

641097 33

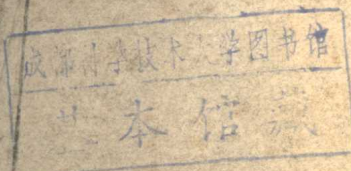
7/6862.3

T.14.2A

[美] R. Resnick 著
D. Halliday

《物理学》第一卷 第二册

习题解答



南京工学院物理教研组
《物理学》习题解答编写组

1981.5

本习题解答工作由恽瑛、颜兴滂、朱君哲、
宋玉亭等同志负责，参加本册解题工作的同
志有：

解题：谈漱梅、周遥生、薛豪、马见慈、
颜兴滂

校对：谈漱梅、周遥生、薛豪、颜兴滂

绘图：凌甘宁

7A042/02

33

641097

33

7/6862-3

7 6862.5

T-1 9-20

T-1 9-20

目 录

第十五章	振动	(1)
第十六章	万有引力	(43)
第十七章	流体静力学	(82)
第十八章	流体动力学	(102)
第十九章	弹性介质中的波	(125)
第二十章	声波	(148)
第二十一章	温度	(175)
第二十二章	热与热力学第一定律	(195)
第二十三章	气体分子运动论(I)	(213)
第二十四章	气体分子运动论(II)	(238)
第二十五章	熵与热力学第二定律	(251)

第十五章 振 动

1. 一个悬挂在一弹簧下端的 4.0 千克的物体使弹簧从平衡位置伸长 16 厘米。将这物体拿开，再将一个 0.5 千克的物体挂在这同一弹簧下端。然后将弹簧拉长并释放。试问物体的振动周期为多大？

$$[\text{解}] \quad \because \quad k = \frac{F}{x_1} = \frac{m_1 g}{x_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad T &= 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 x_1}{m_1 g}} \\ &= 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{0.50 \times 16 \times 10^{-2}}{4 \times 9.8}} = 0.28 \text{ 秒} \end{aligned}$$

2. 将一质量为 2.0 千克的物体挂在一弹簧上。再将另一质量为 300 克的物体挂在这物体的下面，这时弹簧又拉长 2.0 厘米。如果将 300 克的物体拿开而使 2.0 千克的物体振动，试求振动周期。

$$[\text{解}] \quad \because \quad k = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{(m_1 + m_2) g}{x_1 + x_2}, \text{ 得 } k = \frac{m_2 g}{x_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad T &= 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 x_2}{m_2 g}} \\ &= 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{2.0 \times 10^3 \times 2.0}{300 \times 980}} = 0.73 \text{ 秒} \end{aligned}$$

3. 一弹簧秤从 0 到 32 磅的读数标度共 4 英寸长。现在发现一悬挂于这弹簧的包裸以频率 2.0 赫兹竖直地振动。问包裸重多少？

$$[\text{解}] \quad \because F=kx, \quad k=\frac{F}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore W=mg &= \frac{k}{\omega^2}g = \frac{kg}{(2\pi\nu)^2} = \frac{Fg}{(2\pi\nu)^2x} \\ &= \frac{32 \times 32}{\frac{4}{12}(2 \times 3.14 \times 2.0)^2} = 19 \text{磅} \end{aligned}$$

4. 就竖直振动而言, 可以认为一辆汽车是被安装在一弹簧上的。将一汽车的弹簧加以调整使其振动频率为 3 赫兹, 试问: (a) 如果这汽车重 3200 磅, 则弹簧的倔强系数是多少? (b) 如果有五个乘客, 平均每人重 160 磅, 乘在这车上, 则振动频率是多少?

$$[\text{解}] \quad \because \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= (2\pi\nu)^2 M = (2 \times 3.14 \times 3)^2 \times \frac{3200}{32} \\ &= 3.53 \times 10^4 \text{磅/呎} \end{aligned}$$

又车上载人时,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3.53 \times 10^4}{(3200 + 5 \times 160)/32}} \\ &= 2.7 \text{赫} \end{aligned}$$

