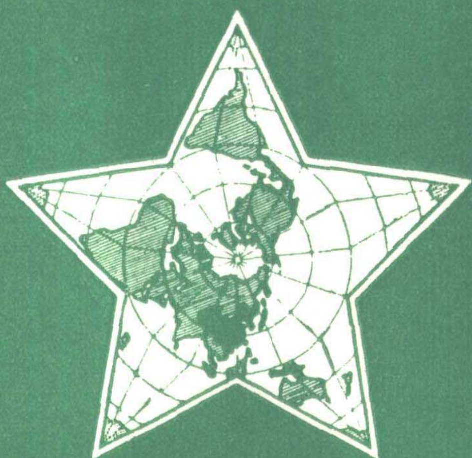
地图投影

（制图专业三年制用）



中国人民解放军测绘学校

一九七七年七月

目　　录

绪　　论

很久以前，地图上即有经纬线的表示。这是根据地图用途和作图的实际需要而提出来的，是地图生产发展到一定阶段而出现的。有了它才便于在地图上确定地面点的精确位置，有了它才知道一张地图所包括的地理区域，有了它才可比较合理地将地球表面表示在平面上。因此，它是现代地图必不可少的一种地图要素，它本身具有严密的科学性。地图投影即是建立地图经纬线网的一门学科。我们要想了解地图上的经纬线网是如何建立的，有些什么样的规律性，它的矛盾运动是怎样发生与发展的，就必须学习地图投影。从地图投影中才能找到问题的答案。

地图投影的产生与发展已有几千年的历史，现在研究的领域很广，但投影的基本理论仍少变化。如果我们弄通了这些基本理论，即抓住了问题的关键，就可以了解问题的实质是什么，从而在学习具体投影时，目的性就比较明确。从辩证唯物主义的观点来观察地图投影这门学科，可以看出它是由一种特殊矛盾而引起的，运用特殊的条件而解决了这种矛盾，并且不断向前推移。矛盾运动贯串问题的始终。所以，它在本质上不外是辩证法在地图投影中的运用。为了说明这些问题，下面分几个问题来谈。

一、地图投影研究的对象

伟大领袖毛主席教导我们：**“对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象”**[1]。地图投影作为一门独立的科学，当然也有它的特有的矛盾，这个特有的矛盾，就是不可展的地球表面（曲面）与地图（平面）之间的矛盾。大家知道，地球自然表面是一个极不规则的曲面，我们为了便于在其上进行运算，是将它当作一个地球椭球面或球面看待的。但这种椭球面或球面在几何学中称为不可展的曲面，即无法将其平平整整的直接铺成平面。而地图是根据一定的用途要求，必须将地球椭球面或球面的一部分或整个缩小表示到平面上来。这样就产生了一对矛盾。如何解决这种矛盾，则是人们长期思考的问题。经过一再实践，找到解决这种矛盾的方法，即地图投影的方法。通过地图投影的方法，可以将这种曲面转化为平面，在这个平面上即可表示地面的物体。什么叫地图投影？如何进行设影？这在下面将要说明。但我们对这个问题也不是完全陌生的，在实际工作中已碰到过这个问题。如我们在实地进行测图之前，先要在图板上展绘平面直角坐标网，接着展绘图廓点和控制点，这实际上是按某种地图投影将地面上一些点和线投影到平面上。编绘地图，事先要建立地图数学基础，也是一个投影问题。认识到地球椭球面或球面与平面之间的矛盾，是通过地图投影的方法，而加以解决的，那末，它的研究对象也就容易理解了。地图投影研究的对象是：在地球椭球面（或球面）与平面之间，运用一定的数学法则，建立地图数学基础的理论与方法。

① 《矛盾论》《毛泽东选集》（四卷合订本）人民出版社1967年，第284页

二、矛盾着的双方一地球椭球面(或球面)与地图平面

在懂得地图投影这门科学所特有的矛盾之后，我们必须进而研究矛盾各方的特点。因为**“不了解矛盾各方的特点”**[1]**“是不能找出解决矛盾的方法的”**[2]为此，我们分别介绍矛盾的双方，即地球表面和地图平面的情形。

（一）地球椭球面

关于这个问题，我们分几个方面来談。

1.地球的形状和大小

地球自然表面是一个起伏不平十分不规则的表面，有高山，深谷、平地和海洋。在大陆上，最高点珠穆朗瑪峰高出海面8848米，海洋中最深处达1万多米（例如，马利亚纳海沟深达11043米），两者相差近20公里。这种高低不平的表面是无法用数学公式表达的，从而不能在其上实施运算。所以，这种表面不能成为直接依据的投影原面。

人们经过长期实践，发现地球自然表面虽然极不规则，但它的总体形状还不是杂乱无章的，接近于一个大地体。所谓大地体就是设想当海水处于完全静止平衡状态的时候，把它延伸到大陆内部，使其成为处处与铅垂线正交的一个连续的闭合的水准面，这个水准面我们称之为大地水准面，它所包围的形体称为大地体。

