高等师范专科学校教学参考用书

初等数学研究与教学法

（初等几何）

山东省师专教育学院《初等数学研究与教学法》协编组

高等师范专科学校教学参考用书

初等数学研究与教学法

（初等几何）

山东省师专教育学院《初等数学研究与教学法》

协 编 组

一九八四年六月

说　　明

本套书于1983年春根据全国高等师范专科学校《初等数学研究与教学法大纲》编写的。在经过一年来的教学使用和广泛征求意见的基础上，这次又进行了修订再版，本套书分为初等代数、初等几何、初中数学教学法三册。

参加初等代数编写的有：烟台师专李铭心、济南师专韩恩正。临沂师专綦敦玉、济宁师专张传纲、昌潍师专王寿眉、聊城师专田开璞；负责该书审编的是綦敦玉和李铭心。

参加初等几何编写的有：潍坊教育学院张运太、聊城师专陈恩荣、泰安师专周诚询、胜利油田教育学院续建民、枣庄师专褚庆义；负责该书审编的是周诚询和陈恩荣。

参加初中数学教学法编写的有：淄博师专齐敦仁、青岛师专刘伯元、山东煤矿教育学院张润庠、菏泽师专司梦林；负责该书审编的是张润庠。

本套书的插图由陈恩荣绘制。

在编写修订这套书的过程中，山东省高师院校中学数学教材教法研究会理事长巩宪文教授予以指导和帮助，在这里谨向巩先生表示衷心感谢。

本套书适用于二、三制师专数学专业，也可作为高师函授教材和初中数学教师进修或教学参考之用。

限于编者水平，时间仓促，肯定存在谬误之处，敬请读者提出批评指正。

协　编　组

1 9 8 4 年6月

目　　录

绪　言

一 初等几何研究的对象和教学目的

1　初等几何研究的对象

恩格斯在《反杜林论》中对数学研究的对象精辟地指出："…纯数学研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系"。而现实世界的空间形式便是属于几何学研究的对象。

所谓空间形式，是指物体的形状、大小和相互的位置关系（大小是指度量关系，位置关系是指结合关系、顺序关系、合同关系、平行关系、连续关系）。因此，我们说几何学研究的对象是物体的形状、大小和相互位置关系的科学。

当只研究一个物体的形状和大小而不考虑它的其他性质（如物理性质——重量、硬度、密度等；化学性质——气味、色泽等）的时候，这样我们便从物体抽象而得到几何体的概念，几何体简称为体。

体是由面围成的，面有平面、曲面；面和面相交于线，线有直线、曲线；线和线相交于点。

点、线、面、体或点、线、面的集合叫做几何图形，点、线、面叫做几何图形的元素。因此，我们也可以说几何学是研究图形性质的科学，即研究几何图形的形状、大小和相互位置关系的科学。

中学几何分为平面几何与立体几何两大部分。平面几何研究由点和线集合而成的平面图形的性质，其主要内容有相

交线、平行线、三角形、四边形、相似形和圆等基础知识，立体几何研究由点、线、面三个元素集合而成的空间图形的性质，其主要内容有直线和平面的相互位置关系及其主要性质和柱、锥、台、球等概念及其性质。平面几何与立体几何一般叫做初等几何。

2　中学几何的教学目的

中学几何的教学是分别在初中和高中阶段进行的，初中阶段学习平面几何，高中阶段学习立体几何，中学几何的教学要根据《中学数学教学大纲》的要求进行教学。在“大纲”中指出：“中学数学教学的目的是：使学生切实学好从事现代化生产和进一步学习现代化科学技术所必需的数学基础知识，培养学生的正确迅速的运算能力，逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学来分析解决实际问题的能力，在数学教学中，要结合教学内容向学生进行思想教育，激励学生为实现社会主义现代化学好数学的热情，培养学生的科学态度和辨证唯物主义世界观。”根据“大纲”这一精神，联系几何的特点，我们认为中学几何课的教学目的，可以概括成三个方面：第一是系统地掌握平面图形和立体图形的性质，并运用这些性质去解决计算题和作图题；第二是发展学生的逻辑思维能力和空间想象能力，并且使学生能运用所学知识去解决实际问题的能力；第三是通过几何教学向学生进行思想政治教育，培养他们的辩证唯物主义世界观。