5. 试证 (a) 任一简谐运动的周期和频率公式是

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a}} \quad \text{与} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{a}{x}}$$

(b) 任一角简谐运动的周期和频率公式是

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{\theta}{\beta}} \quad \text{与} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\beta}{\theta}}$$

[证] (a) $F = -kx$, $ma = -kx$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

所以 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$

其解为 $x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$

即 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{-\frac{a}{x}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a}}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{a}{x}}$$

(b) $\tau = -k\theta, \quad I\ddot{\theta} = -k\theta, \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta$

所以 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$

其解为 $\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \varphi\right)$

即 $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{-\frac{\beta}{\theta}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{-\frac{\theta}{\beta}}$$

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\beta}{\theta}}$$

得证

6. 将一质量 m 系于 竖直挂 的弹簧下端, 弹簧的 端点以 2.0 秒的周期振动。将这个质量增加 2.0 千克, 周期就变为 3.0 秒, 试求 m 的值。

[解] $\because T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}},$

而 $M = m + 2.0$

$$\therefore \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{M}{m}} = \sqrt{\frac{m+2.0}{m}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{m+2.0}{m}$$

$$\therefore m = 1.6 \text{ 千克}$$

7. 一质点在点 $x=0$ 附近作线性谐振动。在 $t=0$ 时，其位移为 $x=0.37$ 厘米而速度为零。运动频率为 0.25 赫兹。试确定：(a) 周期，(b) 角频率，(c) 振幅，(d) 在时刻 t 的位移，(e) 在时刻 t 的速度，(f) 最大的速率，(g) 最大加速度，(h) 在 $t=3.0$ 秒时的位移与(i) 在 $t=3.0$ 秒时的速率。

[解] (a) 周期 $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0.25} = 4 \text{ 秒}$

(b) 角频率 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 0.25 = \frac{\pi}{2} \text{ 弧度/秒}$

(c) 振幅 $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$,

∵ $x_0 = 0.37 \text{ 厘米}, v_0 = 0$

∴ $A = 0.37 \text{ 厘米}$

(d) 运动方程 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 而 $t=0, x=A$, 则 $\varphi=0$

位移 $x = 0.37 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ 厘米}$

(e) 速度 $v = -A\omega \sin \omega t = -0.185\pi \sin \frac{\pi}{2}t \text{ 厘米}$

(f) 最大速率 $v_{\max} = |-A\omega| = 0.185\pi \text{ 厘米/秒}$

(g) 最大加速度 $a_{\max} = |-A\omega^2| = 0.093\pi^2 \text{ 厘米/秒}^2$

(h) $x_{t=3} = 0.37 \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3\right) = 0$

(i) $v_{t=3} = -0.185\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 3\right) = 0.185\pi \text{ 厘米/秒}$

8. 一质量为 0.1 千克 ($W = mg = 0.22$ 磅) 的小物体作振幅 1.0 米 (3.3 英尺) 和周期 0.20 秒的简谐运动。试问：(a) 作

用在这物体上的力的最大值是多少？(b) 如果振动是弹簧所产生的，那末弹簧的倔强系数是多少？

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (a) \quad F_{\max} &= m\omega^2 A = 0.1 \times \left(\frac{2\pi}{0.2} \right)^2 \times 1.0 \\ &= 10\pi^2 = 99 \text{ 牛} \end{aligned}$$

$$(b) \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4 \times (3.14)^2 \times 0.10}{(0.20)^2} = 99 \text{ 牛/米}$$

9. 在正常温度时，固体内原子的振动频率的数量级为 10^{13} 赫兹。想像各原子由“弹簧”相互联接着。假定一单个银原子以这个频率振动，而所有其它原子均处于静止状态。试计算单个弹簧的倔强系数。已知一摩尔银具有 108 克的质量并含有 6.02×10^{23} 个原子。假设每一原子仅与最邻近的原子相互作用。