又由于地球外壳物质分布不均匀，以及地表起伏不平，引起重力方向（铅垂线方向）发生局部变化，促使处处与重力方向正交的大地水准面，也显得有不规则的变化。因而大地水准面的形状仍然是十分复杂的，到现在为止也找不到一种数学公式可以表达，故这种表面仍不能成为直接依据的投影原面。

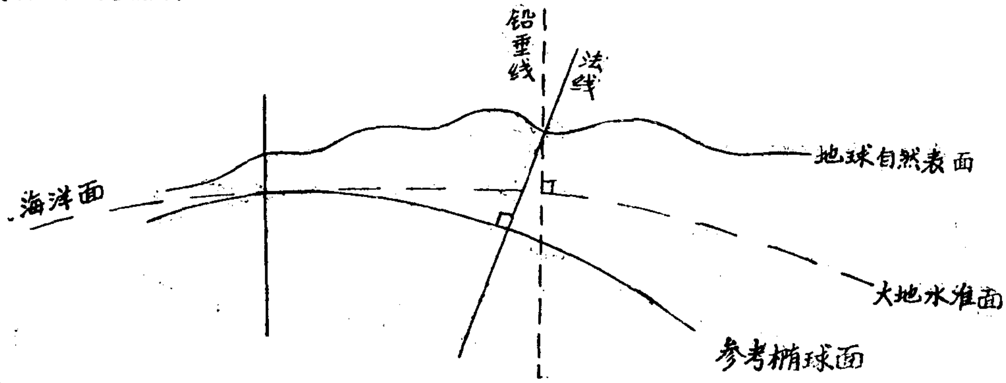


图 0—1

不过大地水准面的形状虽然也十分复杂，但从整体形状来看，这种起伏是十分微小的。另外，我们知道：重力是引力和离心力的合力，在地球赤道处，离心力最大，在两极处最小。由此可以推知：在两极的重力大于赤道重力的情况下，必使整个地球呈扁平状态。经理论和实践证明，这种形状接近具有微小扁率的旋转椭球面，即以椭圆的短轴（地轴）为轴而旋转的椭球面。这种椭球面是用来代表地球形状的，故又名地球椭球面。旋转椭球面是一个纯粹的数学表面，用简单的数学公式即可表达。在地图投影中进行各种运算，即以这种椭球面作的投影原面的。

① 《矛盾论》《毛泽东选集》（四卷合订本）人民出板社1967年，第287页
② 《矛盾论》《毛泽东选集》（四卷合订本）人民出板社1967年，第288页

关于地球椭球的大小，由于推求它的年代不同，所用的方法不同，从而测得的成果很不一致，故地球椭球的元素值有多种。现将世界各国常用的地球椭球的数据列表如下。我国当前暂时采用的是克拉索夫斯基椭球面，这种椭球面对我们的国家不是完全适合的，待全国天文大地网平差后，可能要提出更适合我国领土新的椭球面。

表 0—1

椭球名称	年代	长半径 a （m）	短半径 b （m）	扁率 α
埃弗勒斯	1830	6377276	6356075	1∶300.80
白塞尔	1841	6377397	6356079	1∶299.15
克拉克Ⅰ	1866	6378206	6356584	1∶294.98
克拉克Ⅱ	1880	6378249	6356515	1∶293.47
海福特	1909	6378388	6356912	1∶297.00
克拉索夫斯基	1940	6378245	6356863	1∶298.30
国际天文联合会	1965	6378160	6356775	1∶298.25

这里需要指出的是，上述椭球元素的求得是广大测量工作者劳动的结果，表中引用的命名，不过是当时的组织者之一。

表示地球椭球的大小，常用的符号是 a，b，α，e，e'。a 代表用以旋转的椭圆的长半径，b 代表椭圆的短半径，α 为椭圆的扁率，是说明椭圆的扁平程度的。e，e' 为椭圆的第一偏心率和第二偏心率，也是反映椭圆的扁平程度的。而 α，e，e' 的数值由下列各式来决定。

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \qquad (0-1)$$

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \qquad (0-2)$$

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} \qquad (0-3)$$

决定地球椭球的形状和大小，只要知道其中两个元素就够了，但其中必须有一个是长度（a或b）。

2.地球椭球的各种元素

1）经纬线和地理坐标

为了决定地面点在地球上的地理位置，需要在地球面上建立一种以地理极（北极和南极）为极以经线和纬线为坐标线的坐标系。现在说明这种坐标系的建立方法。在未说明建立这种坐标系之前，先要说明经线、纬线和地理极的含义。

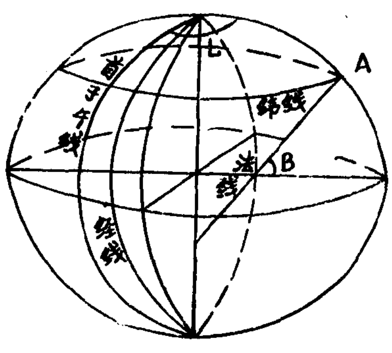


图 0—2

如图 0—2，设 PP_1 为地球的自转轴，叫做地轴；地轴与椭球面的交点 P, P_1，叫做地球的北极和南极。现用一组垂直于地轴的平面截地球椭球面，其交线均为圆，称之为纬线圈（或平行圈）。通过地球中心并垂直于地轴的平面与椭球面相交的圆为最大纬线圈，叫做赤道。赤道的半径等于地球椭球的长半径 a。再用一组通过地轴的平面截地球椭球面，其交线都是大小相同的椭圆，叫做经线圈（或子午圈）。

