數理化自學叢書

N.K.S

代數

第三册

香港三育圖書文具公司 出版

數理化自學叢書

代數

第三册

香港三育圖書文具公司出版

內 容 提 要

本書是數理化自學叢書中代數的第三册，內容包括不等式，函數和它的圖像，一次函數，二次函數，有理數指數的冪函數，指數函數和對數函數，常用對數，指數方程和對數方程，數列等九章，只要具備中學代數的基本知識就可閱讀。書中有詳細的說明和分析，並附有大量例題和習題，供練習鞏固之用。

數理化自學叢書

代 數

（第三册）

出版發行：三育圖書文具公司
香港九龍柯士甸道三十三號二樓
San Yu Stationery & Publishing Co.
33, Austin Road, 1/F., Kowloon, Hong Kong.

印刷：金冠印刷有限公司
香港北角英皇道499號北角工業大廈六樓B座

1978年8月版

版權所有・翻印必究

目　录

[目 录]

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章 不 等 式

在日常生活、生产实际和科学研究中，我們不但要考察量与量之間的相等关系，也要考察量与量之間的不等关系. 反映在数学里，我們不但要研究等式，并且也要研究不等式.

在代数第二册里，我們曾学习过关于不等式的一些初步知識这一章里，我們将在复习这些知識的基础上，系統地学习关于不等式的知識.

§1·1 不等式的概念

1. 实数大小的比較 我們知道，两个实数 a 与 b 之間，总存在，而且只存在，下面三种关系中的一种：

(1) a 大于 b，記做 $a>b$；

(2) a 小于 b，記做 $a<b$；

(3) a 等于 b，記做 $a=b$.

我們还知道，要比較两个实数 a 和 b 的大小，只要考察它們的差就可以了，就是：

如果 $a-b$ 是正的，那末 $a>b$，如果 $a-b$ 是負的，那末 $a<b$，如果 $a-b$ 是零，那末 $a=b$；

反过来，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 是正的，如果 $a<b$，那末 $a-b$ 是負的，如果 $a=b$，那末 $a-b$ 是零.

用式子来表示，就是：

設 a, b 为两实数，

$$\text{如果}\qquad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b;\end{cases}$$

$$\text{反过来,如果}\quad a\begin{cases}>b,\\<b,\\=b,\end{cases}\quad\text{那末}\quad a-b\begin{cases}>0,\\<0,\\=0.\end{cases}$$

在上面所讲的式子里，$a>b$ 和 $a<b$ 这两个式子是用不等号“$>$”和“$<$”把两个实数 a 和 b 联結起来构成的，它們都叫做**不等式**；$a=b$是用等号“$=$”把两个实数 a 和 b 联結起来构成的，它叫做**等式**.

2．代数式的值的大小比較 有时候，我們也要比較两个代数式的值的大小．这时，可以根据一个代数式的值大于、小于、或者等于另一个代数式的值，而分別用符号“$>$”，“$<$”，或者“$=$”把它們联結起来．在前两种情况下，就組成了不等式；在后一种情况下，就組成了等式．例如

$$3+2>4,\quad a+1<a+2$$

等等都是不等式；

$$3+2=5,\quad (a+1)^2=a^2+2a+1$$

等等都是等式.

因为单独用一个字母或数字所表示的数，也可以看做是代数式，所以我們說：

用不等号“$>$”或者“$<$”把两个代数式联結起来所成的式子叫做**不等式**；用等号“$=$”把两个代数式联結起来所成的式子，叫做**等式**.

象比較两个实数的大小一样，比較两个代数式的值的大小，也只要考察它們的差就可以了.

例 1． 比較$(x+3)(x-5)$和$(x+2)(x-4)$的大小.

【解】 $(x+3)(x-5)-(x+2)(x-4)$

$$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$$
$$=-7<0,$$
$$\therefore \quad (x+3)(x-5)<(x+2)(x-4).$$

例 2. 比較 $(x^2+1)^2$ 和 x^4+x^2+1 的大小.

