

北京市中学《数学》第三册下册
(1978年1月第6版)

第十五、十六章

教 学 参 考 资 料

北京教育学院教材教研部

1978.6

第十五章 简单体的直观图和展开图

一、教 学 要 求

1. 使学生掌握平面的基本性质, 认识直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 特别是平行和垂直关系。

2. 使学生掌握柱、锥、台、球等简单体的有关概念, 以及它们的体积公式和侧面积公式。能正确地运用这些公式解有关简单体体积、表面积的计算问题。

3. 使学生能画出草图直观的表示直线与平面的平行、垂直关系。了解直观图的两种常用画法(“斜二测”、“正等测”画法), 能正确地画出柱、锥、台的直观图。会用放射法近似的画出圆锥、圆台的侧面展开图。

4. 通过有关概念的建立和画图, 注意培养学生的空间想象能力, 通过体积、侧面积的计算进一步提高学生的计算能力。通过分析空间图形与平面图形的联系与转化, 以及柱、锥、台体积公式、侧面积公式间的联系与转化, 注意培养学生辩证思维能力。

二、教 材 分 析

学生在前面几章中已经系统的学习了平面图形的一些性质, 但在生产实践和进一步学习中, 仅仅掌握平面图形的性质是很不够的。本章将在平面图形知识的基础上进一步学习立体图形的一些知识。

柱、锥、台、球是最简单最常见的几何体。本章集中学习关于柱、锥、台、球等简单体的概念、体积和侧面积的计算公式，以及它们的直观图、展开图的画法。

简单体是空间形体，无论是建立简单体的概念、研究直观图、展开图的画法以及有关的计算，都需要学生具有初步的空间观念，了解空间直线与平面间的位置关系，特别是平行和垂直关系。同时，这些知识本身在生产实践中也是广泛地被应用着。因此，在本章一开始安排“直线与平面”一节，通过生产生活中的实例，使学生初步认识空间直线和平面的位置关系。

本章教材的重点是空间直线与平面位置关系以及柱、锥、台、球的表面积和体积的计算。空间直线与平面位置关系是研究立体图形性质的基础；图形的性质是画法和计算的根据；掌握了图形的画法又为计算创造了有利条件。

本章教材通过对立体图形性质的认识、画草图、直观图、展开图等内容，注意逐步培养学生空间想象能力。教学中应通过对实际事例的观察分析、绘制图形、分析图形性质、制作模型等逐步引导学生从平面过渡到空间来研究问题，有步骤的培养学生空间想象能力。

1. 直线和平面

(1) 这一节是有关立体几何的基础知识，是在学生学习了平面几何知识的基础上来阐述的。学生在掌握了本节的有关概念和它们的主要性质以后，才能更好的学习和掌握后两节以及第十六章识图的内容；这一节教材的内容也是解决实际问题所必需的基础知识。考虑到初三年级学生的接受能力，对有关的性质一般是通过实例直观给出的，没有进行推理证明。学生初次进入空间图形的学习，抽象概括能力和空

间想象能力都比较差，考虑问题不易周全，画和看立体图形都不习惯，因此这一节教材是全章教材的难点。为了解决这一难点，一方面教材注意理清知识脉络，从线与线、线与面、面与面的位置关系入手，分别抓住平行、垂直两种特殊位置关系中的主要规律加以总结；另一方面，注意加强直观性，使学生通过观察实物和教具演示加以抽象概括。空间想象能力要从多方面逐步培养，在这一节教学中对学生要求不宜过高。

(2) 本节教材通过一定数量的实例使学生理解有关直线与直线、直线与平面、平面与平面关系的一些主要概念，特别是直线和平面的平行、垂直的知识。

在这一节教材中，直线和直线的位置关系，除异面直线外，都已在平面几何里学过；而平面和平面的位置关系，一般是归结为直线和平面的关系，再进一步归结为平面图形来研究。因此，直线和平面的位置关系起着承上启下的作用，是这一节教材的重点。