二　中学几何的逻辑结构

传统的几何教材基本上是按照两千多年前欧几里得《几

何原本》的体系编写的。长期教学实践证明，采用欧几里得体系学习几何，是培养学生的逻辑思维能力行之有效的方法。但是，采用欧氏体系学习几何也有不少缺点，主要缺点是内容烦琐，占用教学时数过多，不利于在中学增加为实现四个现代化所需要的新的数学内容，并且比较难学，特别是开头部分比较难学。

随着科学技术的发展，近二十年来世界各国先后掀起了数学教育改革的浪潮。由于欧氏体系几何在教学上存在不少问题，因此有不少人提出各种改革中学几何教学体系的方案，如有人认为欧几里得公理体系不够完备，在逻辑上有缺陷，主张采用严谨的希尔伯特公理体系，也有人主张用严谨的伯克霍夫公理体系；有人认为欧氏几何内容陈旧，没有反映现代数学观点，没有反映几何学新的成果，主张根据克莱因的观点，用变换几何代替欧氏几何；有人认为欧氏几何自始至终都用综合几何方法来处理几何问题，有时比较麻烦，有时推理过于冗长，主张尽早引入坐标方法，把综合几何和解析几何结合起来，充分利用代数方法来处理几何问题；也有人主张用向量方法，或向量和坐标相结合的方法来处理几何问题，即用向量几何代替欧氏几何；有人认为欧氏几何比较难学，主张在低年级先学一遍实验几何，到高年级再学欧氏几何；也有人主张只学实验几何，用看一看、量一量的办法来代替逻辑推理。

怎样改革中学几何教学，国内外长期有争论，通过教学实践来看，上述改革方案都是弊多利少，采用严谨的公理体系，不符合中学生年令特征和数学水平，中学生很难接受，用变换几何、解析几何、向量几何都不能全部代替欧氏几何，

而且在培养逻辑思维能力和空间想象能力方面，都不如欧氏几何来得有效，先学实验几何，再学欧氏几何，占用的教学时间过多，而且两次学习同样的内容，第二次学习欧氏几何的教学效果不好，至于只学实验几何，用看一看、量一量的办法来代替逻辑推理，文化大革命期间的教学实践已经证明，这将会造成学生缺乏逻辑思维能力和空间想象能力的严重恶果，从而大大降低中学生的数学程度。

结合我国几何教材改革的经验和教训，比较多的人同意以下的看法：认为学习欧氏体系的几何，从一些定义、公理出发，用演绎法进行推理论证，有利于培养学生的逻辑思维的能力和习惯；又由于欧氏几何具有鲜明的几何直观，也有利于培养学生的空间想象能力，因此主张保留欧氏几何，但主张不要严格的公理化体系；主张对传统的几何内容给予足够的重视，不主张在深度和广度上作过高的要求。基于以上原因，所以中学新编教材的逻辑结构有以下的特点：

1．在定义方面：

（1）对于原始概念教材没有明确提出来，例如[illegible]“面和面相交于线，…线和线相交于点”，这里所谓“面”、“线”、“点”是由具体事物的抽象化而得到的几何基本元素的直观观念，都是不定义的原始概念；

（2）对于一些定义概念，则作原始概念来看待，对其意义采取直观的描述而没有给出其定义．例如说：“用直尺把两点连结起来，就得到一条线段”、“线段向一方无限延伸，就形成射线”、“线段向两方无限延伸，就形成直线”，这些都是对“线段”“射线”、“直线”的直观描述而不是定义。

（3）在几何名词或术语的定义中，所引用的其他名词或术语，该是以前见过的和定义过的，否则就要算是不定义的原始概念。例如，“垂直”的定义：“两条直线相交成直角，叫做两条直线互相垂直”，其中“相交”教材中找不到定义，而是作为原始概念来看待。

教材这样处理，原始概念虽然太多，但对中学生来说，却是比较适当的，因为不然的话，会有太多的定义，反而会增加学生不必要的负担。在以上的基础上，以后的概念则用定义的形式去完成。