【解】
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$$
$$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$$
$$=x^2.$$

(1) 如果 $x=0$, 那末 $x^2=0$, 这时有
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=0,$$
$$\therefore \quad (x^2+1)^2=x^4+x^2+1.$$

(2) 如果 $x\neq 0$, 因为不等于零的任何实数的平方都是正数, 所以 $x^2>0$. 这时有
$$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0,$$
$$\therefore \quad (x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

注 上面这两种情况,合在一起可以写做
$$(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1.$$
这个式子表示 $(x^2+1)^2$ 的值不小于 x^4+x^2+1 的值.

象这种用符号"$\geqslant$"(讀做大于或等于)或者"$\leqslant$"(讀做小于或等于)把两个代数式联結起来的式子,也叫做不等式. 为了区别,我們把用符号"$>$"或者"$<$"联結而成的不等式叫做**严格不等式**,而用符号"$\geqslant$"或者"$\leqslant$"联結而成的不等式叫做**非严格不等式.**

例 3. 比較 $(a-1)^2$ 和 a^2+1 的大小.

【解】 $(a-1)^2-(a^2+1)=(a^2-2a+1)-(a^2+1)$
$$=-2a.$$

因为字母 a 可能表示正数或負数,也可能表示零,所以要分做三种情况来考察:

(1) 如果 a 是正数,那末 $-2a$ 就是負数,这时有
$$(a-1)^2<a^2+1.$$

(2) 如果 a 是負数,那末 $-2a$ 就是正数,这时有

$$(a-1)^2>a^2+1.$$

(3) 如果 a 是零,那末 $-2a$ 也是零,这时有

$$(a-1)^2=a^2+1.$$

上面討論的三种情况,合在一起可以写做

$$(a-1)^2\begin{cases}<a^2+1 & \text{如果 } a>0,\\ >a^2+1 & \text{如果 } a<0,\\ =a^2+1 & \text{如果 } a=0.\end{cases}$$

习 题 1·1

比較下列各題中两个代数式的值的大小:

1. $(a-5)(a-7)$ 和 $(a-6)^2$.

2. $(a+1)(a^2-a+1)$ 和 $(a-1)(a^2+a+1)$.

3. $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 和 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $(x\neq 0)$.

4. a^2+b^2 和 $2ab$.

[提示: 按照 $a=b$ 或者 $a\neq b$ 分別考察.]

5. $(\sqrt{x}-1)^2$ 和 $(\sqrt{x}+1)^2$.

§1·2 絕对不等式和条件不等式

在上节的例 1 中,我們看到不論字母 x 表示什么实数,不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

总能成立. 在例 2 中,我們看到当 $x\neq 0$ 的时候,不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

才能成立,而当 $x=0$ 的时候,这个不等式就不成立.

如果不論用什么数值代替不等式中的字母,它都能够成立,这样的不等式叫做**絕对不等式**. 如果只有用某些范圍內的数值代替不等式中的字母,它才能够成立,这样的不等式叫做**条件不等式**.

例如,不等式

$$(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$$

和

$$a+1>a-2$$

都是絕对不等式；而不等式

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$$

和
$$(a-1)^2<a^2+1$$

都是条件不等式.

两边都不含有字母而能够成立的不等式，也叫做絕对不等式. 例如

$$5>3, \quad -5<-3$$

等等，都是絕对不等式.

例 1. 判断下列这些不等式中，哪些是絕对不等式，哪些是条件不等式？哪些不能成立？

(1) $\sqrt{2}>1.4$； (2) $x^2+1>0$；

(3) $x^2+1<0$； (4) $x+1<0$.

【解】 (1) 因为不等式 $\sqrt{2}>1.4$ 的两边都不含有字母，并且 $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 的值确实大于 1.4，所以这个不等式是絕对不等式.

(2) 因为不論 x 是什么实数，x^2 都不是負数，因此 x^2+1 的值总大于零. 这就是說，不論 x 是什么实数，不等式 $x^2+1>0$ 总能成立，所以这个不等式是絕对不等式.

(3) 因为不論 x 是什么实数，x^2+1 的值总大于零，所以不論用什么数值代替 x，不等式 $x^2+1<0$ 都不能成立.