直线和平面的位置关系是以公共点的个数作为区分标志的。在“相交”这一情况下，又进一步用相交所成的“角”的大小，来进一步刻划它们的相互位置。

在直线与平面垂直这部分内容中，还介绍了三垂线定理。三垂线定理及其逆定理不仅在解决直线和直线垂直的问题上，而且在实际问题中，有很多应用。教材中配备了一定的练习，以便使学生能比较熟练的掌握它。

(3) 学生往往以平面图形的性质来理解空间图形，看立体图形比较吃力，至于画出立体图形去研究问题则更为困难，因此教学本章内容时，从开始就要注意培养学生画立体图形的能力。经常用模型和图形对照，多举实例进行观察分

析，指出立体图形的特点，从丰富学生直观感性认识入手，逐步加强学生看图和画图的能力。

2. 简单体的直观图

(1) 在第一节的基础上，这一节重点研究了简单体的直观图。教材把棱柱与圆柱、棱锥与圆锥、棱台与圆台分别放在一起研究，按柱、锥、台、球的顺序编排。每小节又先从实物引出概念、性质，在讲清概念的基础上重点讲解了直观图的画法，最后介绍体积公式。

(2) 本节直观图的画法是在上一单元“直线与平面”的基础上进行的，直观图的画法还是下一章讲“视图”的基础。棱柱、棱锥等简单体的直观图要根据它们的性质来画，所以直观图的画法都放在图形概念和性质之后来学习。

直观图的画法有一定的规格，学生初学时往往感到困难，本单元第一节先以正方体为例对直观图的两种画法作了简要的介绍，并指出：棱柱、棱锥、棱台的直观图多用“斜二测”来画；圆柱、圆锥和圆台的直观图多用“正等测”来画。

当学生熟练的掌握了柱的两种直观图画法后，其它简单的直观图也不难画出，因此，棱柱、圆柱的直观图画法是本节的重点。画这两种直观图的关键是画出它的水平位置上的底面。

球的直观图画法较难，而且要用到轴测投影的一些知识（见附录），所以课本没有详细介绍。只要求学生画示意图。目的是使学生理解图15—74所表达的是什么物体，另一方面使学生初步会在图上反映球的立体形状。

(3) 研究简单体的某些截面需要具备较强的空间想象力，这对学生来说比较困难，本单元只介绍了轴截面。在研究简单体的概念和性质以及解决有关轴截面的问题时，要用

到前一节的有关概念、定理，同时还联系到许多平面几何知识（如等腰三角形、梯形、正多边形和圆的有关性质、计算、以及勾股定理等）。

（4）在小学算术中，学生已学过圆柱、圆锥、棱柱、棱锥的体积公式，至于台及球的体积公式，用初等方法推导较繁，因此本节所有体积公式都未加证明，直接给出，在例题配备上，也删去了较繁琐的计算，以利于突出重点。

3. 简单体的侧面展开图

（1）柱、锥、台的侧面展开图画法以及柱、锥、台、球侧面积计算公式，在实践中应用较广，简单几何体侧面积计算公式是通过求它们的侧面展开图的面积而得到的。

画展开图，必须清楚的认识简单体和它们的侧面展开图诸元素之间的关系。这是学好本节教材的关键。

（2）教材中，棱柱与圆柱、棱锥与圆锥、棱台与圆台、它们的侧面展开图都是类比给出的，它们的侧面积也分别归纳为统一的公式。这样既便于学生理解和掌握，又可以在教学中渗透极限思想，进行辩证观点的教育。

（3）圆柱体的侧面展开图是学生在小学已经学过的。与之对比，引入了直棱柱的侧面展开图，学生比较熟悉，易于接受。圆台则是在圆锥的基础上介绍的，因此圆锥的侧面展开图既是本节教材的重点又是难点。对于圆锥的侧面展开图这一难点，教材是在分析了正棱锥的展开图这一基础上，进一步对比引入的。教材介绍了两种常用画法——计算法（计算扇形圆心角法）和图解法（放射法）。