今设椭球面上有一点 A，通过 A 点作椭球面的垂线，称之为在椭球面上过 A 点的法线。法线与赤道面的交角，叫做 A 点的纬度，用字母 B（或 φ）表示之。在同一条纬线上各点的纬度是相等的，不同的纬线纬度不等。在赤道上纬度为 0°，纬线圈离开赤道圈愈远纬度越大，至极点纬度为90°，赤道以北的纬度叫北纬，赤道以南的纬度叫南纬。

过 A 点的经线圈与通过英国格林威治天文台的经线圈的二面角，叫做 A 点的经度，以字母 L（或 λ）表示之。经度计算是从格林威治首子午线开始，向东 180° 叫东经，向西 180° 叫西经。在同一条经线上经度是相等的。

地球椭球面上任意一点的位置，可由该点的纬度（B）和经度（L）确定之。这种确定地面点位的方法，叫做用地理坐标确定地面点位的方法，称之为地理坐标系。

地理坐标分天文地理坐标和大地地理坐标两种。天文地理坐标是用天文测量方法决定的，这种纬度和经度叫做天文纬度（φ）和天文经度（λ）。大地地理坐标是用大地测量方法决定的，这种纬度和经度叫做大地纬度（B）和大地经度（L）。我们在地球椭球面上所用的地理坐标系属于大地地理坐标系，简称大地坐标系。一个国家一般只用一种大地坐标系，我国大地坐标系叫做1954年北京坐标系。

2)纬线圈的半径和纬线弧长

如图 0—3，AC 为纬度为 B 的纬线圈，设其半径为 r，则从图中可以看出

$$r = AQ\cos B$$

而 AQ 是从 A 点所作法线交地轴于 Q 之长。这个长度实际上是卯酉圈在 A 点的曲率半径，常以 N 表示之。所谓卯酉圈即通过 A 点垂直于该点的子午圈与椭球面的交线，如图 0—3 的 FAW 曲线。它的曲率半径公式经证明为

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}} \qquad (0-4)$$

故

$$r = N\cos B \qquad (0-5)$$

或

$$r = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}\cos B \qquad (0-6)$$

r 和 N 都是纬度 B 的函数，它们仅随纬度 B 的变化而变化。在赤道上，因 $B=0°$，故 $r=N=a$。随着纬度 B 的增高而 r 逐渐减小，当 $B=90°$ 时，$r=0$。而 N 则随纬度 B 的增高而逐渐增大，到了 $B=90°$ 时，N 为最长。r 和 N 值在“制图用表”表 4 和表 2 中可以查取。

现再求纬线的弧长。如图 0—4，设有与 A 点同纬度的一点 A'，其间经度差为 $l(L_{A'}-L_A)$ 求纬线的弧长 AA'，设其为 S_n。由于纬线圈是以 r 为半径的圆，所以

$$\overset{\frown}{AA'} = S_n = r\, l = N\cos B\, l \qquad (0-7)$$

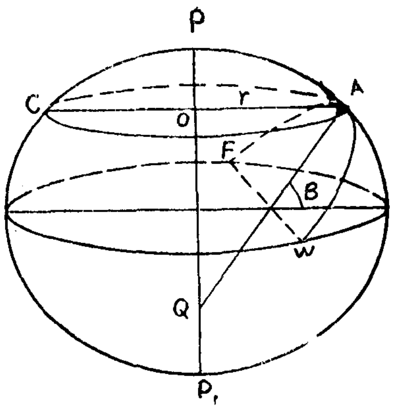


图 0—3

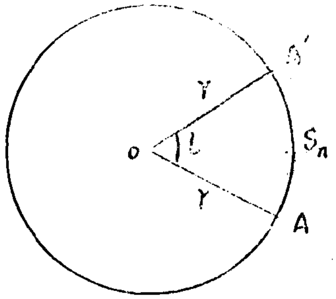


图 0—4

式中 l 为弧度值，若以角度为单位可写成

$$S_n = r\frac{l^\circ}{\rho^\circ} = \frac{l^\circ}{\rho^\circ} N\cos B \qquad (0-7)'$$

式中：
$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\!.2957795$$

在“制图用表”表 6 中载有经差 30′ 的纬线弧长。

3)经线曲率半径和经线弧长

经线圈是一个平面椭圆、在平面椭圆上各点的弯曲程度是不同的，不象圆那样有一个固定的半径。这种半径随各点而异。在数学中称这种半径叫做曲线的曲率半径。设经线的曲率半径为M，经证明其公式为