[解] 一银原子的质量为

$$m = \frac{108}{6.023 \times 10^{23}} = 1.8 \times 10^{-22} \text{ 克}$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4 \times 3.14^2 \times 1.8 \times 10^{-22}}{(10^{-13})^2} \\ &= 7.1 \times 10^5 \text{ 达因/厘米} = 710 \text{ 牛/米} \end{aligned}$$

10. 一物体放在一活塞上，这活塞在竖直方向作简谐运动，其周期为 1 秒。试问：(a) 在多大振幅时，物体与活塞将相互分离？(b) 如果活塞具有 5.0 厘米的振幅，则物体与活塞保持接触的最大频率为多大？

[解] (a) 当木块与活塞作谐振动时，其加速度 $a > -g$ 时，木块能与活塞分离

$$\begin{aligned} \text{又} \quad A &= -\frac{a}{\omega^2} > -\frac{g}{\omega^2} = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 9.8 \times \left(\frac{1.0}{2\pi} \right)^2 \\ &= 0.25 \text{ 米} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{980}{5.0}} = 2.23 \text{ 赫}$$

11. 一物体放在一水平面上，这水平面以 2 赫兹的频率作水平简谐运动。物体和平面之间的静摩擦系数为 0.50。试问，如果物体不沿着水平面滑动，则其最大振幅可为多大？

[解] $\because a_{max} = A\omega^2$

当弹力小于摩擦力时，木块不被移动，此时

$$ma_{max} = mA\omega^2 \leq \mu mg$$

$$\therefore A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{(2\pi\nu)^2} = \frac{0.50 \times 9.8}{(2\pi \times 2)^2} = 0.031 \text{ 米}$$

12. 一音叉作简谐运动，其频率为 1000 赫兹，其两股之一的末端的振幅为 0.40 毫米。试求：(a) 音叉末端的最大加速度和最大速率，(b) 当音叉末端的位置为 0.20 毫米时的加速度和速率。(c) 作为时间函数的端点位置的表示式，假设在 $t=0$ 时端点位于平衡位置。

[解] (a) $v_{max} = |-A\omega| = |-A \times 2\pi\nu|$

$$= 0.4 \times 2\pi \times 10^{-3} \times 10^3 = 2.5 \text{ 米/秒}$$

$$a_{max} = |-A\omega^2| = |-A \times (2\pi\nu)^2|$$

$$= 0.4 \times (2\pi \times 10^3)^2 \times 10^{-3} = 1.6 \times 10^4 \text{ 米/秒}^2$$

(b) 由方程 $x = A \cos \omega t$

可得 $\cos \omega t = \frac{x}{A}$, 所以 $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$

$$v_{x=0.2} = -\omega A \sin \omega t = -v_{max} \sin \omega t$$

$$= -2.5 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{0.4}\right)^2} = -2.2 \text{ 米/秒}$$

$$a_{x=0.2} = -a_{max} \cos \omega t = -1.6 \times 10^4 \times \frac{0.2 \times 10^{-3}}{0.4 \times 10^{-3}}$$

$$= -8.0 \times 10^3 \text{ 米/秒}^2$$

(c) $\because t=0$ 时 $x=0$,

由运动方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore x=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$=0.4\times 10^{-3}\cos(2\pi\times 10^3t+\frac{\pi}{2})\text{米}.$$

13. 一物体作简谐运动, 其运动方程为

$$x=6.0\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

式中 x 的单位为米, t 的单位为秒, 而括号内的数值则以弧度为单位, 试求这物体在 $t=2$ 秒时的 (a) 位移, (b) 速度, (c) 加速度与 (d) 位相, 并求这物体的 (e) 振动频率与 (f) 振动周期。

$$[\text{解}] \quad (\text{a}) \quad x_{t=2}=6.0\cos\left(3\pi\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=3.0\text{米}$$

$$\begin{aligned} (\text{b}) \quad v_{t=2} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ &= -3\pi \times 6.0 \sin\left(3\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) = -49\text{米/秒} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{c}) \quad a_{t=2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -(3\pi)^2 \\ &\quad \times 6.0 \cos\left(3\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}\right) = -266\text{米/秒}^2 \end{aligned}$$

$$(\text{d}) \quad (\omega t + \varphi)_{t=2} = 3\pi \times 2 + \frac{\pi}{3} = \frac{19}{3}\pi$$

$$(\text{e}) \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = 1.5\text{赫}$$

$$(\text{f}) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = 0.67\text{秒}$$