由计算扇形圆心角，可以求得圆锥侧面积。而放射法则是钣金下料时常采用的一种近似方法。这种方法体现了以“直”代“曲”的极限思想，在教学中应注意渗透。

三、教 学 建 议

I 直线和平面

(1) 平面 平面是立体图形的一个重要元素，必须使学生正确理解平面的概念。在讲解平面及其表示法时，要指出，平面是在空间无限伸展的，用画平行四边形来表示平面也只是画出平面的一部分，学生往往误认为平面是有限的，应在建立平面概念时，注意扩展学生的思维。可以对比直线的无限伸长来建立平面是无限伸展的这一概念。此外，通过学习平面的基本性质②及图 15—5，要注意引导学生进一步认识平面的无限伸展性。

平面的三个基本性质及三个推论是有关平面的重要知识，应使学生理解和掌握。三个基本性质都是经过无数实践经验总结的基本事实，是关于平面的三条公理。为了加深学生的认识，每个性质都用一些实例来说明，除课本所列举的实例外，教学中还应举些学生熟悉的其他实例。

基本性质③是在空间确定平面位置的问题，是将空间图形转化为平面图形的重要条件。所谓“确定一个平面”，就是依照条件“可作且只可作一个平面”的意思，应向学生交代清楚。

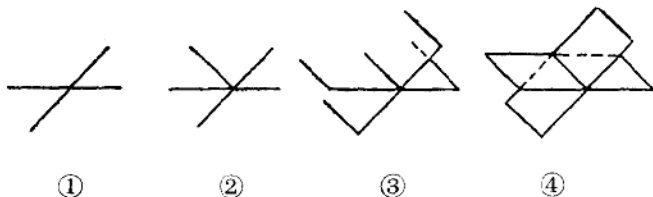
平面基本性质的三个推论，书上未加论证。其中推论①和推论②主要是应用了性质③和性质①而推出的；推论③则主要根据平行线的定义得出的，在讲这三个推论时，可结合实例加以归纳。

基本性质③及三个推论是在空间确定平面位置的主要方法和依据。其中基本性质③是最主要的。

要教给学生画两个相交平面的方法。步骤一般如下图所示

示：

①画出表示两个平面位置的相交线段；②画出表示两个平面交线位置的线段；③过①中线段的两个端点引线段，使它们都平行且等于交线的长；④连结③中每一个平面两条平行线段的端点（注意被遮住的线可画成虚线，也可以不画）。



（2）直线和直线的位置关系 在平面内，两条不重合的直线其相关位置只有相交和平行两种。在空间，除了相交和平行的直线外，还存在着不在同一平面内的直线——异面直线。增加这个新概念，就更全面地反映了空间直线的各种位置关系。建立异面直线的概念，需要使学生的认识从平面图形发展到空间图形，这对学生来说是比较困难的，所以异面直线和异面直线所成的角的概念是这一小单元的难点。

在建立异面直线的概念时，要尽量利用实物，教具，使学生通过观察、分析认识到空间两条直线的这种位置关系，把它和相交直线、平行直线加以比较，指出它的特点：不在同一平面内，即既不平行也不相交。最后给出异面直线的定义。

要结合实例反复说明“异面直线”中的“异面”二字是指两条直线不可能在同一平面内；而分别在两个平面内的直线不一定是异面直线。它们可能平行，也可能相交。

关于两条异面直线所成的角的概念，学生接受起来也比

较困难，教学中要使学生认识到规定两条异面直线所成的角的必要性和它的作用。在一个平面内相交二直线彼此间的位置关系，是用它们的交角来确定的，同样，为了指明两条异面直线间的位置关系，也需要用角来表示。可向学生指出，过空间的任意一点作两条直线，使它们分别平行于两条异面直线中的一条，那么它们所成的角的大小是一定的，而与点的位置无关。因此，我们就有可能用这样的方法来定义两条异面直线所成的角，从而把空间的位置关系转化为平面图形中的“角”来解决。