(4) 因为只有用比 -1 小的值代替 x，不等式 $x+1<0$ 才能成立，所以这个不等式是条件不等式.

在含有字母的不等式中，求出字母应当取什么范圍內的数值才能使不等式成立，这个手續叫做**解不等式**. 这里的字母叫做不等式的未知数，所求出的使不等式能够成立的未知数的那些数值范圍，叫做**不等式的解**.

从上面所举的例子中，可以看到不等式的解可能有三种不同情况：

(1) 任何实数都是不等式的解：例如任何实数都是不等式 $x^2+1>0$ 的解．这种不等式就是絕对不等式．

(2) 只有某些范圍內的实数是不等式的解：例如只有比 -1 小的实数是不等式 $x+1<0$ 的解．这种不等式就是条件不等式．

(3) 任何实数都不是不等式的解：例如任何实数都不是不等式 $x^2+1<0$ 的解．通常我們說这个不等式沒有解．

例 2． 通过观察，确定下列各不等式的解：

$$(1)\ x^2<0;\quad (2)\ (x-1)^2>0;\quad (3)\ (x-1)^2+1>0.$$

【解】 (1) 不論 x 是什么实数，x^2 的值不能小于零，这个不等式沒有解．

(2) 只要 $x\neq1$，$(x-1)^2$ 的值总大于零，所以这个不等式的解是除去 $x=1$ 以外的全体实数，也就是

$$x<1 \text{ 或者 } x>1.$$

(3) 不論 x 是什么实数，$(x-1)^2$ 的值都不能是負数，因此 $(x-1)^2+1$ 的值总大于零．所以这个不等式的解是全体实数．

习 題 1·2

1．应用比較不等式左右两边两个代数式值的大小的方法，証明下列各不等式是絕对不等式：

(1) $(x+1)(x-5)<(x-2)^2$;

(2) $(a+1)\left(a^2+\frac{1}{2}a+1\right)>\left(a+\frac{1}{2}\right)(a^2+a+1)$.

2．通过观察，确定下列各不等式的解：

(1) $x^2>0$;　　(2) $(x+1)^2<0$;

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$;　　(4) $(x+1)^2>0$.

3．把下列不等式中左边的式子先配方化成 $(x+m)^2+k$ 的形式，再确定它的解：

(1) $x^2-2x+3>0$;　　(2) $x^2-x+1<0$;

(3) $x^2+3x+\frac{9}{4}>0$;　　(4) $x^2+x+\frac{1}{4}<0$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

§1·3 不等式的基本性质

对于等式来說，我們已經知道它具有下面这些基本性质：

(1) 如果 $a=b$，那末 $b=a$；反过来，如果 $b=a$，那末 $a=b$.（相等的对称性）

(2) 如果 $a=b$, $b=c$，那末 $a=c$.（相等的傳遞性）

(3) 如果 $a=b$，那末 $a+c=b+c$.

(4) 如果 $a=b$，那末 $ac=bc$.

类似地，不等式也有下面这些基本性质：

性质 1. 如果 $a>b$，那末 $b<a$；反过来，如果 $b<a$，那末 $a>b$.

这个性质叫做**不等的对逆性**.利用这个性质，以后当我們研究不等式的时候，只需研究用一种不等号（例如用大于号"$>$"）联結起来的不等式的性质，就可以推出用另一种不等号（例如用小于号"$<$"）联接起来的不等式所具有的类似性质.

性质 2. 如果 $a>b$, $b>c$，那末 $a>c$.

这个性质叫做**不等的傳遞性**. 利用这个性质，我們可以从一个不等式过渡到另一个不等式.

例如，从不等式 $\pi>3$ 和 $3>2\sqrt{2}$，可以得出不等式

$$\pi>2\sqrt{2}.$$

性质 3. 如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$.

这个性质指出：不等式的不等号两边加上一个相同的数，仍旧得到一个不等式，并且这个不等式与原来的不等式有相同的不等号.

例 1. 已知 $a+b>c$，求証 $a>c-b$.

