數學新義

（第三集）

林大茅著

1962

數學新義

（第三集）

林大茅 著

1962

數學新義（第三集）

著　　者：林　大　茅
印 刷 者：光華印務公司
Kong Hua Printers
2, Lorong 25, Geylang,
Singapore, 14.
一九六二年七月二十日初版
每冊定價二元八角

自　序

拓扑學（Topology）不僅是高深玄奥的數學，而且也是純理繁複的反映法。

不論在學理上直覺上看來，拓扑學是不能離開變換的，因在變換之先，必有一個本集，而在變換之後，又有另一象集，而這些本集，象集，及變換的意義是與反映法一致的，所以拓扑學是反映法的形式，而反映法則為拓扑學的內容。但也可以說，反映法是拓扑學的初步，而拓扑學則為反映法的完成。

作者根據此點而作斯書，其內容分四章六十五節，第一章論包羅，指出它决不是簡單的方法，而係包羅多種的複雜奇奥的創作方法，這不僅是前賢之所未見，亦非流俗之所能解。故分陳縷述，必求詳盡。這樣，才能脱離半學術的形態，而進入純學術的領域，從而脱離哲學的羈纏，再進入數學的堂奥！

至於取材，則採自拓扑羣論（Pontrjagin: Topological group），而第二章則以流形拓扑學（Wilder; Topology of Manifolds）為主，此卽以第一章的理論，應用於流形拓扑學之中，使其獲得最現實的考驗！

第三章之目的，在求拓扑學的實際發展，因立八支途徑，以便創作。

第四章則以現身說法，運用全力，以為首倡，並証拙見的非謬！

末了，關於文獻方面，書中所引用的學理，多載明原書頁

數，以便參考。至於詞語，則取自江（澤涵）譯之拓扑學，以求名詞之統一，而江譯有所遺漏者，始另進求，這是不可不注意的。

一九六一年十二月一日林大茅序於獅島海舍

第一章　包羅

1.　包羅

若提到反映法的問題，恐怕大家都已看到它有一個傾向——公式化，八股化，呈顯着牽强貧乏，缺乏生氣的空殼，因此，許多工作者們徬徨道左，沒有出路！其實過去的果實，不過是初步的結晶，簡單的原則而已，而其中還有許多工作，尚待完成，更有不少田地，可以墾殖！

若要排除艱困，衝破難關，除非返到現實，別無他法，否則沒有實踐，怎能鞏固理論？沒有深入研究，怎能談到發展工作？

作者夙懷宏願，曾著純粹史學，嗣用級數測定表創立拼合理論，以說明創作的原理，茲更進一步，把這些原理滲入拓扑學（Topology）裏面，從而獲得了拚合法，分類法，分析法，提煉法，遞進法，抽象法，追原法，還原法，考証法，叠進法等。作家們在寫作時無意中採用了這些方法從事創作而不自知，以為其寫作方法係由靈感得來。

一、拚合法：其形象有如聲母和韻母的相拚，當相拚的時候，不但各有所失，但也各有所得。起初由兩個概念的相逢，但為了大家都要發展的緣故，在正面勢力裏，發生了相吸的作用，把它們相互配合，因此，各有所得，而其反面，也就是否定的揚棄的力量，因此，乃有所失。這種正反力量，乃構成統一與矛盾的現象。先就某集來說，當其吸住另一集的時候，便造成了正面的否定，其目的則要否定了自己，結果，否定了自

身的一部分。因此，造成了膠着狀態，又當其反面勢力——揚棄——起來的時候，則又否定了另一集的另一部分，從而把否定否定了。

二、分類法：這是創作的另一途徑，其要點則在選取實際事物的本質，這法嘗用於生物學，史傳的史記，和小學的六書。殊不知大賢制作，實導源於同異的心理，乃有同異的能力，從而演成兩股正反的勢力，起初人們對於異物是要否定的，是要使之彼此分立的，這便構成了第一否定，所以形成了形式增加，但一到罄竭時候，則有同的勢力起來而否定了否定。這樣，由於正反的勢力——同異能力——之統一而終止了形式增加的發展，遂完成了分類法。

三、分析法：分析法應先樹立一個表格，滲進實際事物裏面，以待實際的考驗。因此，這表格便被原來事物否定了，由是原來表格的各部分不能不重行估計，即揚棄，保留，及改變使成適合實際事物的新表格，因此又否定了否定。