2.在公理方面

新编教材比旧教材在公理方面增多了。如在欧氏平面几何中开头有几个定理：平行线第一个性质定理；平行线第一个判定定理；三角形全等的三个判定定理等，证明比较繁难，要占用很多教学时间，初学几何的学生不易接受，而对于培养学生逻辑推理能力来说，由于学生刚开始学习用演绎推理方法进行证明，学习繁难的证明，不符合由易到难的原则，也起不了什么作用，反而会影响学生学习的积极性。新编教材中把这些定理都当作公理，不加证明，从扩大了的公理出发，其余定理都严格地加以证明。这样既可以减少初学几何时的困难，又可由简到繁，由易到难，逐步培养学生的逻辑推理能力。又如在《立体几何》的第一章则是以四个公理为基础，扩大了公理体系，原则上是只保证公理的不矛盾性，而不要求公理的完备性和独立性。

扩大了公理就可以节约出一些课时，减少一些对学生来说并不感到必要而又繁难的证明，从而可以更快地进入主要内容的学习。而对于学生的逻辑推理能力的培养，并不会有

什么妨碍。

尽管新编教材增多了公理，但是提出的公理也还是不完备的，例如所谓“在某线段上”或“在某线段的延长线上”只能依靠人们的直观感觉，而没有严格的逻辑论证，以致于所有“在…之中”或“在…之外”等“介于”问题，都找不到理论的依据。同样，对于连续的问题，也没有给出逻辑的依据。总之，新编教材对顺序公理、连续公理等没有给出，而是默认了的，这本来是欧氏《几何原本》的缺陷，可是作为中学几何教材，这个缺陷仍还没有克服。

在本教材《初等几何》这部分内容中，我们主要将初等几何的证明方法、几何计算、初等变换、轨迹、作图以及空间图形的基本性质分别进行研究。通过这部分内容的学习，以培养提高作为一个中学数学教师在几何教学方面所必须具备的基础理论和基本技能。

第一章　几何证题方法

§1.1　度量关系

Ⅰ 证线段和角的相等

1、证两线段或两角相等，最基本的方法是利用全等三角形来证明。如果无现成的三角形来利用，需添辅助线构成全等三角形．而全等三角形的条件往往不是现成的，所缺条件常须从证明别的三角形全等或其他方法来获得，以补足全等的条件。

例 1　若在$\triangle ABC$的外边作正方形$ABEF$和$ACGH$（图 1—1），则$\triangle ABC$的高线AD必将线段FH平分。

已知　正方形$ABEF$和$ACGH$在$\triangle ABC$的外侧，

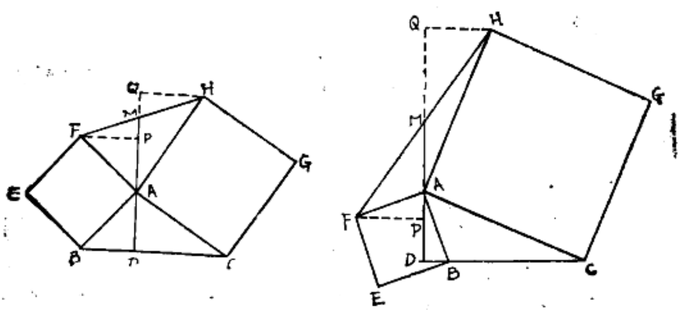

图 1—1

$AD \perp BC$，延长DA交FH于M。

求证 $FM = HM$

分析 原图中有许多直角，可能是解决问题的有利条件，因为FM和HM所属的$\triangle AFM$和$\triangle AHM$显然不全等，所以想到引辅助线$FP \perp AM$、$HQ \perp AM$于P、Q，而设法证明$Rt\triangle FPM$和$Rt\triangle HQM$全等。为此必须证$FP = HQ$或$MP = MQ$，后式中两线段与图中其他三角形无关，故从前式中两线段着想。FP属于$Rt\triangle AFP$，而它与$Rt\triangle BAD$有斜边$AF = BA$，且$\angle FAP = 90° - \angle BAD = \angle ABD$，因此它们全等，于是$FP = AD$。同理，由$Rt\triangle AHQ$和$Rt\triangle CAD$全等，推得$HQ = AD$。这样一来，$Rt\triangle FPM$和$Rt\triangle HQM$全等的条件就补足了。