【証明】 在不等式 $a+b>c$ 的不等号两边同加上 $-b$，得

$$a+b+(-b)>c+(-b),$$

$$\therefore\quad a>c-b.$$

这个例子指出：不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边．

过去我們在解一元一次不等式的时候，就經常应用到这一法则（移項法則）．

例 2. 解不等式 $3x-1>2x$.

【解】 把不等式中含有 x 的項移到不等号的左边，常数項移到不等号的右边得

$$3x-2x>1.$$

$$\therefore \quad x>1.$$

上面关于不等式的三个基本性质，都是很明显的．現在我們进一步来研究在一个不等式的不等号两边同乘以一个数（正数、負数、或者零）的时候，将会产生怎样的結果．我們先来看下面的例子．

例 3. 已知 $a>b$，比較 ac 和 bc 的大小．

分析 要比較 ac 和 bc 的大小，只要考察它們的差 $ac-bc$，就是 $(a-b)c$ 是什么样性质的数就可以了．根据已知条件 $a>b$，可以知道差的一个因式 $a-b$ 一定是正数，因此，差 $(a-b)c$ 是正数、負数、或者是零，要根据 c 是正数、負数、或零来确定．

【解】 $$ac-bc=(a-b)c.$$

$$\because \quad a>b, \quad \therefore \quad a-b \text{ 是正数}.$$

(1) 如果 c 是正数，那末因为两个正数的积仍是正数，所以 $(a-b)c>0$，这时 $ac>bc$.

(2) 如果 c 是負数，那末因为一个正数与一个負数的积是負数，所以 $(a-b)c<0$，这时 $ac<bc$.

(3) 如果 c 等于零．那末 $(a-b)c$ 等于零，所以

$$ac=bc.$$

上面的例子，指出了不等式的第四个基本性质：

性质 4. 如果 $a>b$，那末

$$ac\begin{cases}>bc & (\text{当 } c>0 \text{ 的时候}),\\ =bc & (\text{当 } c=0 \text{ 的时候}),\\ <bc & (\text{当 } c<0 \text{ 的时候}).\end{cases}$$

过去,我們在解一元一次不等式的时候,也經常应用到这个性质.

例 4. 解不等式:

$$2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1.$$

【解】 在不等式的两边同乘以 6. 得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6,$$

就是 $$14x+8>21x-6.$$

移項,得

$$14x-21x>-6-8,$$

就是 $$-7x>-14.$$

在上式的两边同除以 $-7\left(\text{就是乘以}-\frac{1}{7}\right)$, 得

$$x<2.$$

答: 原不等式的解是 $x<2$.

为了讲法上的方便,当同时研究两个或几个不等式的时候,如果这些不等式里,每一个的左边都大于右边,或者每一个的左边都小于右边,那末就把这些不等式叫做**同向**不等式. 例如不等式

$$3x-1>2x,\ 3x-2x>1 \text{ 和 } x>1$$

是同向不等式. 如果两个不等式里,一个不等式的左边大于右边,而另一个不等式的左边小于右边,那末就把这两个不等式叫做**异向**不等式. 例如不等式

$$-7x>-14 \text{ 和 } x<2$$

是异向不等式.

这样,我們也可把不等式的基本性质 4 說成:

不等式的两边同乘以一个正数，那末得到和原不等式同向的不等式；如果同乘以一个負数，那末得到和原不等式异向的不等式；如果同乘以零，那末得到一个等式.

注意 等式的两边同乘以一个相同的数，不論是正数、負数或者零，結果总是一个等式，但不等式的两边同乘以一个相同的数，就須要根据乘数的性质来确定它的結果.

所以在应用不等式的这一性质的时候，首先必須要考察用来乘不等式两边的数(或者代数式的值)究竟是正数，是負数，还是零，否則就容易发生錯誤.