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}} \qquad (0-8)$$

M也是随纬度B的变化而变化的。在赤道上，$B=0^\circ$，$M=a(1-e^2)$，在极点处，$B=90^\circ$，$M=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}$。可见$M$值在赤道为最小，随着纬度的增大而逐渐增大，在极点处为最大。

M值载于“制图用表”表 1 中。

经线的弧长，按数学的公式，在微分线段为

$$dS_m = MdB \qquad (0-9)^*$$

在同一经线上任意两点的经线弧长公式为

$$S_m = \int_{B_A}^{B_B} MdB \qquad (0-10)$$

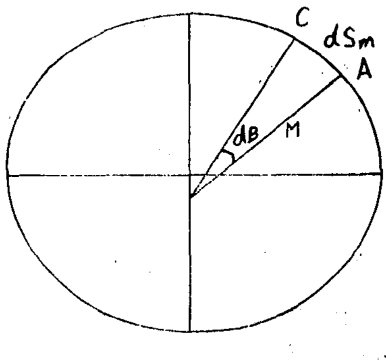


图 0—5

在“制图用表”表 6 中载有纬差 30′ 的经线弧长。

*关于 S_n, S_m, M, N 的推求见附录 1

对地图投影原面——地球椭球面所要说明的问题就是这些。有了这些知识，在进行地图投影时，有关地图投影的原面问题即清楚了。下面再介绍矛盾的另一方——地图平面上的问题。

（二）地图平面

前面提到地图是根据一定的用途要求，必须将地球椭球面或球面的一部分或整个缩小表示到平面上来。这就要求矛盾的另一方——投影面必须是平面或可展曲面，方能适合地图的要求。可以作为地图投影面的通常有三种：平面，圆柱面和圆锥面。圆柱面和圆锥面虽然不是平面，但是可展面，即可沿其母线将其展开成平面，如图０—６，０—７所示。下面我们所要讨论的地图投影，就是以这三种面作为投影面的。

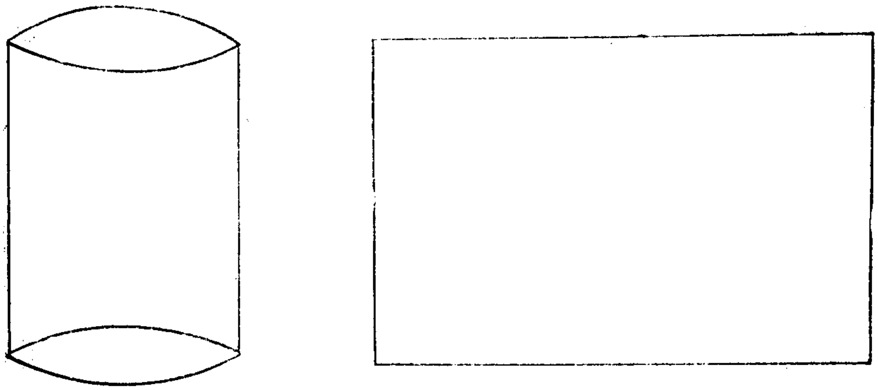


图 0—6

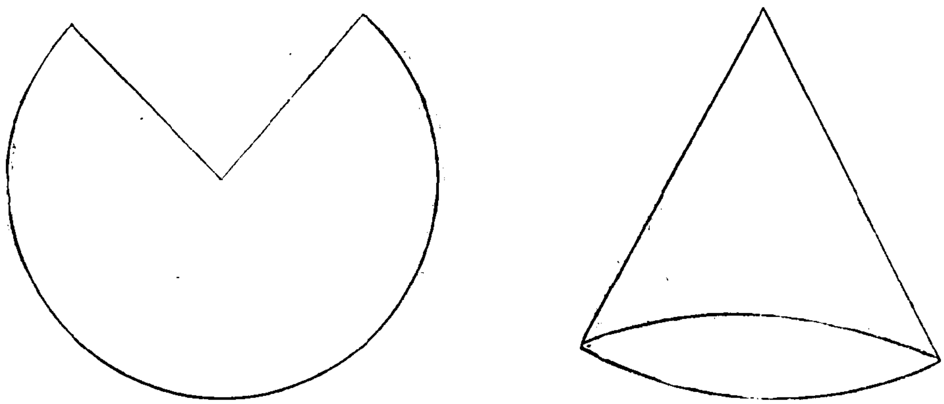


图 0—7

在投影平面上表示地面物体的位置，通常有两种表示方法：平面极坐标表示法和平面直角坐标表示法。

如图0—8所示，设地面上某一点的投影为极坐标的原点即极点，某一经线的投影为极轴。这样地面上某一点的投影即可用其极径（ρ）和极角（δ）将其表示出来，如$A(\rho, \delta)$点。

如果我们从极点作一直线垂直于极轴，命前者为 x 轴，后者为 y 轴，这样地面上某点的投影亦可用 x，y 表示出来，如 $A(x,y)$ 点。

它们之间的关系式为

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta \\ y &= \rho\sin\delta \end{aligned}\right\} \quad (0—11)$$