要知滲入是一種正面的力量，反之，反滲入則是反面的力量了，改變表格又復綜合組成，則係反面的反面力量——正面的——了。

表格的樹立，既是人造的，那麼，其所表現的事物，也是人意的，所以分析法不是先天的，它係從實際事物中把所有共同點逐漸分析出來，因而塑造成為象集，這象集的意義，還要視綜合所有分析過的點如何而定。所以從分析法的全局看來，剖分是一個力量，而綜合又是其反面的力量，也是最主要的人工的第二否定。

四、提煉法：在創作過程中除了上述之外，更有一種方法，叫做提煉法。顧名思義，其對象是先天的，而非如抽象法所創造的東西是人工的，是任意的。這些先天的東西和自然界的原理定律一樣，都是個別存在的，也就是要游離而又不能游離，不要游離而又零星散漫的出現。所以分離運動是提煉法的正面力量，而不要游離，則為反面的阻力，這兩種力便構成提煉法正反的力量，有了正面的力量，才能從事物中把個別事物分離出來，使造成要游離而又不能游離的第一否定，有了反面的阻力，才有零星散漫的個別事物的出現，因此，又把否定否定了。

上述提煉法是屬於反映法的一種方法，茲再論其形態，它所要捕捉的，是事物的靈魂，而這個靈魂是或隱或現的，是先天存在的事物，我們應用描述方法捕捉一個完全的個別事物使能代表所有或隱或現的真景。所謂完全的個別事物也不外是先天事物的一種。

五、遞進法：其形態為：「奪形換骨，另立支系，」外表上雖可說是拚合法的一支，但拚合法自新物形成以後，舊形已不復存留，而遞進法則以完全不同的方法來表現原物。所以在遞進法裏面，實具有一股奪取外形的力量，而其反面卻藏有否定外形的力量。當其在第一否定時候，不過是把形與法的結合而變為形與新法的結合，從而否定了自己，又在第一否定之後，舊形又受了新法的支配，而成新義，由是又把否定否定了。

六、抽象法：「抽取特質，隨意編造新義。」便是抽象法的本質。在分析法裏，雖有許多現成的特性，但不能任意編綴

成物，而在抽象法裏面，設有一特性被抽出以後，如仍不能成物，則可另抽出一個特性來補綴它，由是第三，第四……。但抽出是不能沒有停止，否則便失却其原來目的了。故其最後，必有一次達到完成之境。因此，我們明白了抽取是其主要力量，有了這個力量，便產生了第一否定，而其反面的力量——反抽取——則把抽出的否定狀態否定了，因而完成了創作的過程，在這個過程裏，兩個相反的力量，便構成了矛盾。

七、追原法：這即是蘇格拉底的問答法，起初對於事理，發生驚奇，因此，連環推求，對於任何事理，必追求其原因。這是一種壓力，也是產生第一否定的力量。這力量是正面的，而其反面，則為不追求的力量。這是當最後原因求得之後，便否定了正面追求的勢力，因此，建立了正反的勢力。

八、還原法：關於還原法的問題，已在拙著純史中討論過了。所謂「還原」實具有反求的意義，例如從二數求積是乘法，而由積反求原二數中的一數則為除法，由是遂成「一去一返」的一對變換。起初反求的意義否定了乘法，無疑是一種否定的力量，但單靠這種力量是不足尋求乘數或被乘數的，因此，須反面力量——乘法，加法，減法——綴緝起來而成除法，由是又把否定否定了。

九、考証法：考証法雖然不是主要的創作工具，但也有其用處。其法，先立一主題，以否定非主題的勢力，但當發見主題被實際事物否定之後，因另立了新主題，便否定了否定。

例如關於洪水湮滅罪人的記載，一般人都誤為它是離奇發生的，但當用考據法搜索材料以後，便見這項傳說在各民族

中是很普遍的，因此，離奇的信念便被否定了。但在初民社會裏，水害是司空見慣的，因而各有累代的記載，由是又揚棄了神秘的意義而改為科學的因果關係，這樣，又把否定否定了。