14. 一扬声器通过膜片振动而产生乐音。如果膜片振幅不能大于 1.0×10^{-3} 毫米, 则使膜片的加速度超过 g 时所需要的频率为若干?

$$[\text{解}] \quad \because a_{\text{max}} = A\omega^2$$

当 $a_{max} > g$ 时, 则 $A\omega^2 > g$

$$\text{所以 } \omega > \sqrt{\frac{g}{A}} = \sqrt{\frac{9800}{1.0 \times 10^{-3}}} = 3.13 \times 10^3 \text{ 1/秒}$$

$$\nu = \frac{3.13 \times 10^3}{2\pi} = 0.5 \times 10^3 = 500 \text{ 赫}$$

15. 两质点沿着同一直线作相同频率和相同振幅的简谐运动。当它们每次沿相反方向互相通过时, 它们的位移均为它们的振幅的一半, 试问它们之间的相差为多大?

[解] 设 $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)$, $x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$

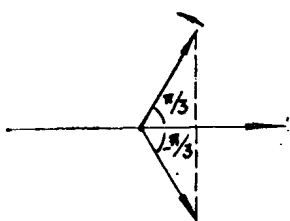
相遇时, 有 $\frac{A}{2} = A \cos(\omega t + \varphi_1) = A \cos(\omega t + \varphi_2)$

即 $\cos(\omega t + \varphi_1) = \cos(\omega t + \varphi_2) = \frac{1}{2}$

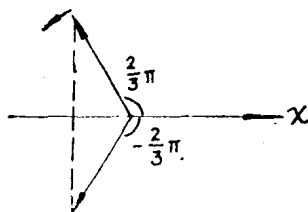
$$\omega t + \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}, \quad \omega t + \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3}$$

$\therefore |\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{2}{3}\pi$, (两质点反向相遇)

或 $|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{4}{3}\pi$



(a)



(b)

习题 15—15

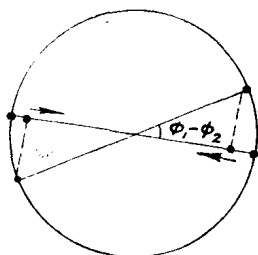
16. 两质点沿着长为 A 的同一段直线作简谐振动。每一质点具有 1.5 秒的周期, 相差为 30° 。试问: (a) 当超前的质

点出发 0.5 秒后, 落后的质点离开路径一端, 这时它们相隔多远 (用 A 表示)? (b) 这时它们是否沿同一方向运动, 是否相向运动, 或者是否相互分离?

〔解〕 (a) 设两个质点的运动方程分别为

$$x_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$



习题 15—16

按题意 $\varphi_1 - \varphi_2 = 30^\circ$, 且 $t = 0.5$ 秒时, $x_2 = \frac{A}{2}$

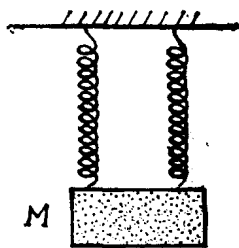
$$\begin{aligned} \text{则} \quad x_2 &= \frac{A}{2} = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times 0.5 + \varphi_2\right) \\ &= \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi_2\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \varphi_2 = -\frac{2}{3}\pi, \quad \varphi_1 = 30^\circ + \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \left| \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right| \\ &= \left| \frac{A}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - 1 \right) \right| = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} A \end{aligned}$$

(b) 两质点将取同方向运动。(如图示)

17. 将一个倔强系数为 7.0 牛顿/米, 无重量的弹簧切成两半。(a) 每个半截的倔强系数为多少? (b) 将这两半截分开悬挂起来并吊着一质量为 M 的物体(如图)。假定这系统的振动