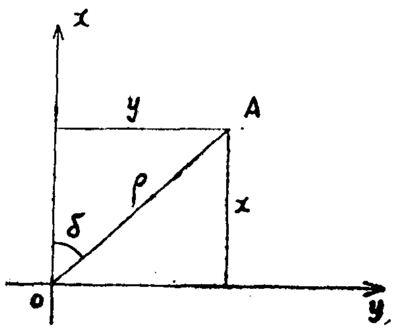


图 0—8

三、解决矛盾的方法——地图投影

前面论述了地球椭球面是一个不可展的曲面，而地图是一个平面，要想把不可展的曲面变换成平面，必须通过地图投影的方法，才能实现。所以，地图投影的方法实际上是实现这种转化的条件。没有这个条件，矛盾着的双方是不能转化的。那末什么叫地图投影？如何进行投影？这就是现在所要说明的问题。

首先说明一下什么是投影？例如把一块三角板放在电灯和墙壁之间，在墙壁上得到的影子

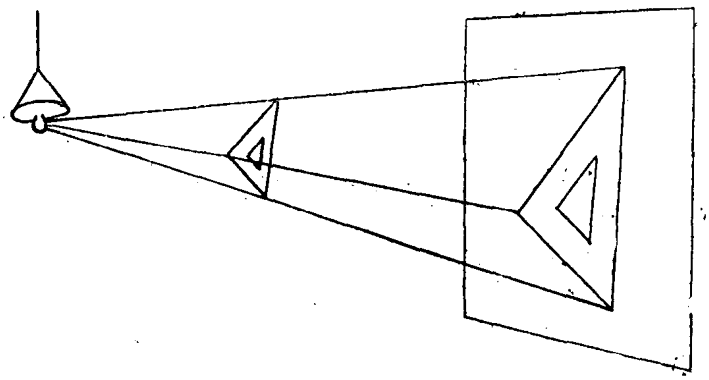


图 0—9

就叫做物体的投影。墙壁叫做投影面，三角板称之为投影原面。像这样光源从一点发出得到的投影叫做中心投影。例如航空像片就是中心投影。

那么地图投影又是怎么一回事呢？与上述例子类似。不过这时投影原面不是一般的某一物体，而是地球椭球面，投影面也不仅仅局限于平面，还有园柱面，园锥面。所以，地图投影就是研究将地球椭球面上的点、线、面用某种方法投影在一个平面或可展的曲面上。如图0—10，

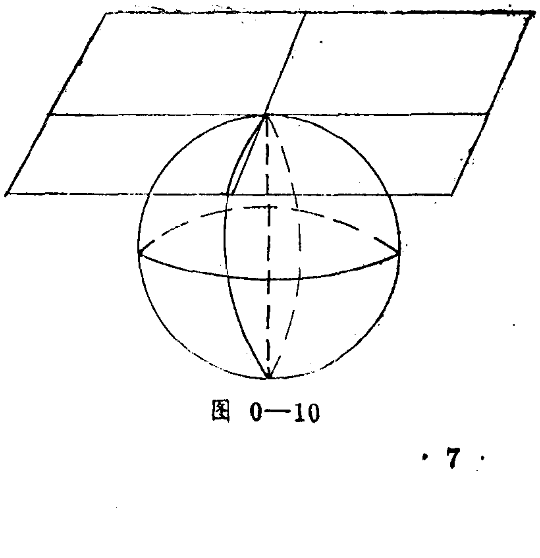


图 0—10

图0—11，和图0—12所示。

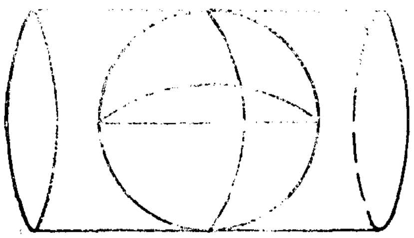


图 0—11

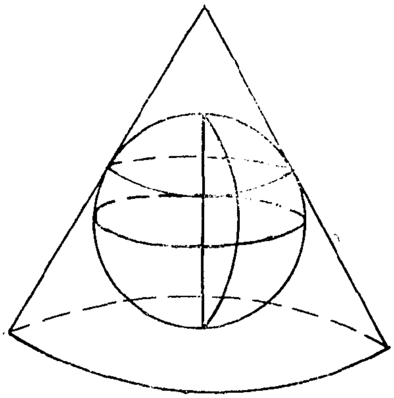


图 0—12

举例来说，设想地球是个透明体，在地球中心放置一个点光源，将投影平面切在地球某点处，打开光源则地表的影子均落在平面上，这就是一种地图投影。这种投影叫球心投影。如投影平面放在地球的北极或南极一点上，这时地球面上的经线投影到平面上将是交于极点的一束直线，纬线是以极点为中心的同心园，如图0—13甲所示。