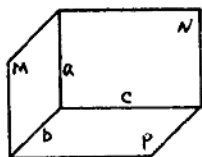
(3) 直线与平面的位置关系 直线与平面的位置关系是本节教材的重点。要使学生认识直线和平面的三种位置关系是以公共点的个数来区分的。

直线与平面垂直和平行的关系，不仅应用较广，而且是学习平面与平面位置关系的基础。所以在学生了解三种位置关系后，着重学习直线和平面垂直、直线和平面平行这两种特殊位置。

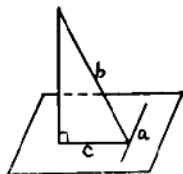
直线与平面垂直的定义，虽是一个新概念，但学生在日常生活中，是具备这种观念的，如在地面上竖立的电线杆、房屋的柱子、砌砖墙时所用的铅垂线等等。因此，教学时，可先复习“一条直线垂直于另一条直线”的知识，和平面几何对比后，进一步引导学生通过对具体实例的分析来认识直线与平面垂直的特征，了解垂线是和平面内过交点的任何直线都垂直，在此基础上给出直线和平面垂直的定义。

直线和平面垂直的判定定理，也是通过实例直接给出的，通过实例还可以说明这一定理应用的广泛。为使学生熟练掌握这一定理，除书上练习外，还可补充以下提问：

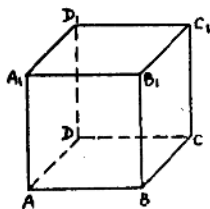
①如图，相交于一点的三条直线 a ， b 和 c 中，每两条互相垂直，那么， $a \perp$ 平面 P ， $b \perp$ 平面 N ， $c \perp$ 平面 M ，为什么？



②如图，直线 a 垂直于 b 和 c ，那么，三角形所在平面垂直于 a 。为什么？



③如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， AA_1 为什么垂直于 $ABCD$ 所在平面？ BC 为什么垂直于 A_1B ？已知棱长 $a=2\text{dm}$ ，求侧面的对角线 A_1B 和正方体的对角线 A_1C 的长。

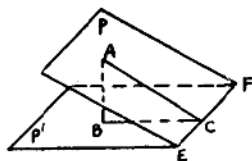


对于直线和平面所成的角，首先要指出研究它的必要性，例如一条直线和平面相交，如果它垂直于在平面内过交点的任何直线，我们就叫它做“直线垂直于平面”，也就是说直线和

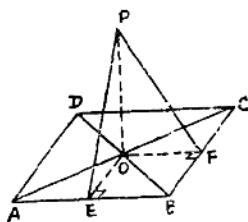
平面成 90° 的角，这是用角度来表示这直线和平面的位置关系。但是一条斜线和平面相交，它们的位置关系如果想用角度来表示，它们所成的角要怎样来规定呢？然后适当讲解为什么要把直线与它在这个平面内射影所夹的锐角规定为这条直线和这平面所成的角。可以通过直观教具的演示，让学生观察，发现，在平面内过斜线与平面的交点有无数条直线，其中只有这条斜线在平面内的射影和斜线所夹的锐角为最小。在此基础上定义，就可以利用射影的概念将斜线与平面所成的角，转化为两直线所成的角来解决。这种转化的方法是解决空间图形问题的重要方法之一，应逐步使学生领

会和掌握。

三垂线定理及其逆定理，在解决直线和直线垂直的问题上，特别在棱锥、棱台的计算中常要用到。在教学时，要引导学生认清“是哪一条直线在哪个平面内，在平面内与这条直线垂直的直线是哪一条斜线在平面内的射影……”只有弄清楚这几条直线的相互关系以后才能正确运用三垂线定理解决问题。要先结合图15—21〔1〕仔细认清这个定理所说的各直线间相互位置关系，然后再进一步推广到图15—21〔2〕、〔3〕。可以用以下的问题作为巩固练习：