*例 5. 解关于 x 的不等式

$$mx-2>x-3m. \tag{1}$$

【解】 移項得

$$(m-1)x>2-3m. \tag{2}$$

因为 $m-1$ 可能是正数或負数，也可能是零，所以需要研究三种情况：

(1) $m-1>0$，这时 $m>1$. 在不等式(2)的两边同乘以正数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x>\frac{2-3m}{m-1}.$$

(2) $m-1<0$，这时 $m<1$. 在不等式(2)的两边同乘以負数 $\frac{1}{m-1}$，得

$$x<\frac{2-3m}{m-1}.$$

(3) $m-1=0$，即 $m=1$. 这时不等式(2)成为

$$0x>-1$$

的形式. 很明显，不論 x 是什么实数，这个不等式都能成立.

綜合上面三种情况，我們得到不等式(1)的解是：

$$x\begin{cases}>\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m>1, \\ <\dfrac{2-3m}{m-1}, & \text{如果 } m<1, \\ \text{是全体实数，} & \text{如果 } m=1.\end{cases}$$

习 题 1·3

1．求証：

(1) 如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$；

(2) 如果 $a>b$，$b=c$，那末 $a>c$；

(3) 如果 $a=b$，$b<c$，那末 $a<c$.

[解法举例：(1)
$$\because a>b,\ b>c,$$
$$\therefore\ a-b>0,\ b-c>0.$$
今
$$a-c=(a-b)+(b-c).$$
因为两个正数的和仍旧是正数，所以 $a-c>0$，由此可知 $a>c$.]

2．(1) 如果 $a>b$，$c=d$，是否一定能得出 $ac>bd$，为什么？

(2) 如果 $ac>bc$，是否一定能得出 $a>b$，为什么？

(3) 如果 $a<b$，是否一定能得出 $ac^2<bc^2$，为什么？

(4) 如果 $ac^2<bc^2$，是否一定能得出 $a<b$，为什么？

(5) 如果 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，是否一定能得出 $a<b$，为什么？

[解法举例：(1) 不一定．因为 c 和 d 可能同时是正数，也可能同时是负数，也可能同时是零．根据不等式基本性质 4，只有在第一种情况下，才能得到 $ac>bd$ 这一結論.]

3．比較下列各組中两个代数式的值的大小：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$；

(2) $(\sqrt{6}+1)^2$ 与 $6+2\sqrt{6}$；

(3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ 与 $(\sqrt{6}+1)^2$.

4．解下列各不等式，并且在数軸上表示出它們的解：

(1) $3[x-2(x-1)]<4x$；

(2) $5-\frac{x}{3}<\frac{7}{2}-\frac{4x+1}{8}$；

(3) $x-\frac{x-1}{2}>\frac{2x-1}{3}-\frac{x+1}{6}$;

(4) $(x-\sqrt{2})^2>(x+\sqrt{2})^2$;

(5) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$;

(6) $(x+1)^2<(x-1)^2$;

(7) $(x^2+1)(2x-3)>(x^2+1)(3x-4)$;

*(8) $3x^2-2x<x^3-6$.

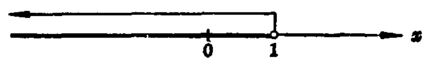
[解法举例: (7) $\because\quad x^2+1>0$.

原不等式两边同除以 x^2+1,得

$$2x-3>3x-4,$$

移項得 $\qquad -x>-1,\quad \therefore\quad x<1$.

将这个解表示在数軸上,如下图. 它是从 1 这一点开始向左的那一部分数軸,但不包括 1 这一点.]



*5. 解下列关于 x 的不等式:

(1) $ax+b^2>bx+a^2\quad(a<b)$;

(2) $mx-n^3<nx-m^3\quad(m<n)$;

(3) $k(x-1)>x-2$;

(4) $(p-q)x<p^2-q^2\quad(p\neq q)$;

(5) $mx-3>2x+m$.

§1·4　一元一次不等式組

在解一些具体問題时,有时根据問題中的条件,未知数的数值范圍,需要同时滿足几个不等式. 例如: 某天的气候預报,当天最低温度是摄氏 16 度,最高温度是摄氏 22 度,如果用 x 表示当天温度度数,那末 x 可以取值的范圍,需要同时滿足下面这两个不等式:

$$\begin{cases} x\geqslant 16, & (1)\\ x\leqslant 22. & (2)\end{cases}$$

我們說,不等式(1)和(2)組成一个**不等式組**.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com