证明 引FP、$HQ \perp AM$于P、Q。在$Rt\triangle AFP$和$Rt\triangle BAD$中，$AF = BA$，$\angle FAP = 90° - \angle BAD = \angle ABD$

$\therefore Rt\triangle AFP \cong Rt\triangle BAD$，于是

$$FP = AD \qquad (1)$$

同理，$Rt\triangle AHQ \cong Rt\triangle CAD$，得

$$HQ = AD \qquad (2)$$

由(1)和(2)知$FP = HQ$，又$\angle FMP = \angle HMQ$，可见$Rt\triangle FPM \cong Rt\triangle HQM$，

$\therefore FM = HM$。

注 本题如在直线AM上截一段$AR = BC$，然后证$AFRH$为平行四边形，也可以达到目的。

例2 设M是等腰$Rt\triangle ABC$一腰AC的中点（图1—2），自顶点A引垂直于中线BM的直线交底边BC于D，则$\angle AMB = \angle CMD$。

分析　从图中看出，$\angle AMB$和$\angle CMD$所属的两个三角形不全等，故应设法构造一个三角形，使它和$\triangle ABM$全等，因为$AB=AC$，又易知$\angle ABM=\angle CAD$，所以自C引垂直于AC的直线交AD延长线于N，则所得$\triangle CNA$和$\triangle AMB$必然全等。这样一来，要证$\angle AMB=\angle CMD$的问题就变为求证$\angle CMD=\angle CND$了。但这两角所属$\triangle CMD$和$\triangle CND$的全等是很容易证明的，于是问题得以解决。

证明　自C点引AC的垂线交AD的延长线于N，设E是AD与BM的交点。

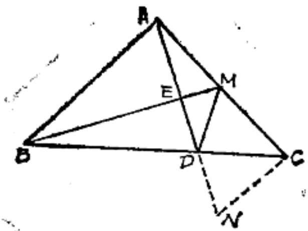

图　1－2

$\because \angle AEM=\angle BAM=90°$，

$\therefore \angle ABM$和$\angle CAN$都是$\angle AMB$的余角，因此$\angle ABM=\angle CAN$，又$AB=AC$，

$\therefore Rt\triangle ABM\cong Rt\triangle CAN$，

$\therefore CN=AM$，且$\angle AMB=\angle CND$　　(1)

另一方面，在$\triangle CMD$和$\triangle CND$中，$\because \angle MCD=45°$，$\angle NCD=90°-45°=45°$，又$CN=AM=MC$，DC公共，

$\therefore \triangle CMD\cong\triangle CND$，

从而$\angle CMD=\angle CND$　　(2)

由(1)和(2)即得$\angle AMB=\angle CMD$。

二、证明两线段或两角相等，也时常寻求与此两线段或两角相等的第三者作介绍。

作介绍的线段或角如果没有现成的，可通过添辅助线构造出来。

例3　圆的内接四边形的两条对角线互相垂直，过对角

线的交点而垂直于一边的直线，必平分其对边。

已知　圆内接四边形$ABCD$中（图1－3），$AC \perp BD$，过交点E作$GF \perp CD$于F，交AB于G。

求证　$AG=GB$。

分析　欲证$AG=GB$，即证G为$Rt\triangle ABE$的斜边的中点，由直角三角形斜边中点的性质，我们想到用斜边上的中线EG作介绍，先证$AG=GE$，须知$\angle 4=\angle 5$，因$\angle 5=\angle 2$，$\angle 4=\angle 1$，又须证$\angle 1=\angle 2$。但$\angle 1$和$\angle 2$都是$\angle 3$的余角，故必相等。于是$AG=GE$，同理，$GB=GE$。此题获证。

证明　$\because AC \perp BD$，$GF \perp CD$，$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$，$\angle 2+\angle 3=90°$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，又$\angle 2=\angle 5$，$\angle 1=\angle 4$，$\therefore \angle 4=\angle 5$，故$AE=GE$。同理$GB=GE$，$\therefore AG=GB$。