①



②

① 如图①，两平面 P 、 P' 相交于 EF ，直线 AB 与平面 P 、 P' 分别交于 A 和 B ，并且 $AB \perp$ 平面 P' ， $BC \perp EF$ ，那么， $AC \perp EF$ ，为什么？

② 如图②，从矩形 $ABCD$ 的对角线交点 O ，作矩形所在平面的垂线 OP ，已知 $AB=20\text{cm}$ ， $BC=14\text{cm}$ ， $OP=24\text{cm}$ ，求 P 点到矩形各边的距离〔提示：引 OE 、 OF 〕。

（4）平面和平面位置关系 两个不重合的平面，它们的位置关系也是用公共点的个数作为区分的标志的。

为了进一步研究两个相交平面的相互位置，定义了“二面角的平面角”，从而将问题转化为平面内两直线所成的角来

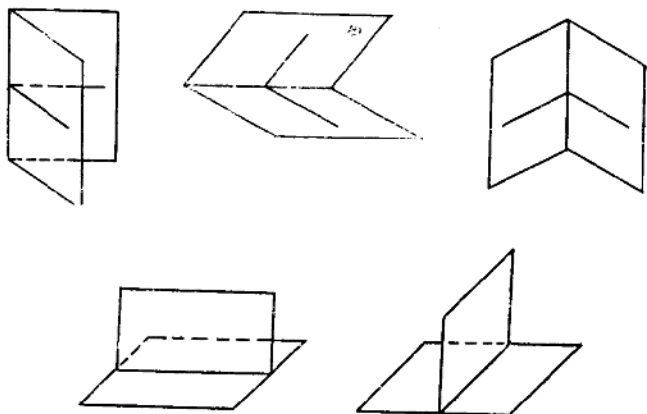
解决。要使学生认识“二面角”与“二面角的平面角”这两个概念的联系与区别。

二面角的概念是个难点，可以与平面图形中的角的概念对比来认识它。在讲完二角面的表示法以后，可以指出：平面几何中可以把角看作是由一条射线绕它的端点旋转而成的，同样，一个二面角也可以看作是一个半平面以其界限直线为轴旋转而产生的，其旋转量就是二面角的大小。讲二面角的平面角的概念时应指出研究二面角的平面角的必要性。举例说明在生产斗争和科学实验中需要解决两个平面交角大小的度量问题。在平面几何里，我们用角度来表明角的大小，至于二面角的大小，由于实际度量上的需要我们希望能够用平面几何中的角的大小来表示。然后进一步通过直观教具的演示，向学生指出如果用几个垂直于棱的平面去截一个二面角，所截得的角都是相等的。这就是说，如果在二面角的棱上任取一点，再由棱上这一点分别在两个面内引垂直于棱的直线，这两条射线所成的角是一定的；如果过二面角的棱上的一点，在两个平面内各作不垂直于棱的直线，那么，所成的角的大小是不固定的。因此，二面角的平面角的定义是合理的。

最后，应将立体图形中三种不同的“角”作一归纳比较，以便于学生记忆，并认识异面直线所成的角，直线与平面所成的角和二面角，是立体图形中三种不同的角，但它们的度量问题都是通过平面角来解决的。

正确地画二面角的平面角的方法，是使平面角的两边分别平行于表示所在平面的平行四边形的一边(如图所示)。

画两个互相垂直的平面时，一般把垂直平面的竖边画成和水平平面的横边垂直(如图所示)。



画两个互相平行的平面时，要注意把表示平面的两个平行四边形的对应边画成互相平行的。

在讲完两个平行平面间的距离的概念后，应将两点间距离，点到直线的距离，两条平行线间的距离，平行于平面的一条直线到这个平面的距离和两个平行平面间的距离几个不同的距离概念作一归纳比较，使学生认识它们的度量问题是如何逐步转化为两点间的距离来解决的。