又如古書所載的70，100，3000等數字，應係記載其特別的數目，但若從正面出發，當發見了同一事件對數字有不同的矛盾的記載時候，那麼，所代表特別數目的觀念便被否定了。但從反面來說，這些數字總是不可不代表數目的，因此，相反的它們不可代表真確的數而係代表近似的數，很多的數，以及無窮的數，因此又把否定否定了。

十、叠進法：關於叠進法的問題，在純粹史學裏也已討論過了。所謂叠進，便是重複的意思。在叠進法裏，重複實可分為兩種意義：一、在發展的時候可重複採用其否定勢力。一、在先後概念的形態上，也是可以重複的。例如個，十，百，千，的形態都是具有單位意義的，而其所以會發展，則全從反面的否定力量——不相等——而來。

反映法所包羅的方法，旣如上述。茲再舉數例，以明其意，特述如次。

2.　拚合法舉例

（i）在L. Pontrjgin所著的拓扑羣論第三章裏，可以說是拚合法的好例子。因拓扑學與羣論本是二支不同的數學系統，但為了各要發展的緣故，便互相吸引起來而否定了自己，又經了拚合之後，便各自揚棄了自己的地域，從而否定了否定，而成為拓扑羣理論了。

由於變換羣的研究，便吸引了連續觀念，從而否定了它們自己，而變為有鄰域的對應了，這樣，連續的作用，不但否定了變換羣，而且把羣的觀念拉進鄰域裏面去，而其羣裏所蘊蓄的正面力量乃否定了否定——流形的鄰域對應——而把鄰域的對應變為羣與鄰域的對應了。

若考查拓扑羣的定義，便知上述是正確的。因：

（1）G是抽象羣。

（2）G是拓扑空間。

（3）（a）若 $a,b\varepsilon G,W$ 為（ab）的鄰域，則必有 a,b 的鄰域 U,V，使 $UV\subset W$.

（b）$a\varepsilon G,V,U$ 各為 a^{-1},a 的鄰域，則 $U^{-1}\subset V$.

由是知 U,V,W 雖同係鄰域而 $UV\subset W,U^{-1}\subset V$ 又是含羣中乘積的性質及逆元素的意義，這完全是把元素所成的羣加上鄰域的意義了。（見原書第五三頁）

上述可用圖式表之如次：

Transitive 羣＋連續⟶鄰域

鄰域＋羣⟶條件（3）。

（ii）拓扑子羣是由子羣和拓扑羣拚合而得，即：

子羣＋拓扑羣⟶拓扑子羣。

自拓扑羣的意義成立以後，那麼，由於意義的成立而帶來的矛盾也開始發展了，起初羣的反映是正面的力量，而其反面則為非羣的反映了。這樣，便否定了自己，但當其碰到子羣時候，反映函數便揚棄了羣而改為與子羣拚合，又把否定否定了。

但由拓扑羣發展而為拓扑子羣，完全是屬於捹合法的，其在外表上雖在捹合之後沒有失去部分意義，似乎屬於疊進法的，但疊進法的發展並不是互異不同的兩物相捹，而其正反勢力僅限於同一事物上作螺旋式的發展罷了。（見原書第五八頁）

（iii）拓扑羣之具有稠密性（Compact），也是由拓扑空間或其子集之稠密性及拓扑羣捹合而來。稠密觀念存在於拓扑空間或其子集裏，其勢力是正面的，而存在於非拓扑空間或子集裏的力量則為反面的了。故當稠密存在問題成立之後，其反面力量也跟着其成立而發展了。起初否定了拓扑空間或其子集，而當其與拓扑羣捹合時，便把否定否定了。由是一變而為拓扑羣也存在着稠密觀念了。

$$\left.\begin{array}{l}\text{拓扑空間的子集}\\ \text{拓扑空間}\end{array}\right\}+\text{拓扑羣}\longrightarrow\text{拓扑羣稠密性。}$$

（iv）開的意義本是所有界點不屬於某集，則該集稱為所在空間的開集。當這開和有長空間相捹合的時候，便揚棄了界點的條件，而為該集內許多球式鄰域的中心來取代，因而否定了界點，但鄰域除了可作的之外，還有不可作為其反面的力量，故當否定有限個點而改的可作為任意的每一點時，則又否定了不可作而開的意義便完全捹成。

