是一个整数，因此 $e=\frac{q}{p}$不成立.故 e 是无理数.

§2 公因数·辗转相除法·公倍数

【内容提要】

一、公因数.

设 $a_1, a_2, \cdots a_n$是n个整数，如果整数d是它们之中每一个数的因数，那么d就称为 $a_1, a_2, \cdots a_n$的一个公因数，记为$D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

整数 $a_1, a_2, \cdots a_n$的公因数中最大的一个称为最大公因数，记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.如果$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=1$，我们说 $a_1, a_2, \cdots, a_n$互质，如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$中每两个数都互质，则称它们为两两互质.

因为质数也称为素数，故互质也称为互素.

以下几条定理对我们说来是重要的.

定理1.若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个不全为零的整数，则

1） $a_1, a_2, \cdots, a_n$的公因数与$|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|$的公因数相同;

2） $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)$.

这定理告诉我们，要讨论一些数的公因数时，可以就它们均为非负整数的情况下去讨论。

定理2.若b是任一正整数，则$(0, b)=b$.

定理3.设a，b，c是任意三个不全为0的整数，且满足

$$a=bq+c$$

其中q是整数，则$(a, b)=(b, c)$.

定理4.设a，b是任意两个不全为零的整数，若m是任一正整数，δ是a，b的任一公因数，则

$$(am, bm)=(a, b)m\quad;$$

$$\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a, b)}{\delta};$$

特别有

$$\left(\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right)=1.$$

定理5.设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是任意n个正整数，且

$$(a_1, a_2)=d_2,\ (d_2, a_3)=d_3,\ \cdots,\ (d_{n-1}, a_n)=d_n$$

则

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=d_n$$

二、辗转相除法

设a，b是任意两个正整数，用带余除法，我们可以得到下面一系列等式：

$$\begin{array}{ll}
a=bq_1+r_1, & 0<r_1<b \\
b=r_1q_2+r_2, & 0<r_2<r_1 \\
r_1=r_2q_3+r_3, & 0<r_3<r_2 \\
\cdots\cdots & \\
r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, & 0<r_n<r_{n-1} \\
r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1} & r_{n+1}=0
\end{array}$$

上述的方法称为辗转相除法，其中最后一个不等于零的余数 r_n就是a，b两数的最大公因数，即

$$(a, b)=r_n$$

为了较快地求出（a，b），在辗转相除法中所用的带余除法式里的余数也可采用最小绝对值余数。

辗转相除法不仅可以求出两个正整数的最大公因数，还可以利用它来证明上述的定理4和定理5。

定理6．若a，b，c是三个整数，b，c不全为零，且（a，c）=1，则

$$D(ab, c)=D(b, c)$$

$$(ab, c)=(b, c)$$

定理7．若a，b是任意两个不全为零的整数，则存在两个整数s，t，使得

$$as+bt=(a, b)$$

这里的s，t可由辗转相除法求得。

三、公倍数

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$是n（$n\geqslant 2$）个整数，若d是这n个数中每一个数的倍数，则称d为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$的一个**公倍数**，$a_1, a_2, \cdots, a_n$的一切公倍数中最小正数称为它们的**最小公倍数**，记为$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$

与最大公约数一样，我们讨论n个数的最小公倍数时，可就正整数讨论，即

$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|]$（有0的情况无需讨论，因为任何正数都不可能是0的倍数）。

定理8．若 a，b 是任意两个正整数，则