习题 15—17

频率为 3.0 赫兹，则质量 M 的值为多大？

[解] (a) $\because$ 弹簧的弹性力不变，则

$$F = kl = k'x = k' \frac{l}{2}$$

$$\therefore k' = 2k = 2 \times 7.0 = 14 \text{ 牛/米}$$

$$(b) \quad \therefore a = -\frac{2F'}{M} = -\frac{2k'}{M}x \quad \omega^2 = \frac{2k'}{M}$$

$$\therefore M = \frac{2k'}{\omega^2} = \frac{2 \times 14}{(2\pi \times 3.0)^2} = 7.9 \times 10^{-2} \text{ 千克}$$

18. 一均匀的弹簧具有倔强系数 k ，其自然长度为 l ，将这弹簧切成自然长度为 l_1 和 l_2 的两段，其中 $l_1 = nl_2$ ，而 n 为一整数。试问用 n 和 k 所表示的相应的倔强系数 k_1 与 k_2 各为多少？并就 $n=1$ 与 $n=\infty$ 验证所得结果。

[解] $F = k_1x_1 = k_2x_2 = k(x_1 + x_2)$

又 $l_1 = nl_2$ ，有 $x_1 = nx_2$

$$\therefore k_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1} k = \frac{nx_2 + x_2}{nx_2} k = \frac{n+1}{n} k$$

$$k_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2} k = \frac{nx_2 + x_2}{x_2} k = (n+1)k$$

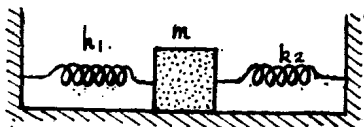
当 $n=1$ 时， $l_1=l_2$ ， $k_1=k_2$ ，则

$$k_1 = k_2 = 2k$$

当 $n=\infty$ 时， $l_1=l$ ， $l_2=0$ ，则

$$k_1 = k, k_2 = \infty$$

19. 如图所示，将两弹簧系于一质量为 m 的物体上并固定于支架上。试证，在这情况下，振动频率为



习题 19—19

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

(这个系统和电学中的两个电容器的串联相类似。)

[证] $F = F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$

由 $ma = -(k_1 + k_2)x$ 可以看出

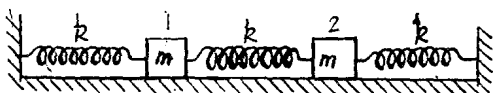
$$\omega_2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

$$\therefore \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

20. 如图所示, 将两个质量同为 m 的物体和三个倔强系数同为 k 的弹簧连接起来。(a) 令 x_1 、 x_2 分别表示一物体离开平衡位置的位移。试证

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1) \quad \text{与}$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2)$$



习题 15—20

(b) 假定这两个方程的解具有形式 $x_1 = A_1 \sin \omega t$ 与 $x_2 = A_2 \sin \omega t$, 试求这系统的振动频率。

[证] (a) 对于物体 1 而言, 受力为

$$F_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -k(2x_1 - x_2)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= ma_1 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k(2x_1 - x_2) \\ &= k(x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

对于物体 2 而言, 受力为

$$F_2 = k(x_1 - x_2) + k[x_1 - (x_1 - x_2)] \\ = -k(2x_2 - x_1)$$

$$F_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(2x_2 - x_1) = k(x_1 - 2x_2)$$

(b) 若 $x_2 = 0$, 则 $m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2kx_1$,

$$\omega_0 = \frac{2k}{m}, \text{ 有 } \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = \frac{k}{m} x_2$$

若 $x_1 = 0$, 则 $m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -2kx_2$,

$$\omega_0 = \frac{2k}{m}, \text{ 有 } \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = \frac{k}{m} x_1$$