由此可見它們的形式是截然不同的，一個是靠着界點為成立的條件，而另一個則靠着球式空間，在界點與球式空間之中並沒有前後連接的疊進關係，而係以不同的形式表示同一目的而已，所以它也可說是遞進。

從此發展下去，便到拓扑空間了，若其與開的原來意義相遇，無疑的是屬於拚合作用，但若與上述意義相遇，也不外是另一種拚合。起初它揚棄了有長空間，而球式鄰域便跟着否定了。這樣，對於每一點所作的鄰域便失去中心及等距離的意義，而改用每一點之為內點或界點了。但界點是不可能存在於開集的。那麼，只可把第一否定的主要成分——界點——否定了。

再發展下去，便到反映函數了，反映函數除其本身外，便有本集及象集。當其與開的意義拚合時候，那麼，單一開集便被否定了，因而構成本象對應的開集，但開的意義並未侵入函數裏面，這便是一般拓扑學者所規定的開函數的定義。

但開的力量雖未侵入，而却已形成正面的力量。至其相反力量——非開——則與之對立，而保藏於函數裏面，直到正面力量否定了函數而為函數集時，才把否定否定了。因得開函數集的定義如次：

「設由開集甲至開集乙之反映函數集若為開集，則稱之為開的函數集。」

（Ⅴ）開函數的概念既如上述，茲再論其與拓扑羣拚合的形態，特述如下：

「設拓扑空間到（into）另一拓扑空間的同形（homo morphic）函數是開的，則拓扑羣到另一拓扑羣的該函數稱為開的。」

在這裏取開函數的正面勢力——開集——則非開為其反面力量，但當其本集及象集被拓扑羣中拓扑空間取代後，便否定

了自己，因為這時候正反的力量都呈顯於局面中，更由羣的同形對應揚棄了反面的力量，從而否定了否定。

開函數＋羣的同形函數──→開的羣的同形函數。

（Vi）同形對應：若考察同形對應概念的演變，便可窺見其拼合的情形，測繪（Mapping）的原義是由一個東西反映為另一個東西的，當這兩個東西被羣的意義吸引以後，便把原義否定了，因此，羣的意義──對任何 X，Y 使 $g(xy)=g(x)g(y)$ ──便滲進測繪裏面而拼合起來，則把否定否定了。

測繪＋羣──→第一否定的同形對應。

但當羣的原義被拓扑羣所否定以後，則除保有抽象羣的第三性質外，尚須和拓扑羣的第三性質──羣 G 的羣作法在拓扑空間 G 內是連續的──相拼合，從而否定了否定，而拼成新的同形對應的定義了。

又若羣的意義被至微羣(intinitemal group)所吸收以後，不但否定了原義，而且又與至微的內在本質─可交換 $aba^{-1}b^{-1}$ 及其線形 $\alpha a+\beta b$ 的本質，也和象集的元素相拼合，因而又否定了否定。終而拼為：

$$(a)\ g(\alpha a+\beta b)=\alpha g(a)+\beta g(b)$$
$$(b)\ g[(a,b)]=[g(a),g(b)]$$

這樣，又成了一個新的同形對應了。

（Vii）等形對應(isomorphic)：等形對應既產生，那麼，跟着其產生而帶來的矛盾也開始發展了，當它滲進不同部分的時候，便呈顯出許多各異的等形對應，由於各種等形對應的對

立，其原意便被否定了。

這些不同各異的等形對應，若由分類法來分，可得核(kernel)對應，一一對應，恆等對應，(identity) 節縮 (imbeded) 對應，射影 (Projective) 對應，自己 (automorphic) 對應，及界 (boundary) 對應等等，我們若在這些對應之中，選從一一對應出發，使它滲進拓扑空間裏面，由是除了元素與元素間須一一對應外，更須吸收其象集中象集之閉區 (Closure) 與閉區之象集間相等關係，因此，又否定了否定。這樣，由等形與拓扑空間的相拼而得到了 homeomorphic。

但homeomorphic 從拓扑空間發展到羣的時候，那麼，homeomorphic 裏的拓扑空間的意義又被拓扑羣所否定了。但在拓扑羣的意義裏，除了羣的意義外，是不能沒有拓扑空間的意義的，因此，拓扑羣除了等形對應的羣外，更不能沒有拓扑空間的 homeomorphic 對應的存在，因此，否定拓扑空間的勢力又否定了自己。因而拼成拓扑羣的等形對應如次：由拓扑羣 G 至拓扑羣G'之反映函數 f 之稱為等形的條件：