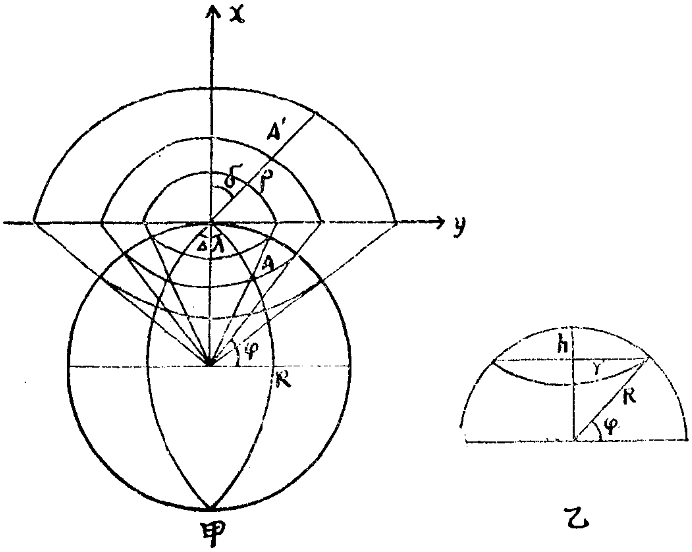


图 0—13

设地球面上有一点 A，它的地理坐标为 φ、λ，投影在平面上为 A' 点，它的平面极坐标为 ρ, δ。由图0—13可以得出球面上点的坐标（φ, λ）与对应在平面上点的坐标（ρ, δ）间的关系式为

$$\left.\begin{aligned} \rho &= R\,\mathrm{tg}(90°-\varphi) = R\,\mathrm{ctg}\varphi \\ \delta &= \Delta\lambda \end{aligned}\right\} \quad (0-12)$$

如果平面上点的坐标用直角坐标来表示，则其关系式为

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\delta = R\,\mathrm{ctg}\varphi\cos\Delta\lambda \\ y &= \rho\sin\delta = R\,\mathrm{ctg}\varphi\sin\Delta\lambda \end{aligned}\right\} \quad (0-13)$$

这就是球心投影方程式。

现在对其进行计算。设地球半径为 $R=6371000^m$，A点的地理坐标为 $\varphi=80°$，$\Delta\lambda=30°$、我们便可按公式(0—12)，(0—13)分别求得该点在平面上的极坐标和直角坐标值。

平面极坐标值为

$$\rho = R\mathrm{ctg}\varphi = 6371000\times0.176327 = 1123389^m$$

$$\delta = \Delta\lambda = 30°$$

平面直角坐标值为

$$x = \rho\cos\delta = 1123389\times0.866025 = 972863^m$$

$$y = \rho\sin\delta = 1123389\times0.5 = 561695^m$$

类似的，根据上述关系式我们就能将球面上所有的点一一对应的表示在平面上，将相应的点连接起来就组成了线，这样就可将球面上的经纬线网表示在平面上。

在上述球心投影中，将球面上的点、线元素转化到平面上，是用投影面切在地球的极点上，通过由球心发出的光线束，照射到平面上，这样的条件促进矛盾的转化而实现的。没有这个条件，是不能实现这样转化的。这种投影方法叫做几何透视方法。也是人们最早用来解决地球面与地图平面这一对矛盾的一种方法。

恩格斯说：**“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的”**[1]。随着人类生产实践活动的发展，单单用几何透视的方法还不能满足编制各种类型地图的需要，这样其它各种地图投影的方法也都相继出现了。其中主要的是数学分析的方法。所谓数学分析的方法，就是以函数的概念建立地球椭球面与平面之间的一一对应关系。现在说明如下：设地球椭球面上点用大地坐标（B,L）来表示，平面上的点用直角坐标（x,y）来表示，由于平面上的点是由地球椭球面上的点而产生的，因此，大地坐标（B,L）是自变量，平面直角坐标（x,y）是因变量，故二者之间的函数关系应是

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(B,L) \\ y &= f_2(B,L) \end{aligned}\right\} \quad (0—14)$$

上式表示x,y是B,L的函数，即x,y随B,L的变化而变化。当给定一B,L值，就对应有一x,y值。这是地图投影的一般方程式，所有地图投影都可以表示为这种函数关系式。要想得到具体投影方程式，还须给定某种投影条件方能实现。例如，前面所举的球心投影用了直线透视这个条件，从而求出其投影方程式为

$$x = f_1(\varphi,\lambda) = \rho\cos\delta = R\mathrm{ctg}\varphi\cos\Delta\lambda$$

$$y = f_2(\varphi,\lambda) = \rho\sin\delta = R\mathrm{ctg}\varphi\sin\Delta\lambda$$

这里所表示的函数关系式，经纬度用φ,λ不用 B,L是因为这种投影是将地球当作球体看待的。

至此可以总括说几句。地球椭球面与地图平面之间的矛盾，是通过地图投影的方法，而加以解决的。所谓地图投影的方法，实际上就是建立地球椭球面与地图平面之间点与点的一一对应关系式。有了这种对应关系式，即可把地球椭球面上的点、线、面元素表示到平面上。但这是最一般的地图投影的方法，进行具体投影时，还须有一定的条件。