2. 简单体的直观图

(1) 在讲直观图的两种常用画法之前，应首先给学生讲明什么叫直观图，为什么要画直观图，讲清它对进一步学习立体图形的重要意义及其与识图的关系，然后再以正方体为例，抓住画出水平放置的底面图形这一关键，分别讲清“斜二测”、“正等测”两种画法。

(2) 要强调指出三条坐标轴的相互位置关系。在“斜

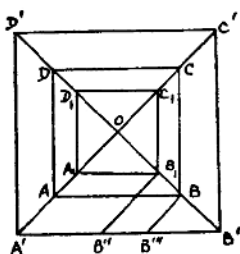
二测”画法中三轴互相垂直， OX 轴要画成水平， OY 轴需和 OX 轴成 45° 角， OZ 轴和 OX 轴垂直，方向向上，如课本第26页图15—42所示。而在“正等测”画法中表示互相垂直的三条轴时，要使它们两两相交成 120° ，如课本28页图15—44〔1〕所示。

(3) 应使学生特别注意底面的画法。按照斜二测的规定，画棱柱的底面时，在 OX 轴上（或在平行于 OX 轴的线段上）取实长，在 OY 轴上（或平行于 OY 轴的线段上）取实长之半，并需重点讲清正棱柱底面各顶点的位置如何确定。在画棱锥、棱台的底面时，要特别注意确定底面正多边形中心的位置。

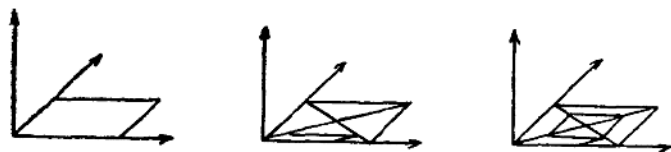
(4) 画圆锥的直观图，在画好底面椭圆和高线以后，从顶点画圆锥的两条轮廓线时，要注意这两条母线是椭圆的切线，而不是圆锥顶点与椭圆长轴端点的连线，课本只要求用直尺近似地画出即可，当圆锥的高小于半径时，图形显得不直观，在画图时要注意避免这样的情况。

(5) 画正棱台的直观图比画棱柱、正棱锥的直观图困难，主要难在画上底，可以用直观教具形象的说明上底面在下底面上的正投影是和下底面位似的图形。课本第39页棱台直观图的画法（图15-62）中的①、②可按以下步骤说明：

若正四棱台上下底边长分别为 a 、 a' ，先任意作一个正方形 $A'B'C'D'$ ，其中心是 O ，在 $A'B'$ 上截取 $A'B''=b$ ， $A'B''=a$ 分别过 B'' 点和 B'' 点作 OA' 的平行线（注意：学生往往画成 $A'D'$ 的平行线）与 OB' 相交于 B_1 点和 B 点。



过 B 点作 $A'B'$ 的平行线 AB ，显然 $AB=a$ 。过 B_1 作 $A'B'$ 的平行线 A_1B_1 ，显然 $A_1B_1=b$ 。最后分别作出位似的正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ ，擦去辅助图形 $A'B'C'D'$ ，然后再将 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 画成水平放置图形，也可以直接在下底面的水平放置图形上画出所需要的位似图形。



圆台的直观图也比圆柱、圆锥的直观图难画，要注意上底的画法。圆台两条轮廓线是两个椭圆的外公切线，可以用直尺近似地画出。

(6) 在学习棱柱的概念之前可以先复习第一单元中有关直线和平面垂直、平面和平面平行、平行平面之间的距离等有关知识。然后用实例引入斜棱柱和直棱柱的概念，并将它们进行比较，还可以引导同学总结出：