(a) f為拓扑空間G至拓扑空間G'的 homeomorphic函數；

(b) f為抽象羣G至抽象羣G'之等形函數。

(Viii) 分解(decomposed)：可分解的意義係導源於整除問題，在除法裏面，被除數與除數的關係，有的是可整除的，有的是不可整除的，因此，構成了兩個相反的力量。若就整除的概念來說，向着數字本身發展的，便是叠進作用，而向着外界發展的，概係拼合作用。但當其向着數字本身發展的時候，則其正面的力量是可以整除的 ， 而其反面則為不可整除 ， 因

此，便把自身否定了。又當繼續整除至完全分解為質因數時，又否定了否定，由是建立了質因數的概念。

又當向着因子分解方面發展時，便開始其拼合作用了。代數式本來不是數目意義的，當其被吸引時候，數目的整除意義便被否定而揚棄了，但代數式是可以與整除拼合的，因此，又否定了反面的力量而建立因子分解的形式了。

由此發展下去，便到羣的範圍了，這時候原有的被除式，除式及商式都被否定揚棄了，但否定的反面，還有正面的可解力量，這力量滲進於羣的變換意義裏面，漸漸把一羣G分解為兩個法子羣H及K,這時候表顯了不可分解的$H\cap K=\{e\}$及$G=HK$ ($H\not\subset K$, $K\not\subset H$)的特質，改變了原有的可分解的意義，而變為新的可分解的意義，因此，又把否定否定了。

當可分解的概念發展到稠密拓扑羣的時候，其兩個法子羣的數目便被稠密的意義否定了，稠密集的意義是要在其集內每一子集至少有一極限點在其上，因此，法子羣的數目，便由二個擴充至三個四個以至無限個，但這裏無限個不能為不可數的，則應為可數的了，那麼，稠密的意義又否定了否定，這樣，便拼成了稠密拓扑羣中至多有可數的基本羣。

(ix) 現在我們再用拼合法使羣論中定理和拓扑空間相拼而成新定理。設對應函數g是把抽象羣G反映至另一抽象羣G^*,且設N為g的核(Kernel)，則N為其法羣及G^*與G/N成等形對應。當此定理與拓扑空間相拼以後，便把G,G^*改為拓扑羣，而g改為開函數，由是便否定了抽象羣性質。此即N及G/N與G^*的對應關係中之抽象意義被否定。

但當它們失却抽象羣意義之後，便被拓扑空間的意義所吸收了，而變為拓扑羣的法羣及其同形對應，由是又把否定否定了。　　　　　　　　　　（見原書 P. 64 及 P. 11）

3.　分類法舉例

（i）同形對應(homomorpnic)：同形對應的拼合作用，既如上述。茲更言其發生除拼合作用外，尚有分類法的途徑。這兩者間實有顯著的差別。須知在拼合法裏，同形對應的變化是屬於縱面的，當一種同形對應的概念和另一種概念接觸之後，其本身即起變化，至於變化後的同形對應，已不是先前的同形對應了，惟這裏所說的同形對應雖有彼此差異，但不是當意識滲入以後始發生的，而係由於同異的比較始發見其差異的。比方等形對應，核對應，自然同形對應及同形對應相比較，實在都屬於同形對應的，不過其中具有一一對應關係的，叫做等形對應，和元素 e 對應的，叫做核對應，而其中更有和自己商羣對應的（N: 法羣）叫做自然同形對應。它們在尚未被發見之先，都已自有存在，而在認識之後，其本質也沒有絲毫改變的。

但此又與提煉法不同，提煉法所創的概念，雖然也是不變本末的，但其含義必須靠着個別事物始能表現出來，而此個別事物不必僅許其唯一存在。比方連續的概念，係指在某點鄰域為無遺漏的，為了要否定遺漏的存在，便要否定所遺漏的點與某定點間的距離不能存在，因此，乃有分截說與叙列說的解釋。但這兩說便是以不同的事物，去表現同一先天的本性。

當同形對應滲入拓扑空間以後，便開始其同異的發展了，