①恩格斯：《自然辩证法》

四、新的矛盾——地图投影的变形

毛主席教导我们："**矛盾是普遍的，绝对的，存在于事物发展的一切过程中，又贯串于一切过程的始终**"。"**旧过程完结了，新过程发生了。新过程又包含着新矛盾，开始它自己的矛盾发展史**"[1]。前述应用地图投影的方法，解决了地球椭球面与地图平面之间的矛盾，但解决了这个矛盾之后，又出现新的矛盾，这个新的矛盾就是地图投影的变形。为什么会出现投影变形这种新的矛盾呢？因为把一个不可展的曲面上的东西转换到平面上，完全无误地表现出来是不可能的。若能如此，那就意味着地球不是一个不可展的曲面，而是可以无变形地直接铺成平面的一种曲面了。所以，不论采用什么投影方法，产生投影变形是不可避免的。

现仍以球心投影为例，说明投影的变形情况。

兹求纬度$\varphi=80°$的纬线圈变形。

在地球面上，$\varphi=80°$的纬线圈长为

$$S_n=2\pi r=2\pi R\cos\varphi$$

在这种投影的投影平面上，相应的纬线圈长为

$$S_n'=2\pi\rho=2\pi R\,\mathrm{ctg}\varphi$$

如果以投影面上长度与原面上长度之比，作为量度纬线圈变形大小的量，则有

$$n=\frac{S_n'}{S_n}=\frac{2\pi R\,\mathrm{ctg}\varphi}{2\pi R\cos\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{1}{0.984808}=1.015426$$

这就是说，在球心投影中，$\varphi=80°$的纬线圈比原来的纬线圈伸长了0.015426倍，

现再看由$\varphi=80°$的纬线圈所包围的球块面积的变形。

在球面上球块的面积为（见图0—13乙）

$$S=2\pi Rh=2\pi R(R-R\sin\varphi)=2\pi R^2(1-\sin\varphi)$$

在这种投影的投影面上相应的面积为

$$S'=\pi\rho^2=\pi R^2\mathrm{ctg}^2\varphi$$

则投影面上面积与原面上对应的面积之比值为

$$P=\frac{S'}{S}=\frac{\pi R^2\mathrm{ctg}^2\varphi}{2\pi R^2(1-\sin\varphi)}=\frac{\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi(1-\sin\varphi)}=\frac{1+\sin\varphi}{2\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{1+0.984808}{2(0.984808)^2}=\frac{1.984808}{1.969847}=1.007595$$

可见在球心投影中面积也被放大了。

另外，在球心投影中，除了在极点处两方向的夹角投影后不变外，在其它处两方向的夹角投影后都不相等，这在第二篇再次讨论这个投影时，将可以看到。

由此可见，地图投影从一般情况来说都存在有长度、面积和角度变形。这是不可展的曲面转化为平面的结果，也是旧的矛盾解决了产生新的矛盾的结果。

① 《矛盾论》《毛泽东选集》（四卷合订本）人民出版社1967年，第282页

投影变形问题是地图投影的重要组成部分。如果只研究用什么方法进行投影，而不考虑它的变形大小和分布规律，那末这种投影也就没有多大的实际应用价值。

上面仅借球心投影这个例子，粗略的指出投影变形的存在。现在我们更进一步说明投影变形理论问题和它的严格定义。

（一）地图投影变形的几何解释

列宁说：**"从生动的直观到抽象的思维，并从抽象的思维到实践，这就是认识真理，认识客观实在的辨证的途径"**[1]。为了生动直观地说明地图投影的变形，我们讨论椭球面上一个微小区域投影在平面上的变化情况。

由于投影要产生变形，所以地球椭球面上两条互相垂直的直线投影后一般不正交。对于一点来说，可以作无穷多组互相垂直的直线，这些组直线投影到平面上一般不正交，但其中总有一组投影后仍然正交。如图0—14所示，直角$\angle AOB$，$\angle BOC$投影后可能分别为锐角$\angle A'OB'$和钝角$\angle B'OC'$。设想AC，BD保持相对位置不变而绕O点旋转，当旋转了90°以后，直角$\angle AOB$到了原来的直角$\angle BOC$的位置，这时它的投影由原来的锐角转变为钝角。同样地，直角$\angle BOC$转到了$\angle COD$的位置，它的投影由原来的钝角变为锐角。

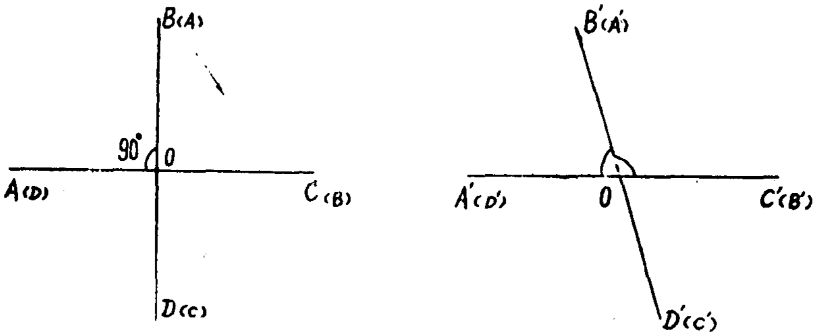


图 0—14

由此可见，一个直角在不同的位置下的投影有着不同的大小，可以由小于90°的锐角转变为大于90°的钝角，或者相反。那末，在变动位置的过程中，必然有一个特殊的位置，直角投影仍保持直角，而没有变形。椭球面上二正交线投影后仍正交的方向，我们称之为主方向。