- ① 棱柱的两底面平行，并且是全等的多边形；
- ② 棱柱各侧面都是平行四边形；
- ③ 直棱柱的侧棱和它的高相等，侧面都是长方形；
- ④ 正棱柱侧面是彼此全等的长方形。

圆柱和棱柱是不同的概念，圆柱是由一个矩形绕它的一条边旋转一周而得到的几何体，从圆柱的概念可引导学生分析：

- ① 圆柱的轴通过两个底面的圆心，并且垂直于底面。
- ② 通过圆柱的轴的平面截圆柱时，所得截面是矩形，它的两条对边是圆柱的两条母线，另外两条对边是圆柱的两

个底面圆的直径。

(7) 讲棱锥概念时可和棱柱概念进行对比,例如,棱柱的侧棱互相平行,而棱锥的侧棱相交于一点;棱柱、棱锥的底面都是多边形;平行于棱柱底面的截面和底面全等,平行于棱锥底面的截面和底面相似等。在教学时进行对比,便于学生掌握概念。

在正棱锥的概念中,教材介绍了斜高,在解有关正棱锥的计算问题时,经常遇到要解侧棱、斜高与底面边长之半组成的直角三角形,或斜高、高与底面外接圆半径组成的直角三角形等。在教学中,要注意联系平面几何中有关解直角三角形的知识来解决问题。

(8) 在讲棱台定义时,应先复习棱锥的概念,在此基础上提出棱台的定义,并对照图形指出棱台各部份名称,着重指出侧棱、高、斜高三者的不同。根据棱台定义,应指出:棱台的各侧棱都相等;各侧面都是全等的等腰梯形,还可以给同学指出,截成正棱台的正棱锥的高经过正棱台上下底面的中心,所以连结正棱台上下底面中心的线段就是正棱台的高。正棱台的高、斜高、底面正多边形边心距可以组成直角梯形,在解决有关棱台的计算问题时,经常要利用勾股定理解直角三角形。

用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥,底面和截面之间的部分叫作圆台,应指出连结圆台两底面圆心的线段就是圆台的高,圆台的轴截面是一等腰梯形,两腰是圆台的母线,上下底分别是两底面圆的直径。

(9) 在讲球的概念时,学生并不感到生疏,但对球的确切定义,学生并不知道,课本中指出:把一个半圆绕着它的直径旋转一周而得到的几何体叫做球。从这个定义,可以看

出球是一个实体，讲球缺概念时也应指出它是球体的一部分。在讲球和球缺公式时，应让学生分清公式中各个字母的含义。

球的性质和圆的性质有许多类似的地方，如下表：

圆	球
同圆（或等圆）的半径相等，直径是半径的两倍	同球（或等球）的半径相等，直径是半径的两倍
直径是最大的弦	经过球心的截面是大圆
和弦垂直的直径经过弦的中点 $(\text{圆半径})^2 = (\text{圆心到弦的距离})^2 + (\text{弦长的一半})^2$	和截面垂直的直径经过截面的圆心 $(\text{球半径})^2 = (\text{球心到截面的距离})^2 + (\text{截面半径})^2$

球的截面是一个圆，这个圆的半径与截面和球心的距离以及球半径之间有一定关系，应结合课本54页例1，着重指出解决有关球的问题时，常要作出一些截面，把它转化为圆的问题来解决。例1中有关地球的知识，如经度、纬度等学生不太熟悉，可结合例题或模型来讲解。

(10) 在简单体的体积计算中，应注意提高学生的计算能力，在计算过程中应要求学生灵活运用各种计算方法，一般应先列出算式，化简后再把数值代入计算。有简便方法尽可能利用简便方法，能查表的就查表，要切实提高学生的计算能力特别是数字计算能力。

在本节中数字计算较多，其中多数牵涉到近似数的计算问题，因为学生没有系统地学过近似计算的有关概念和法则，关于计算中的要求，可与其他各册一致作如下要求：