以 $x_1 = A_1 \sin \omega t$ 及 $x_2 = A_2 \sin \omega t$ 代入得

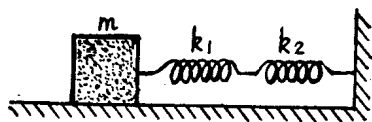
$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A_1 = \frac{k}{m} A_2 \text{ 及}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) A_2 = \frac{k}{m} A_1$$

两式相乘得 $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2$

所以 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \omega_0^2} = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

21. 如图所示, 将两弹簧连接起来并系于一质量为 m 的物体上。所有接触表面都是光滑的。假设两弹簧分别具有倔强系数 k_1 与 k_2 , 试证 m 的振动频率为



习题 15—21

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

(这个系统和电学中的两个电容器的并联相类似。)

[证] 设两弹簧分别伸长 x_1 和 x_2 , 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{cases}$$

$$\therefore x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_1 x_1 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$$

$$\therefore \omega = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} \quad \text{得证}$$

22. 在某些双原子分子中, 两原子间的相互作用力可以用 $F = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}$ 来表示, 其中 a 与 b 均为正的常数, 而 r 为两原子的间隔距离。试作出 F 对 r 的曲线图。然后, (a) 证明在平衡时间距为 $\frac{b}{a}$; (b) 证明对于平衡间距附近的微振动, 倔强系数为 $\frac{a^4}{b^3}$; (c) 试求这个运动的周期。

[证] (a) 在平衡位置时, $F = 0$

$$\text{即} \quad -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} = 0, \quad \therefore r = \frac{b}{a}$$

F 对 r 的曲线图略

$$(b) \quad \frac{dF}{dr} = -\left(\frac{d^2 U}{dr^2}\right)_{r=\frac{b}{a}}$$

$$\text{且} \quad M \frac{d^2 r}{dt^2} = -\left(\frac{d^2 U}{dr^2}\right)_{r=\frac{b}{a}} \cdot r$$

$$\begin{aligned} \therefore k &= \left(\frac{d^2 U}{dr^2}\right)_{r=\frac{b}{a}} = -\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=\frac{b}{a}} \\ &= -\left(\frac{2a}{r^3} - \frac{3b}{r^4}\right)_{r=\frac{b}{a}} = \frac{a^4}{b^3} \end{aligned}$$

$$(c) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{b^3}{a^4} m}$$

23. 将一个倔强系数为 19 牛顿/米 (1.3 磅/英尺) 的、无质量的弹簧 竖直地悬挂起来, 再将一 质量为 0.2 千克 ($W = mg = 0.44$ 磅) 的物体系于弹簧的自由端, 然后由静止释放。假定在物体释放之前, 弹簧未被拉长。假设物体作简谐振动。试求:

(a) 物体下降到初始位置以下的距离, (b) 振动的频率与 (c) 振幅。

[解] (a) 当物体到达最低处时, 重力势能 转换为 弹性能, 所以 $\frac{1}{2}kh^2 = mgh$

$$h_{max} = \frac{2mg}{k} = \frac{2 \times 0.2 \times 9.8}{19} = 0.206 \text{ 米}$$

$$(b) \text{ 振动频率 } \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{19}{0.2}} = 1.6 \text{ 赫}$$

$$(c) \text{ 振幅 } A = \frac{1}{2}h_{max} = \frac{0.206}{2} = 0.103 \text{ 米}$$

24. 一个振动着的质点——弹簧系统具有 1.0 焦耳 (0.74 英尺·磅) 的机械能量, 0.10 米 (0.33 英尺) 的振幅与 1.0 米/秒 (3.3 英尺/秒) 的最大速率。试求: (a) 弹簧的倔强系数, (b) 质点的质量, 与 (c) 振动频率。

$$[\text{解}] (a) \quad \frac{1}{2}kA^2 = E$$

$$\therefore k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2 \times 1.0}{(0.10)^2} = 2 \times 10^2 \text{ 牛/米}$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}mv_{max}^2 = E$$

$$\therefore m = \frac{2E}{v_{max}^2} = \frac{2 \times 1.0}{(1.0)^2} = 2 \text{ 千克}$$