以上说明在一点两方向上的变形情形，下面再进一步讨论在一点附近一微小圆的变化情形。

如图0—15，设椭球面上有一微小圆$A_0C_0B_0D_0$，由于它在微小区域内，可以把它视为一平面圆，如图0—16甲所示。设其半径为一单位长，并取主方向为坐标轴，用符号ξ,η表示之，则其方程式为

$$\xi^2+\eta^2=1 \qquad (0\text{—}15)$$

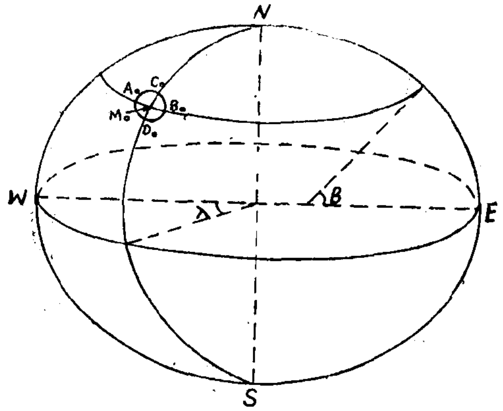


图 0—15

①列宁：《黑格尔（逻辑学）一书摘要》

在图0—16乙中，x, y方向为主方向在平面上的投影。根据上述主方向的概念，x, y方向应是正交的。今设圆周上有一点A，其坐标为ξ, η，该点在平面上的投影为A'，其坐标为x, y。现求A'点围绕O'点所投影的曲线方程，显然这个曲线就是(0—15)式所表示圆的投影。如果令x轴方向长度比值为a，y轴方向长度比值为b，则有

$$\frac{x}{\xi}=a, \quad \frac{y}{\eta}=b$$

或

$$\xi=\frac{x}{a}, \quad \eta=\frac{y}{b}$$

将上式代入(0—15)式中，则得投影后的曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{0—16}$$

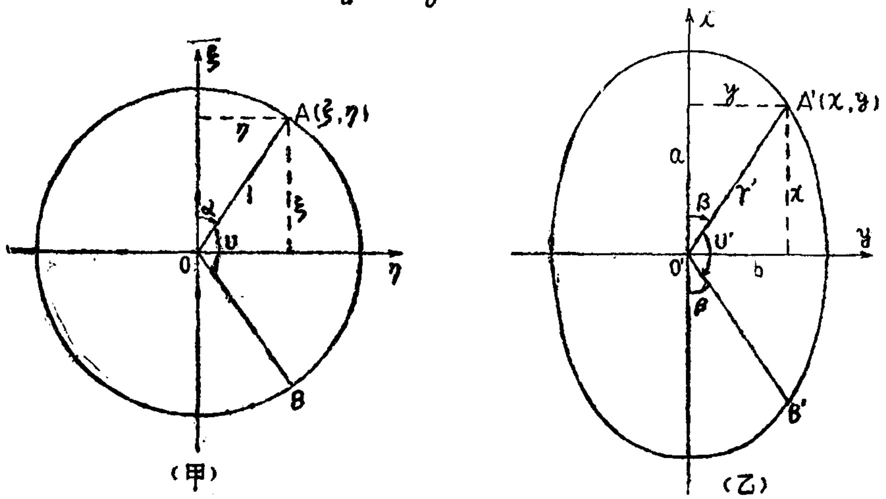


图 0—16

这个方程式代表一个椭圆。这就说明在椭球面上一个微小的圆，投影在平面上一般为一微小的椭圆。这个椭圆是由于投影变形而产生的,可以用来表示投影的变形,故我们称之为变形椭圆。

（二）地图投影变形的量度

毛主席说：**“对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量分析”**①。那末，地图投影变形的大小是怎样来量度的呢？下面我们就来讨论这个问题。

1.长度变形的量度

还是从球心投影谈起，我们计算一下在球心投影中经线长度变形的情况。

在投影平面上经线长为$S'_m=\rho=R\mathrm{ctg}\varphi$，在$\varphi=80°$时，$S'_m=R\mathrm{ctg}80°$，在$\varphi=70°$时，$S'_m=R\mathrm{ctg}70°$。而相应的在球面上的经线长，在$\varphi=80°$时，$S_m=R\frac{90°-80°}{\rho°}$，在$\varphi=70°$时，$S_m=R\frac{90°-70°}{\rho°}$。

取其比值为量度长度变形大小的量，则有在$\varphi=80°$时

$$m=\frac{S'_m}{S_m}=\frac{R\mathrm{ctg}80°}{R\mathrm{arc}10°}=\frac{0.176327}{0.174533}=1.010279$$

①《党委会的工作方法》《毛泽东选集》(四卷合订本）人民出版社1967年，第1332页