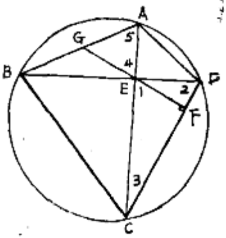

图　1－3

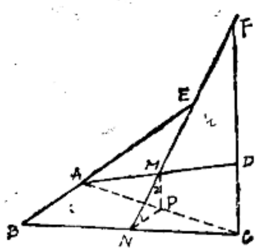

图 1—4

例4　在四边形$ABCD$中（图1－4），$AB=CD$，M、N分别是AD、BC的中点，BA、CD分别交直线MN于E、F，求证$\angle BEN=\angle CFM$。

分析 从图形观察，$\angle BEN$和$\angle CFM$并没有直接的联系，须寻找它们的等角作介绍，由题知M、N各为AD、BC中点，故考虑通过中位线而构成平行线得出它们的等角。为此，连结AC，取AC中点P，连结MP、NP，得$\triangle PMN$。易证$\angle BEN=\angle 1$，$\angle CFM=\angle 2$，再证$\angle 1=\angle 2$即可。但注意到$AB=CD$这个条件，此式成立是不难得到的。

证明 取AC中点P，连结MP、NP，

则 $NP \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，$MP \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$。

$\therefore \angle BEN=\angle 1$，$\angle CFM=\angle 2$，又 $\because AB=CD$，

$\therefore MP=NP$，从而$\angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle BEN=\angle CFM$。

三、证两线段或两角相等，还时常通过以下几个途径来实现。

1、利用等腰三角形，证明它们为等腰三形的两腰或两底角；

2、利用平行四边形，证明它们为平行四边形的一双对边或一双对角；

3、利用三角形的中位线的性质，证明两线是过一边中点平行于另一边的直线所分第三边的两部分；

4、利用圆中等量，证明两线为弦心距相等的两弦，或同圆中等弧、等圆心角、等圆周角所对的弦；

5、利用比例线段，证明两线与已知的两等线成比例；

6、利用圆中定理，证明两角为对同弧的圆周角，或为圆接四边形的外角和内对角，或为弦切角和共弧的圆周角；

7、利用相似三角形，证明两角为两相似三角形的对应角。

例5 直线a不切于$\odot O$，$OA \perp a$于A（图1—5），过A点作一割线交$\odot O$于B、C，在此两点作$\odot O$的切线交a于E、F，则$AE=AF$。

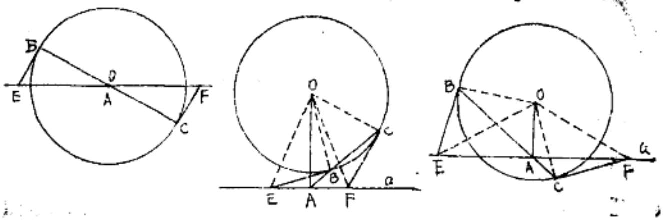

图 1—5

分析 当a通过O点时（图1—5左），$AE=AF$显而易见；a不通过O点时（图1—5中、右），欲证$AE=AF$，$\because OA \perp a$，故只须证$\triangle OEF$等腰，或$\angle OEF=\angle OFE$即可，证等腰不易，我们来考虑两角的关系。由题知$\angle OAE=\angle OBE=90°$，及$\angle OAF=\angle OCF=90°$，可见$O$、$E$、$A$、$B$和$O$、$A$、$F$、$C$各四点共圆，得$\angle OEF=\angle OBC$，$\angle OFE=\angle OCB$，于是问题便转而为求证$\angle OBC=\angle OCB$了，然而这是十分明白的。

证明 若a通过圆心O，则A和O重合（图1—5左），这时极易由$Rt\triangle AEB \cong Rt\triangle AFC$推得$AE=AF$。

现在假定a不通过圆心O（图1—5中、右）。连接OB、OC、OE、OF，因$OB=OC$，所以

$$\angle OBC=\angle OCB \qquad (1)$$

$\because \angle OAE=\angle OBE=90°$，$\therefore O$、$E$、$A$、$B$四点共圆，于是

$$\angle OEF=\angle OBC \qquad (2)$$